Zeitschrift: Archives des sciences physiques et naturelles

Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève

Band: 27 (1945)

Artikel: Sur la mécanique ondulatoire des corpuscules élémentaires [suite]

Autor: Kwal, Bernard

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-742479

SUR LA MÉCANIQUE ONDULATOIRE DES CORPUSCULES ÉLÉMENTAIRES

PAR

Bernard KWAL[1]

(suite)

TROISIÈME PARTIE

Résumé.

Cette troisième partie de notre travail comporte deux chapitres. Le premier est consacré à l'étude de la variance et de la polyvariance des équations d'onde de la mécanique uni- et multiondulatoire. On y démontre en premier lieu, grâce à l'emploi de l'algorithme matriciel, le théorème fondamental de la mécanique ondulatoire relativiste, et qui s'énonce de la manière suivante:

« Les équations d'onde primaires du corpuscule de spin ½ s'obtiennent en remplaçant les composantes p_k et $\frac{W}{c}$ du quadrivecteur quantité de mouvement-énergie par les opérateurs $-\frac{h}{i}\partial_k$ et $\frac{h}{i}\partial_t$ dans la formule $P\tilde{\Psi}^* = m_0 c \Psi$, représentant la transformation de Lorentz, exprimée au moyen des demivecteurs, et relative au passage d'un des referentiels possibles au referentiel propre du corpuscule observé. » L'algorithme spinoriel est employé plus spécialement pour écrire les équa-

[1] Mémoire rédigé dans le Stalag II A allemand et transmis par la Croix Rouge Internationale, service de secours intellectuel.

tions secondaires. On montre à cette occasion que les équations composées de degrés supérieurs jouissent de la propriété de polyvariance, c'est-à-dire qu'elles se laissent écrire en faisant appel aux êtres géométriques à variance relativiste différente. Ainsi, par exemple, les équations composées du septième degré du corpuscule de spin $\frac{1}{2}$, qui sont équivalentes aux équations de Whittaker, peuvent-elles s'écrire, soit au moyen des huit spineurs de premier rang, soit au moyen des quatre spineurs de second rang (auxquels, comme l'on sait, on peut faire correspondre des tenseurs complexes de l'espace-temps), soit enfin au moyen de deux spineurs de quatrième rang.

Les équations de la mécanique multiondulatoire sont traitées ensuite. On écrit, en notation spinorielle, les équations mixtes et mixtes composées du corpuscule biondulatoire de spin 1 et de spin $^3/_2$, ainsi que celles du corpuscule triondulatoire de spin $^3/_2$.

Le deuxième chapitre de ce travail fournit quelques indications sur la théorie des ondes planes en mécanique uni- et multiondulatoire. On montre que la solution « onde plane à énergie positive » des équations composées de premier degré (pour $j = \frac{1}{2}$) ou des équations mixtes composées de premier degré (pour $j \geqslant 1$), s'obtient en adjoignant à une solution « onde plane complète » des équations primaires (pour $j = \frac{1}{2}$) ou des équations secondaires mixtes (pour $j \geqslant 1$) respectivement, une solution d'un second système d'équations identique au premier, solution caractérisée par la même amplitude, mais déphasée de $\frac{\pi}{2}$ par rapport à la première.

4. Variance et polyvariance relativiste des équations d'onde.

4.1. *L'équation primaire du corpuscule de spin $\frac{1}{2}$ et le théorème fondamental de la mécanique ondulatoire relativiste.*

Deux voies s'offrent à nous pour poursuivre l'étude de la variance relativiste des équations d'onde des corpuscules élémentaires. L'une est celle de l'algorithme matriciel, l'autre est celle des spineurs. Commençons par la première: elle conduit, en effet, à formuler un théorème important, qui semble devoir être érigé en théorème fondamental de la mécanique ondulatoire relativiste.

Rappelons donc quelques définitions du calcul matriciel, dans le but surtout d'en fixer l'écriture. Soit Ψ une matrice à une colonne et à deux lignes. Nous poserons:

$$\psi = \begin{vmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{vmatrix}, \quad \tilde{\psi} = \begin{vmatrix} -\psi_2 \\ \psi_1 \end{vmatrix}, \quad \psi^{-1} = \begin{vmatrix} -\psi_2, & \psi_1 \end{vmatrix}. \tag{4.1 a}$$

