Zeitschrift: Archives des sciences physiques et naturelles

Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève

Band: 9 (1927)

Artikel: Sur le développement de la fonction perturbatrice dans le problème des trois corps

Autor: Tiercy, Georges

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-740865

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Siehe Rechtliche Hinweise.

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. Voir Informations légales.

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. See Legal notice.

Download PDF: 26.11.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Sur le développement de la fonction perturbatrice

dans le problème des trois corps

PAR

Georges TIERCY

(Avec 1 fig.)

§ 1. — *Le problème* est bien connu; il s'agit d'étudier le mouvement d'un système de trois corps, A, B, C, de masses respectives m_1, m_2 et m_3, s'attirant mutuellement suivant la loi de Newton. Nous supposerons d'emblée que m_3 l'emporte de beaucoup sur les deux autres masses; ce sera le soleil C.

On sait que la fonction caractéristique des équations canoniques du problème est:

$$F = T + \Pi ,$$

où T est l'énergie cinétique du système et Π l'énergie potentielle.

Soient (x_1, y_1, z_1) les coordonnées du corps A, (x_2, y_2, z_2) celles du corps B, et (x_3, y_3, z_3) celles de C. On a:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=3} m_i\left[\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2\right] ;$$

ou bien:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=3} \frac{X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2}{m_i} ,$$

en posant:

$$X_i = m_i\frac{dx_i}{dt} , \qquad Y_i = m_i\frac{dy_i}{dt} , \qquad Z_i = m_i\frac{dz_i}{dt} .$$

La fonction Π s'écrit:

$$\Pi = -\frac{m_1 m_2}{AB} - \frac{m_1 m_3}{CA} - \frac{m_2 m_3}{CB} ;$$

et il est évident qu'elle ne dépend pas des X_i, Y_i, Z_i.

Les équations canoniques du problème sont:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial X_i} , \\ \frac{dy_i}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial Y_i} , \\ \frac{dz_i}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial Z_i} , \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dX_i}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial x_i} , \\ \frac{dY_i}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial y_i} , \\ \frac{dZ_i}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial z_i} . \end{aligned}\right. \tag{1}$$

Ces équations admettent des intégrales premières, qui sont:

1° L'intégrale des forces vives: $F = \text{const.}$;

2° Les trois relations :

$$\left\{\begin{aligned} \sum_{i=1}^{i=3} X_i &= \text{const.} , \\ \sum Y_i &= \text{const.} , \\ \sum Z_i &= \text{const.} , \end{aligned}\right.$$

qui montrent que le centre de gravité du système est animé d'un mouvement rectiligne et uniforme;

3° Les intégrales des aires:

$$\left\{\begin{aligned} \sum_{i=1}^{i=3} (y_i Z_i - z_i Y_i) &= \text{const.} , \\ \sum (z_i X_i - x_i Z_i) &= \text{const.} , \\ \sum (x_i Y_i - y_i X_i) &= \text{const.} . \end{aligned}\right.$$

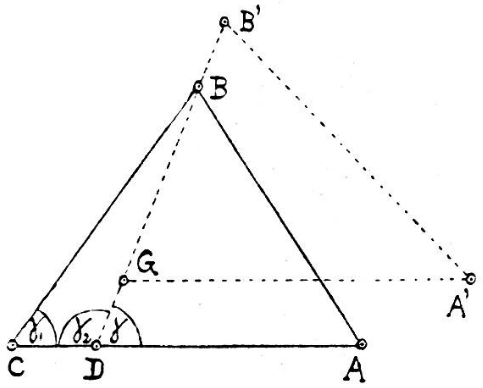
Le système considéré a 9 degrés de liberté, et les équations (1) contiennent 18 variables.

BIBLIOTHÈQUE DE L'UNIVERSITÉ NEUCHATEL

On cherche alors à abaisser le nombre des degrés de liberté et à diminuer le nombre des variables, en faisant un changement convenable de variables; pour cela, on profitera de la propriété du centre de gravité de se mouvoir d'un mouvement rectiligne et uniforme.

§ 2. — *Changement de variables.*

Soient x'_i, y'_i, z'_i, X'_i, Y'_i, Z'_i les nouvelles variables. Prenons-les de façon que les x'_i soient des fonctions linéaires des x_i, les y'_i des y_i et les z'_i des z_i; de plus, les relations entre les x'_i et les x_i seront les mêmes que celles qui lient les y'_i aux y_i ou les z'_i aux z'_i.



Supposons, en outre, qu'il en soit de même des variables X'_i, Y'_i, Z'_i en fonction des X_i, Y_i, Z_i; et posons:

$$X'_i = m'_i \frac{dx'_i}{dt}, \qquad Y'_i = m'_i \frac{dy'_i}{dt}, \qquad Z'_i = m'_i \frac{dz'_i}{dt}, \tag{2}$$

où les m'_i sont trois coefficients constants.

Enfin, choisissons les relations linéaires dont il s'agit de telle sorte qu'on ait constamment:

$$\sum_{i=1}^{i=3} x'_i X'_i = \sum_{i=1}^{i=3} x_i X_i . \tag{3}$$

A cause des relations linéaires annoncées ci-dessus entre les variables primées et les variables non primées, la relation (3) donne immédiatement d'autres égalités:

$$\left\{\begin{array}{l}\sum_{i=1}^{i=3} x'_i Y'_i = \sum_{i=1}^{i=3} x_i Y_i ; \\ \sum y'_i Y'_i = \sum y_i Y_i ; \\ \sum x'_i Z'_i = \sum x_i Z_i ; \\ \sum z'_i Z'_i = \sum z_i Z_i ; \\ \cdots\cdots\cdots \end{array}\right. \tag{3'}$$

Il résulte des égalités (3) et (3′) que le changement de variables considéré conserve la forme des intégrales des aires.

D'ailleurs, on a:

$$\sum_{i=1}^{i=3} (x'_i X'_i + y'_i Y'_i + z'_i Z'_i) = \sum_{i=1}^{i=3} (x_i X_i + y_i Y_i + z_i Z_i) ; \tag{4}$$

et cette condition signifie que le changement de variables est canonique; les équations du problème seront donc encore:

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{dx'_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial X'_i} ; \\ \frac{dy'_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial Y'_i} ; \\ \frac{dz'_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial Z'_i} ; \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l}\frac{dX'_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x'_i} ; \\ \frac{dY'_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial y'_i} ; \\ \frac{dZ'_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial z'_i} ; \end{array}\right. \tag{5}$$

Si l'on considère les x'_i, y'_i et z'_i comme les coordonnées respectives de trois corps fictifs, dont les masses respectives seraient les quantités m'_1, m'_2 et m'_3, les variables x'_i, y'_i, z'_i seront les composantes de leurs quantités de mouvement.

Les conditions (2) combinées avec la relation (3) conduisent rapidement à l'égalité:

$$\sum_{i=1}^{i=3} m'_i x_i'^2 = \sum_{i=1}^{i=3} m_i x_i^2 \; ; \qquad (6)$$

puis à cette autre:

$$\sum_{i=1}^{i=3} m'_i \left[\left(\frac{dx'_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy'_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz'_i}{dt}\right)^2 \right]$$
$$= \sum_{i=1}^{i=3} m_i \left[\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2 \right] ;$$

cela signifie que la force vive des trois corps fictifs est égale à celle des trois corps réels:

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=3} \frac{\mathrm{X}_i'^2 + \mathrm{Y}_i'^2 + \mathrm{Z}_i'^2}{m'_i} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=} \frac{\mathrm{X}_i^2 + \mathrm{Y}_i^2 + \mathrm{Z}_i^2}{m_i} .$$

On montre aussi que le moment d'inertie des trois corps fictifs par rapport à un axe quelconque passant par l'origine est égal à celui des trois corps réels [1].

Il reste à préciser les relations linéaires entre les nouvelles et les anciennes coordonnées.

Soit D le centre de gravité des corps C et A; et soit G le centre de gravité du système; ce point G sera considéré comme fixe, ce qui ne restreint en aucune manière la généralité du problème.

Prenons $\overline{\mathrm{GA}'}$ égal et parallèle à $\overline{\mathrm{CA}}$; puis $\overline{\mathrm{GB}'}$ égal et parallèle à $\overline{\mathrm{DB}}$; nous pourrons remplacer les trois masses m_1, m_2, m_3 par trois autres masses:

1° la première placée en A' et telle que l'on ait :

$$\frac{1}{m'_1} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_3} \quad \text{ou} \quad m'_1 = \frac{m_1 m_3}{m_1 + m_3} \; ; \qquad (7)$$

[1] H. Poincaré. *Mécanique céleste*, tome I, Gauthier-Villars, Paris 1905.