Dans le cas des matrices à deux lignes et à deux colonnes nous écrirons de même:

$$\left.\begin{aligned} A &= \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{vmatrix} \qquad \tilde{A} = \begin{vmatrix} a_{22}, & -a_{21} \\ -a_{12}, & a_{11} \end{vmatrix} \\ A^{-1} &= \frac{1}{a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}} \begin{vmatrix} a_{22}, & -a_{12} \\ -a_{21}, & a_{11} \end{vmatrix} \end{aligned}\right\} \tag{4.1 b}$$

Rapportons-nous maintenant à ce que nous avons écrit au § 1 au sujet de la représentation des matrices de rang multiple de deux par des matrices planes, et convenons de représenter la multiplication extérieure de matrices de la manière que voici:

$$A \times B = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} = \tag{4.1 c}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}, & a_{12} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} \\ a_{21} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}, & a_{22} \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{vmatrix} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}\,b_{11}, & a_{11}\,b_{12}, & a_{12}\,b_{11}, & a_{12}\,b_{12} \\ a_{11}\,b_{21}, & a_{11}\,b_{22}, & a_{12}\,b_{21}, & a_{12}\,b_{22} \\ a_{21}\,b_{11}, & a_{21}\,b_{12}, & a_{22}\,b_{11}, & a_{22}\,b_{12} \\ a_{21}\,b_{21}, & a_{21}\,b_{22}, & a_{22}\,b_{21}, & a_{22}\,b_{22} \end{vmatrix}$$

Conformément à cette convention, on aura

$$\tilde{\varphi}^* \times \psi = \begin{vmatrix} -\varphi_2^* \psi_1 \\ -\varphi_2^* \psi_2 \\ \varphi_1 \psi_1 \\ \varphi_1 \psi_2 \end{vmatrix} . \tag{4.1 d}$$

Cela étant, les équations primaires du corpuscule de spin $1/2$ revêtent la forme matricielle suivante:

$$\Delta\psi = i\varkappa\tilde{\psi}^* , \qquad \varkappa = \frac{m_0 c}{h} \tag{4.1 e}$$

avec

$$\Delta = \underset{+}{\Delta} = \begin{vmatrix} \partial_t - \partial_3 , & \partial_1 + i\partial_2 \\ \partial_1 - i\partial_2 , & \partial_t + \partial_3 \end{vmatrix} , \quad \underset{-}{\Delta} = \begin{vmatrix} \partial_t + \partial_3 , & -(\partial_1 + i\partial_2) \\ -(\partial_1 - i\partial_2) , & \partial_t - \partial_3 \end{vmatrix} \tag{4.1 f}$$

$$\underset{+}{\Delta}\underset{-}{\Delta} = \begin{vmatrix} \square & \bigcirc \\ \bigcirc & \square \end{vmatrix} \qquad \square = \partial_t^2 - \partial_3^2 - \partial_2^2 - \partial_1^2 . \tag{4.1g}$$

La variance relativiste de l'équation (e2) s'exprime par les relations suivantes, commandées par le groupe demi-vectoriel:

$$\psi = \Lambda\psi' , \qquad \lambda_{11}\lambda_{22} - \lambda_{12}\lambda_{21} = 1 \tag{4.1 h}$$

$$\underset{+}{\Delta} = \tilde{\Lambda}^* \underset{+}{\Delta'} \Lambda^{-1} , \qquad \underline{\Delta} = \Lambda\,\underline{\Delta'}\,\Lambda^{*-1} . \tag{4.1 i}$$

Nous voyons que $\underset{+}{\Delta}$ se transforme comme le produit extérieur $\tilde{\psi}^* \times \psi^{-1}$ et $\underline{\Delta}$ comme $\tilde{\psi} \times \psi^{*-1}$

$$\tilde{\psi}^* \times \psi^{-1} = \begin{vmatrix} \psi_2^* \psi_2 , & -\psi_2^* \psi_1 \\ -\psi_1^* \psi_2 , & \psi_1^* \psi_1 \end{vmatrix} , \qquad \psi \times \tilde{\psi}^{*-1} = - \begin{vmatrix} \psi_1 \psi_1 , & \psi_1 \psi_2 \\ \psi_2 \psi_1 , & \psi_2 \psi_2 \end{vmatrix} . \tag{4.1 j}$$

Soit un quadrivecteur V, des composantes V_1, V_2, V_3 et V_4, nous lui ferons correspondre la matrice

$$V = \begin{vmatrix} V_4 - V_3 , & V_1 + iV_2 \\ V_1 - iV_2 , & V_4 + V_3 \end{vmatrix} , \tag{4.1 k}$$

et nous assignerons à V la variance relativiste de $\psi \times \tilde{\psi}^{*-1}$, c'est-à-dire la même que celle de $\underline{\Delta}$. Nous aurons ainsi:

$$V = \Lambda V' \tilde{\Lambda}^{*-1} \qquad (4.1\, l)$$

$$\Lambda V' = V \tilde{\Lambda}^{*} \qquad (4.1\, l')$$

$$\tilde{\Lambda}^{*} V'^{-1} = V^{-1} \Lambda \; . \qquad (4.1\, l'')$$

Prenons pour V le quadrivecteur quantité de mouvement-énergie $P\left(p_1, p_2, p_3, \frac{W}{c}\right)$. Dans ce cas

$$P^{-1} = \frac{1}{m_0^2 c^2} \begin{vmatrix} \frac{W}{c} + p_3 & -(p_1 + i p_2) \\ -(p_1 - i p_2) & \frac{W}{c} - p_3 \end{vmatrix} \; . \qquad (4.1\, m)$$

A la place de la transformation *générale* de Lorentz exprimée par (l), considérons la transformation *spéciale* de Lorentz, relative au passage d'un des reférentiels possibles au reférentiel propre du corpuscule observé. Pour la réaliser, nous devons remplacer dans (l) la matrice de transformation Λ, à deux lignes et à deux colonnes, par une matrice ψ à deux lignes et à une colonne

$$V = P \; , \quad V' = (0, 0, 0, m_0 c) \; , \quad V'^{-1} = \left(0, 0, 0, \frac{1}{m_0 c}\right) \qquad (4.1 n)$$

$$P \tilde{\psi}^{*} = m_0 c \psi \; , \qquad P^{-1} \psi = \frac{1}{m_0 c} \tilde{\psi}^{*} \; . \qquad (4.1\, o)$$

Comme $\psi^{-1} \psi = 0$, il en résulte que

$$\psi^{-1} P \tilde{\psi}^{*} = 0 \; . \qquad (4.1 p)$$

On vérifie que l'expression matricielle, qui figure dans le membre à gauche de l'équation ci-dessus, est équivalente au produit scalaire dans l'espace-temps de deux quadrivecteurs $\vec{P}$ et $\overrightarrow{\psi^{-1} \times \tilde{\psi}^{*}}$, qui, donc, y sont orthogonaux.

En remplaçant dans (o) les composantes p_k par $-\frac{h}{i}\partial_k$ et $\frac{W}{c}$ par $\frac{h}{i}\partial_t$, on obtient les équations primaires du corpuscule de spin ½ et de la relation, qui exprime l'orthogonalité

$$\vec{P} \cdot [\overrightarrow{\psi^{-1} \times \vec{\tilde{\psi}}^*}] = 0 \ , \qquad (4.1p')$$

l'équation de continuité.

Nous arrivons ainsi au théorème annoncé: « *Les équations d'onde primaires du corpuscule de spin ½ s'obtiennent en remplaçant les composantes p_k et $\frac{W}{c}$ du quadrivecteur quantité de mouvement-énergie, dans la formule* $P\tilde{\psi}^* = m_0 c \psi$, *représentant la transformation spéciale de Lorentz, exprimée au moyen des demi-vecteurs, et relative au passage d'un des referentiels possibles au referentiel propre du corpuscule observé* [1]. »

Ce théorème nous paraît avoir une signification plus profonde que celle d'une règle formelle. Toute mesure physique qui porte sur un objet mobile fait intervenir la transformation de Lorentz qui relie le referentiel de l'observateur au referentiel propre de l'objet observé. En théorie quantique l'objet observable est distribué sur l'ensemble de referentiels propres, dans chacun duquel il a une certaine chance de se trouver au moment de la mesure. La théorie relativiste quantifiée nous fournit le moyen de calculer cette distribution, c'est-à-dire de déterminer la collection de referentiels propres et les poids statistiques correspondants.

4.2. *Les équations primaires et secondaires du corpuscule uniondulatoire de spin supérieur à ½.*

La légitimité relativiste des équations primaires du corpuscule de spin $>$ ½ *sans masse* s'établit aisément. Prenons, pour

[1] Cf. le mémoire de l'auteur « Sur la description spatio-temporelle des phénomènes quantiques », paru il y a quelques années dans le *Journal de Physique*, 1937, 8, p. 81. Le même théorème y est démontré pour l'équation de Dirac, grâce à l'emploi des quaternions.

commencer, les équations du corpuscule de spin 1. Le premier système s'écrit:

$$[1 \times \underset{+}{\Delta}]\psi = \quad , \qquad [\underset{+}{\Delta} \times 1]\psi = 0 \ . \tag{4.2 a}$$