2° la deuxième placée en B′ et telle que l'on ait:

$$m_2' = \frac{m_2(m_1 + m_3)}{m_1 + m_2 + m_3} \; ; \tag{7'}$$

3° la troisième placée en G, et valant:

$$m_3' = m_1 + m_2 + m_3 \; . \tag{7''}$$

On obtient ainsi:

$$\left\{\begin{aligned} x_1' &= x_1 - x_3 \; ; \\ y_1' &= y_1 - y_3 \; ; \\ z_1' &= z_1 - z_3 \; ; \end{aligned}\right. \tag{8}$$

$$\left\{\begin{aligned} x_2' &= x_2 - x_D = x_2 - \frac{m_1 x_1 + m_3 x_3}{m_1 + m_3} \; ; \\ y_2' &= y_2 - y_D = y_2 - \frac{m_1 y_1 + m_3 y_3}{m_1 + m_3} \; ; \\ z_1' &= z_2 - z_D = z_2 - \frac{m_1 z_1 + m_3 z_3}{m_1 + m_3} \; . \end{aligned}\right. \tag{9}$$

$$\left\{\begin{aligned} & x_3' = \frac{\sum_{i=1}^{i=3} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{i=3} m_i} \; ; \quad y_3' = \frac{\sum_{i=1}^{i=3} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{i=3} m_i} \; ; \quad z_3' = \frac{\sum_{i=1}^{i=3} m_i z_i}{\sum_{i=1}^{i=3} m_i} \; ; \\ & x_3' = y_3' = z_3' = 0 \; , \qquad \text{(point G = origine).} \end{aligned}\right. \tag{10}$$

Ces relations (8), (9), (10) sont bien du type linéaire, prévu au début de ce paragraphe; en outre, elles vérifient la condition (6), qui tient lieu de (3):

$$\sum_{i=1}^{i=3} m_i' x_i'^2 = \sum_{i=1}^{i=3} m_i x_i^2 \; .$$

Comme on déduit des égalités (10) les suivantes:

$$\left\{\begin{aligned} X_3' &= X_1 + X_2 + X_3 = 0 \; , \\ Y_3' &= Y_1 + Y_2 + Y_3 = 0 \; , \\ Z_3' &= Z_1 + Z_2 + Z_3 = 0 \; , \end{aligned}\right. \tag{11}$$

on n'aura plus à s'occuper que de deux corps fictifs, A′ et B′; donc, il ne reste plus, dans les calculs, que six variables minuscules et six variables majuscules; le problème ne comporte plus que six degrés de liberté.

On a, comme on dit, *éliminé* le centre de gravité.

D'ailleurs, on tire des relations établies:

$$x_2 - x_3 = x_2 - \frac{m_1 x_3 + m_3 x_3}{m_1 + m_3} = x_2 - \frac{m_1 x_1 + m_3 x_3}{m_1 + m_3} + \frac{m_1 (x_1 - x_3)}{m_1 + m_3};$$

$$\left\{\begin{aligned} x_2 - x_3 &= x_2' + \frac{m_1 x_1'}{m_1 + m_3}, \\ y_2 - y_3 &= y_2' + \frac{m_1 y_1'}{m_1 + m_3}, \\ z_2 - z_3 &= z_2' + \frac{m_1 z_1'}{m_1 + m_3}; \end{aligned}\right. \tag{12}$$

et l'on peut, en outre, poser:

$$\left\{\begin{aligned} x_2 - x_1 &= (x_2 - x_3) - (x_1 - x_3), \\ y_2 - y_1 &= (y_2 - y_3) - (y_1 - y_3), \\ z_2 - z_1 &= (z_2 - z_3) - (z_1 - z_3). \end{aligned}\right.$$

On voit que la fonction Π ne dépend que des coordonnées des deux corps fictifs A′ et B′; en effet, Π est fonction des différences $(x_1 - x_3)$, $(x_2 - x_3)$, $(x_2 - x_1)$, $(y_1 - y_3)$, $\ldots$; et toutes ces différences s'expriment en fonction de x_1', y_1', z_1', x_2', y_2', z_2'.

Remarquons encore que le changement de variables proposé revient à rapporter A à C, et B à D.

§ 3. — *Fonction perturbatrice.* — On peut écrire la fonction Π comme suit:

$$\left\{\begin{aligned} \Pi &= \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3; \\ \Pi_1 + \Pi_2 &= -\frac{m_1 m_3}{\mathrm{CA}} - \frac{m_2 (m_1 + m_3)}{\mathrm{DB}}; \\ \Pi_3 &= \frac{m_2 (m_1 + m_3)}{\mathrm{DB}} - \frac{m_2 m_3}{\mathrm{CB}} - \frac{m_1 m_2}{\mathrm{AB}}; \\ \Pi_3 &= m_1 m_2 \left(\frac{1}{\mathrm{DB}} - \frac{1}{\mathrm{AB}}\right) + m_2 m_3 \left(\frac{1}{\mathrm{DB}} - \frac{1}{\mathrm{CB}}\right); \end{aligned}\right. \tag{13}$$

rappelons que m_1 et m_2 sont des masses très petites par rapport à m_3; elles peuvent donc être regardées comme des quantités très petites du premier ordre, et le point D est très rapproché du soleil C. La distance:

$$\overline{CD} = \frac{m_1}{m_1 + m_3} . \overline{CA}$$

peut donc être considérée comme du premier ordre, de même que les quantités $(\overline{CB} - \overline{DB})$ et $\left(\frac{1}{DB} - \frac{1}{CB}\right)$.

La partie $\Pi_1 + \Pi_2$ de la fonction Π est ainsi du premier ordre, à cause des facteurs m_1 et m_2; quant à la partie Π_3, elle est visiblement du deuxième ordre.

Il reste à examiner la force vive T:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=3} \frac{X_i'^2 + Y_i'^2 + Z_i'^2}{m_i'} ;$$

Comme $X_3' = Y_3' = Z_3' = 0$, on peut écrire:

$$T = T_1 + T_2 = \frac{X_1'^2 + Y_1'^2 + Z_1'^2}{2 m_1'} + \frac{X_2'^2 + Y_2'^2 + Z_2'^2}{2 m_2'} ;$$

et l'on se rappelle que X_i', Y_i', Z_i' sont définies par les relations (2), où l'on doit prendre:

$$m_1' = \frac{m_1 m_3}{m_1 + m_3}, \qquad m_2' = \frac{m_2 (m_1 + m_3)}{m_1 + m_2 + m_3} ;$$

ces deux masses sont extrêmement petites; les quantités X_1', Y_1', Z_1', X_2', Y_2', Z_2' sont donc du premier ordre ; et T aussi. On pose alors:

$$\begin{cases} F = (F) + \lambda f , \\ (F) = T + \Pi_1 + \Pi_2 , \\ \lambda f = \Pi_3 ; \end{cases}$$

(F) est du premier ordre, λf du second; prenons un facteur λ de l'ordre de grandeur de m_1; et f sera du même ordre que (F). C'est ce dernier terme $\lambda f = \Pi_3$ qui a reçu le nom de *fonction perturbatrice*.

On sait qu'en négligeant ce terme Π_3 et en s'en tenant à la partie fondamentale de F, soit (F), les équations canoniques (5) se répartissent en deux groupes d'indices 1 et 2 respectivement, donnant séparément les mouvements de la première planète fictive et de la seconde planète fictive; ce sont là deux mouvements képlériens [1]. Et les orbites vraies des deux planètes fictives diffèrent peu de ces orbites képlériennes, la fonction perturbatrice Π_3 étant du deuxième ordre.

Or, s'il est immédiat d'exprimer (F) en fonction des variables relatives aux deux planètes fictives, c'est-à-dire:

$$\left\{\begin{aligned} (\mathrm{F}) &= \mathrm{T}_1 + \mathrm{T}_2 - \frac{m_1 m_3}{\mathrm{CA}} - \frac{m_1(m_1+m_3)}{\mathrm{DB}}, \\ \overline{\mathrm{CA}} &= \overline{\mathrm{GA}'} = \sqrt{x_1'^2 + y_1'^2 + z_1'^2}, \\ \overline{\mathrm{DB}} &= \overline{\mathrm{GB}'} = \sqrt{x_2'^2 + y_2'^2 + z_2'^2}, \end{aligned}\right.$$

il est moins facile d'obtenir une expression convenable de Π_3, approchée aux termes du troisième ordre près.

On trouve dans les leçons de mécanique céleste de H. Poincaré un calcul de ce développement dans le cas où $\overline{\mathrm{CA}} < \overline{\mathrm{DB}}$; le cas où $\overline{\mathrm{CA}} > \overline{\mathrm{DB}}$ n'y est pas traité complètement.