Nous poserons:

$$\psi = [\Lambda \times \Lambda]\psi' \ . \tag{4.2 b}$$

Dans le cas du second système:

$$[1 \times \underset{+}{\Delta}]\varphi = 0 \ , \qquad [\underset{-}{\Delta} \times 1]\varphi = 0 \ , \tag{4.2 c}$$

nous poserons

$$\varphi = [\tilde{\Lambda}^* \times \Lambda]\varphi' \ . \tag{4.2 d}$$

Passons au cas général du spin j. Chacun des 2^{2j-1} systèmes d'équations demande une autre variance pour la fonction d'onde. Ainsi dans le cas du premier système

$$[1 \times 1 \times \ldots \times \Delta]\psi = 0 \ , \quad [1 \times 1 \times \ldots \times \Delta \times 1]\psi = 0 \ , \quad \ldots [\Delta \times 1 \times \ldots \times 1]\psi = 0 \tag{4.2 e}$$

satisfait-on au groupe de Lorentz en posant

$$\psi = [\Lambda \times \Lambda \times \ldots \times \Lambda \times \Lambda]\psi' = \left[\prod_1^{2j} \Lambda\right]\psi' \ . \tag{4.2 f}$$

Dans le cas du second système:

$$[1 \times 1 \times \ldots \times \Delta]\psi = 0 \ , \quad [1 \times 1 \times \ldots \times \Delta \times 1]\psi = 0 \ , \quad \ldots [\underset{-}{\Delta} \times 1 \times \ldots \times 1]\psi = 0 \tag{4.2 g}$$

on posera

$$\psi = [\tilde{\Lambda}^* \times \Lambda \times \ldots \times \Lambda \times \Lambda]\psi' \ . \tag{4.2 h}$$

La loi de formation de la formule de transformation, à laquelle obéit la fonction ψ dans les autres systèmes, est évidente.

Des grosses difficultés surgissent lorsqu'on essaye de soumettre à la réglementation relativiste les équations primaires pourvues de termes de masse, ainsi que les équations secondaires, non mixtes.

Nous allons ici laisser de côté l'étude de ces difficultés, étant donné d'ailleurs qu'elles ne correspondent guère à une réalité physique.

Les équations mixtes se plient par contre aisément à la formulation relativiste.

Plaçons-nous dans le cas du spin 1. Nous avons:

$$\left.\begin{array}{ll} [1 \times \underset{+}{\Delta}]\psi = \varkappa[\sigma \times \sigma]\varphi^* , & [\underset{+}{\Delta} \times 1]\psi = i\varkappa[1 \times 1]\varphi \\ [1 \times \underset{+}{\Delta}]\varphi = -\varkappa[\sigma \times \sigma]\psi^* , & [\underset{-}{\Delta} \times 1]\varphi = i\varkappa[1 \times 1]\psi \end{array}\right\} \quad (4.2i)$$

La légitimité relativiste de ces équations résulte de leur compatibilité avec les formules de transformation suivantes:

$$\psi = [\Lambda \times \Lambda]\psi' , \quad \varphi = [\tilde{\Lambda}^* \times \Lambda]\varphi' . \qquad (4.2j)$$

Quant au cas général du spin j, nous nous contenterons de le traiter un peu plus loin, lorsque nous étudierons l'emploi de l'algorithme spinoriel.

4.3. *Emploi de l'algorithme spinoriel. Equations secondaires composées et leur polyvariance.*

Les équations primaires du corpuscule de spin ½ s'écrivent:

$$\mathcal{D}^{\dot\beta\alpha}\psi_\alpha = \varkappa\psi^{\dot\beta} . \qquad (4.3a)$$

Les équations composées de degré 1, ou équations de Dirac, s'obtiennent en considérant le double système suivant:

$$\mathcal{D}^{\dot\beta\alpha}\,{}^{(1)}\psi_\alpha = \varkappa\,{}^{(1)}\psi^{\dot\beta} \qquad \mathcal{D}^{\dot\beta\alpha}\,{}^{(2)}\psi_\alpha = \varkappa\,{}^{(2)}\psi^{\dot\beta} \qquad (4.3b)$$

ou, en posant

$$\psi = {}^{(1)}\psi + i\,{}^{(2)}\psi , \quad \varphi = {}^{(1)}\psi - i\,{}^{(2)}\psi , \qquad (4.3c)$$

le système que voici:

$$\mathcal{D}^{\dot\beta\alpha}\psi_\alpha = \varkappa\varphi^{\dot\beta} , \quad \mathcal{D}^{\dot\beta\alpha}\varphi_\alpha = \varkappa\psi^{\dot\beta} . \qquad (4.3d)$$