§ 4. — *Développement de* Π_3. — Ecrivons:

$$\begin{aligned} \Pi_3 = {} & \underbrace{m_1 m_2\left(\frac{1}{\mathrm{DB}} - \frac{1}{\mathrm{A'B'}}\right)}_{\text{partie principale}} \\ & \underbrace{+ m_1 m_2\left(\frac{1}{\mathrm{A'B'}} - \frac{1}{\mathrm{AB}}\right) + m_2 m_3\left(\frac{1}{\mathrm{DB}} - \frac{1}{\mathrm{CB}}\right)}_{\text{partie complémentaire}}; \end{aligned} \tag{14}$$

Dans tous les cas, la partie principale a pour expression analytique:

$$m_1 m_2\left(\frac{1}{\sqrt{x_2'^2 + y_2'^2 + z_2'^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2 + (z_2' - z_1')^2}}\right). \tag{15}$$

1 H. Poincaré, *loc. cit.*

Le calcul qui suit établira l'expression approchée de la partie complémentaire, expression valable dans les deux cas, $\overline{CA} < \overline{DB}$ et $\overline{CA} > \overline{DB}$. Or, le terme $m_1 m_2 \left(\frac{1}{A'B'} - \frac{1}{AB}\right)$ peut toujours être négligé; la parenthèse est en effet de l'ordre de m_1; le terme entier est ainsi de l'ordre de $m_1^2 m_2$ (3^e ordre), donc négligeable; on le constatera encore, plus loin, par son développement.

Il reste le dernier terme à étudier.

On a dans tous les cas:

$$\overline{A'B'}^2 = \overline{DB}^2 + \overline{CA}^2 - 2\overline{CA} . \overline{DB} . \cos\gamma \ .$$

où γ est l'angle ADB. On en déduit:

$$\begin{cases} \overline{A'B'}^2 = [\overline{DB} - \overline{CA} . e^{i\gamma}] . [\overline{DB} - \overline{CA} . e^{-i\gamma}] \ , \\ \overline{A'B'}^2 = [\overline{CA} - \overline{DB} . e^{i\gamma}] . [\overline{CA} - \overline{DB} . e^{-i\gamma}] \ ; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{A'B'} = \frac{1}{DB}\left[1 - \frac{CA}{DB} e^{i\gamma}\right]^{-\frac{1}{2}} . \left[1 - \frac{CA}{DB} e^{-i\gamma}\right]^{-\frac{1}{2}} \ , \\ \frac{1}{A'B'} = \frac{1}{CA}\left[1 - \frac{DB}{CA} e^{i\gamma}\right]^{-\frac{1}{2}} . \left[1 - \frac{DB}{CA} e^{-i\gamma}\right]^{-\frac{1}{2}} \ . \end{cases}$$

Si $\overline{CA} < \overline{DB}$, on développera la première de ces deux expressions suivant les puissances croissantes de $\frac{CA}{DB}$:

$$\frac{1}{A'B'} = \sum_{n=0}^{n} P_n(\gamma) . \frac{(\overline{CA})^n}{(DD)^{n+1}} \ ; \qquad (16)$$

si $\overline{CA} > \overline{DB}$, on développera la seconde expression de $\frac{1}{A'B'}$ suivant les puissances croissantes de $\frac{DB}{CA}$:

$$\frac{1}{A'B'} = \sum_{n=0}^{n} P_n(\gamma) . \frac{(DB)^n}{(CA)^{n+1}} \ ; \qquad (16^{bis})$$

dans le premier cas, le premier terme du développement sera $\frac{1}{DB}$; dans le second cas, le premier terme sera $\frac{1}{CA}$.

LABORATOIRE DE PHYSIQUE
UNIVERSITÉ NEUCHATEL

Les coefficients $P_n(\gamma)$ sont les mêmes dans les deux développements; ce sont des fonctions de l'angle γ.

Développons aussi $\frac{1}{AB}$ et $\frac{1}{CB}$. On a:

$$\overline{AB}^2 = \overline{CB}^2 + \overline{CA}^2 - 2\overline{CA}\,.\,\overline{CB}\,.\cos\gamma_1\ ,$$

où γ_1 est l'angle ACB. On obtient:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{1}{AB} &= \sum_{n=0}^{n} P_n(\gamma_1)\,.\,\frac{(CA)^n}{(CB)^{n+1}}\ , \\ &\qquad\qquad \text{ou bien :} \\ \frac{1}{AB} &= \sum_{n=0}^{n} P_n(\gamma_1)\,.\,\frac{(CB)^n}{(CA)^{n+1}}\ , \end{aligned}\right. \tag{17}$$

suivant que $\overline{CA} < \overline{CB}$ ou $CA > CB$; les coefficients $P_n(\gamma_1)$ ont la même composition que les $P_n(\gamma)$.

De même, on trouvera:

$$\overline{CB}^2 = \overline{DB}^2 + \overline{CD}^2 - 2\overline{DB}\,.\,\overline{CD}\,.\cos\gamma_2\ ,$$

où γ_2 est le supplément de γ; d'où, comme $\overline{CD}$ est très petit:

$$\frac{1}{CB} = \sum_{n=0}^{n} P_n(\gamma_2)\,.\,\frac{(CD)^n}{(DB)^{n+1}}\,. \tag{18}$$

Les deux derniers termes de (14) s'écrivent donc comme suit:

1er cas : $\overline{CA} < \overline{DB}$

$$\left\{\begin{aligned} & m_1 m_2 \left[\sum_{n=0}^{n} P_n(\gamma)\,.\,\frac{(CA)^n}{(DB)^{n+1}} - \sum_{n=0}^{n} P_n(\gamma_1)\,.\,\frac{(CA)^n}{(CB)^{n+1}}\right] \\ & + m_2 m_3 \left[\frac{1}{DB} - \sum_{n=0}^{n} P_n(\gamma_2)\,.\,\frac{(CD)^n}{(DB)^{n+1}}\right]\ ; \end{aligned}\right.$$

2e cas : $\overline{CA} > \overline{DB}$

$$\left\{\begin{aligned} & m_1 m_2 \left[\sum_{n=0}^{n} P_n(\gamma)\,.\,\frac{(DB)^n}{(CA)^{n+1}} - \sum_{n=0}^{n} P_n(\gamma_1)\,.\,\frac{(CB)^n}{(CA)^{n+1}}\right] \\ & + m_2 m_3 \left[\frac{1}{DB} - \sum_{n=0}^{n} P_n(\gamma_2)\,.\,\frac{(CD)^n}{(DB)^{n+1}}\right]\ ; \end{aligned}\right.$$

Si l'on écrit à part les premiers termes des développements, on s'aperçoit qu'ils se détruisent deux à deux, sauf ceux du premier crochet du premier cas, lesquels donnent $\left(\frac{1}{\mathrm{DB}}-\frac{1}{\mathrm{CB}}\right)$; mais cette différence est du premier ordre, et elle doit être multipliée par $m_1 m_2$; le produit est du troisième ordre, donc négligeable. Il reste alors:

$$1^{\text{er}}\ \text{cas}: \quad m_1 m_2 \left[\sum_{n=1}^{n} \mathrm{P}_n(\gamma)\cdot\frac{(\mathrm{CA})^n}{(\mathrm{DB})^{n+1}} - \sum_{n=1}^{n} \mathrm{P}_n(\gamma_1)\cdot\frac{(\mathrm{CA})^n}{(\mathrm{CB})^{n+1}}\right]$$

$$- m_2 m_3 \sum_{n=1}^{n} \mathrm{P}_n(\gamma_2)\cdot\frac{(\mathrm{CD})^n}{(\mathrm{DB})^{n+1}};$$

$$2^{\text{e}}\ \text{cas}: \quad m_1 m_2 \left[\sum_{n=1}^{n} \mathrm{P}_n(\gamma)\cdot\frac{(\mathrm{DB})^n}{(\mathrm{CA})^{n+1}} - \sum_{n=1}^{n} \mathrm{P}_n(\gamma_1)\cdot\frac{(\mathrm{CB})^n}{(\mathrm{CA})^{n+1}}\right]$$

$$- m_2 m_3 \sum_{n=1}^{n} \mathrm{P}_n(\gamma_2)\cdot\frac{(\mathrm{CD})^n}{(\mathrm{DB})^{n+1}}.$$

Mais, dans les deux cas, le premier de ces deux termes restants est négligeable; on peut, en effet, l'écrire:

$$1^{\text{er}}\ \text{cas}: \quad m_1 m_2 \sum_{n=1}^{n} (\mathrm{CA})^n \cdot \left[\frac{\mathrm{P}_n(\gamma)}{(\mathrm{DB})^{n+1}} - \frac{\mathrm{P}_n(\gamma_1)}{(\mathrm{CB})^{n+1}}\right].$$

$$2^{\text{e}}\ \text{cas}: \quad m_1 m_2 \sum_{n=1}^{n} \left[\frac{\mathrm{P}_n(\gamma)\cdot(\mathrm{DB})^n - \mathrm{P}_n(\gamma_1)\cdot(\mathrm{CB})^n}{(\mathrm{CA})^{n+1}}\right];$$

la sommation étant de l'ordre de m_1, le terme est du troisième ordre $(m_1^2 m_2)$.

Il ne reste donc à considérer que la dernière partie de Π_3, laquelle s'écrit, dans les deux cas:

$$- m_2 m_3 \sum_{n=1}^{n} \mathrm{P}_n(\gamma_2)\cdot\frac{(\mathrm{CD})^n}{(\mathrm{DB})^{n+1}}.$$

Mais $\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{DB}}$ est de l'ordre de m_1; le deuxième terme du développement ci-dessus, soit:

$$- m_2 m_3 \left[\mathrm{P}_2 (\gamma_2) \cdot \frac{(\mathrm{CD})^2}{(\mathrm{DB})^3} \right] ,$$

est ainsi de l'ordre de $m_1^2 m_2$; il est donc négligeable, et il en est de même des termes suivants. Il reste donc uniquement le premier terme du développement:

$$- m_2 m_3 \cdot \mathrm{P}_1 (\gamma_2) \cdot \frac{(\mathrm{CD})}{(\mathrm{DB})^2} .$$

Or, quelles que soient les planètes, on a:

$$\overline{\mathrm{CD}} = k \overline{\mathrm{CA}} , \qquad \text{où} \qquad k = \frac{m_1}{m_1 + m_3} ;$$

$\overline{\mathrm{CD}}$ est donc très petit; le terme restant devient:

$$- m_2 m_3 \left(\frac{m_1}{m_1 + m_3} \right) \cdot \mathrm{P}_1 (\gamma_2) \cdot \frac{(\mathrm{CA})}{(\mathrm{DB})^2} ;$$

comme le facteur $m_2 m_3 \left(\frac{m_1}{m_1 + m_3} \right)$ est égal à $m_1 m_2$ à des termes du troisième ordre près, on peut écrire:

$$- m_1 m_2 \cdot \mathrm{P}_1 (\gamma_2) \cdot \frac{(\mathrm{CA})}{(\mathrm{DB})^2} .$$

Ainsi, la fonction perturbatrice vaut:

$$\mathrm{H}_3 = (\text{partie principale}) - m_1 m_2 \cdot \mathrm{P}_1 (\gamma_2) \cdot \frac{(\mathrm{CA})}{(\mathrm{DB})^2} ; \qquad (19)$$

et la partie complémentaire s'écrit, aux termes du troisième ordre près:

$$-\frac{m_1 m_2}{(\mathrm{DB})^3} \cdot \mathrm{P}_1(\gamma_2) \cdot \overline{\mathrm{CA}} \cdot \overline{\mathrm{DB}} \,. \tag{20}$$

Il est d'ailleurs facile de trouver la valeur de $\mathrm{P}_1(\gamma)$, qui est $\cos\gamma$.

On se rappelle en effet que $\mathrm{P}_1(\gamma)$ est le coefficient du terme en $\left(\frac{\mathrm{DB}}{\mathrm{CA}}\right)$ dans le développement de:

$$\left(1 - \frac{\mathrm{DB}}{\mathrm{CA}} \cdot e^{i\gamma}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(1 - \frac{\mathrm{DB}}{\mathrm{CA}} \cdot e^{-i\gamma}\right)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \left[1 - \frac{\mathrm{DB}}{\mathrm{CA}}(e^{i\gamma} + e^{-i\gamma}) + \left(\frac{\mathrm{DB}}{\mathrm{CA}}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{\mathrm{DB}}{\mathrm{CA}} \cos\gamma + \dots\,;$$

on a donc bien:

$$\mathrm{P}_1(\gamma) = \cos\gamma \,.$$

Il ne faut pas oublier que, dans l'expression (20), il s'agit de l'angle γ_2 supplément de γ; la quantité (20) devient alors:

$$-\frac{m_1 m_2}{(\mathrm{DB})^3} \cdot \cos\gamma_2 \cdot \overline{\mathrm{CA}} \cdot \overline{\mathrm{DB}} = \frac{m_1 m_2}{(\mathrm{DB})^3} \cdot \cos\gamma \cdot \overline{\mathrm{CA}} \cdot \overline{\mathrm{DB}} \,. \tag{20}$$

Mais on a encore:

$$\overline{\mathrm{AB}}^2 = \overline{\mathrm{DB}}^2 + \overline{\mathrm{DA}}^2 - 2\overline{\mathrm{DA}} \cdot \overline{\mathrm{DB}} \cdot \cos\gamma \,,$$

d'où:

$$\cos\gamma = \frac{\overline{\mathrm{DB}}^2 + \overline{\mathrm{DA}}^2 - \overline{\mathrm{AB}}^2}{2\overline{\mathrm{DA}} \cdot \overline{\mathrm{DB}}} \,,$$

et:

$$\cos\gamma \cdot \overline{\mathrm{CA}} \cdot \overline{\mathrm{DB}} = \frac{\overline{\mathrm{DB}}^2 + \overline{\mathrm{DA}}^2 - \overline{\mathrm{AB}}^2}{2\overline{\mathrm{DA}}} \cdot \overline{\mathrm{CA}} \,.$$

D'ailleurs, on connaît les expressions suivantes:

$$\left\{\begin{aligned} \overline{DB}^2 &= \overline{GB'}^2 = x_2'^2 + y_2'^2 + z_2'^2 \ ; \\ \overline{DA}^2 &= \left[\frac{m_3}{m_1+m_3}\cdot\overline{CA}\right]^2 = \left(\frac{m_3}{m_1+m_3}\right)^2\cdot(x_1'^2+y_1'^2+z_1'^2) \ ; \end{aligned}\right.$$

$$\overline{AB}^2 = (x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2 \ ;$$

$$\left\{\begin{aligned} x_2 - x_1 &= (x_2-x_3)-(x_1-x_3) = x_2' + \frac{m_1 x_1'}{m_1+m_3} - x_1' \ ; \\ x_2 - x_1 &= x_2' - \frac{m_3 x_1'}{m_1+m_3} \ ; \\ y_2 - y_1 &= y_2' - \frac{m_3 y_1'}{m_1+m_3} \ , \\ z_2 - z_1 &= z_2' - \frac{m_3 z_1'}{m_1+m_3} \ ; \end{aligned}\right.$$

$$\overline{AB}^2 = \left[x_2' - \frac{m_3 x_1'}{m_1+m_3}\right]^2 + \left[y_2' - \frac{m_3 y_1'}{m_1+m_3}\right]^2 + \left[z_2' - \frac{m_3 z_1'}{m_1+m_3}\right]^2.$$

Il vient donc:

$$\frac{\cos\gamma\,.\,\overline{CA}\,.\,\overline{DB}}{\overline{CA}} =$$

$$\frac{(x_2'^2+y_2'^2+z_2'^2)+\left(\frac{m_3}{m_1+m_3}\right)^2(x_1'^2+y_1'^2+z_1'^2)-\left[x_2'-\frac{m_3x_1'}{m_1+m_3}\right]^2-\left[y_2'-\frac{m_3y_1'}{m_1+m_3}\right]^2-\left[z_2'-\frac{m_3z_1'}{m_3+m_3}\right]^2}{2\left(\frac{m_3}{m_1+m_3}\right)\sqrt{x_1'^2+y_1'^2+z_1'^2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{m_1+m_3}{m_3}\right)\frac{x_2'^2+y_2'^2+z_2'^2}{\sqrt{x_1'^2+y_1'^2+z_1'^2}} + \frac{1}{2}\,\frac{m_3}{m_1+m_3}\,.\sqrt{x_1'^2+y_1'^2+z_1'^2} -$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{m_1+m_3}{m_3}\right)\frac{\left[x_2'-\frac{m_3x_1'}{m_1+m_3}\right]^2+\left[y_2'-\frac{m_3y_1'}{m_1+m_3}\right]^2+\left[z_2'-\frac{m_3z_1'}{m_1+m_3}\right]^2}{\sqrt{x_1'^2+y_1'^2+z_1'^2}}$$

$$= \frac{x_1'x_2'+y_1'y_2'+z_1'z_2'}{\sqrt{x_1'^2+y_1'^2+z_1'^2}} = \frac{x_1'x_2'+y_1'y_2'+z_1'z_2'}{\overline{CA}} \ ;$$

d'où:

$$\cos \gamma . \overline{CA} . \overline{DB} = x_1' x_2' + y_1' y_2' + z_1' z_2' \,;$$

$$\text{terme complémentaire} = \frac{m_1 m_2}{(DB)^3} . (x_1' x_2' + y_1' y_2' + z_1' z_2') \,.$$

La fonction perturbatrice est ainsi connue, aux termes du troisième ordre près; son expression, dans les deux cas considérés, est la suivante:

$$I_3 = m_1 m_2 \left[\frac{1}{\sqrt{x_2'^2 + y_2'^2 + z_2'^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2 + (z_2' - z_1')^2}} + \frac{x_1' x_2' + y_1' y_2' + z_1' z_2'}{(x_2'^2 + y_2'^2 + z_2'^2)^{3/2}} \right] .$$