Considérons de même les équations composées du troisième degré, c'est-à-dire l'ensemble de quatre systèmes primaires, et appliquons leur le procédé ci-dessus, ce qui donne

$$\left.\begin{array}{ll} \mathcal{D}^{\dot\beta\alpha}\,{}^{(1)}\psi_\alpha = \varkappa\,{}^{(1)}\varphi^{\dot\beta} & \mathcal{D}^{\dot\beta\alpha}\,{}^{(2)}\psi_\alpha = \varkappa\,{}^{(2)}\varphi^{\dot\beta} \\ \mathcal{D}^{\dot\beta\alpha}\,{}^{(1)}\varphi_\alpha = \varkappa\,{}^{(1)}\psi^{\dot\beta} & \mathcal{D}^{\dot\beta\alpha}\,{}^{(2)}\varphi_\alpha = \varkappa\,{}^{(2)}\psi^{\dot\alpha} \end{array}\right\} \qquad (4.3\,e)$$

On ne change rien à la nature de ces équations, exception faite du point de vue relativiste, si l'on remplace le couple de spineurs ${}^{(1)}\psi_\alpha$ et ${}^{(2)}\psi_\alpha$ d'une part, et le couple ${}^{(1)}\varphi^{\dot\beta_1}$ et ${}^{(2)}\varphi^{\dot\beta_2}$ d'autre part, par des spineurs de second rang, $\psi_{\alpha_1\alpha_2}$ et $\varphi^{\dot\beta_1}{}_{\alpha_2}$, respectivement, ce qui conduit à écrire les équations ($4.3e$) de la manière que voici:

$$\mathcal{D}^{\dot\beta_1\alpha_1}\,\psi_{\alpha_1\alpha_2} = \varkappa\,\varphi^{\dot\beta_1}{}_{\alpha_2}\,, \qquad \mathcal{D}^{\dot\beta_1\alpha_1}\,\varphi_{\alpha_1}{}^{\dot\beta_2} = \varkappa\,\psi^{\dot\beta_1\dot\beta_2}\,. \qquad (4.3\,f)$$

Nous dirons que les équations jouissent de la propriété de *polyvariance* si elles se laissent écrire avec des êtres géométriques à variance relativiste différente. Les équations ($4.3f$), lorsqu'on y sépare les grandeurs réelles des grandeurs imaginaires sont équivalentes aux équations de Whittaker où figurent les grandeurs tensorielles réelles (deux vecteurs, un tenseur antisymétrique gauche, un scalaire et un pseudo-scalaire). En prenant un double système ($4.3f$), c'est-à-dire un quadruple système ($4.3\,d$) ou octuple système ($4.3\,a$), on obtient les équations composées du septième degré, équivalentes aux équations de Whittaker entre les grandeurs tensorielles complexes (les mêmes que celles énumérées précédemment, mais complexes). La polyvariance dont jouissent ces équations se traduit par le fait qu'elles peuvent s'écrire soit au moyen de huit spineurs de premier rang, soit au moyen de quatre spineurs de deuxième rang, soit enfin au moyen de deux spineurs de quatrième rang.

Passons maintenant aux équations mixtes. Les équations primaires du corpuscule sans masse de spin 1 sont:

1er système: $\quad \mathcal{D}^{\dot\beta_1\alpha_1}\,\psi_{\alpha_1\alpha_2} = 0 \qquad \mathcal{D}^{\dot\beta_2\alpha_2}\,\psi_{\alpha_1\alpha_2} = 0 \qquad (4.3g')$

2e système: $\quad \mathcal{D}^{\dot\beta_1\alpha_1}\,\psi_{\alpha_1}{}^{\dot\beta_2} = 0 \qquad \mathcal{D}_{\alpha_2\dot\beta_2}\,\varphi_{\alpha_1}{}^{\dot\beta_2} = 0 \qquad (4.3g'')$

Les équations mixtes s'obtiennent en interconnectant lse deux systèmes par le terme de masse:

1er système:
$$\left\{\begin{aligned}
&(A)\quad \mathcal{D}^{\beta_1\alpha_1}\psi_{\alpha_1\alpha_2} = \varkappa\varphi^{\dot\beta_1}{}_{\alpha_2}, &&(B)\quad \mathcal{D}^{\dot\beta_2\alpha_2}\psi_{\alpha_1\alpha_2} = \varkappa\varphi_{\alpha_1}{}^{\dot\beta_2}\\
&(A)\quad \mathcal{D}^{\dot\beta_1\alpha_1}\varphi_{\alpha_1}{}^{\dot\beta_2} = \varkappa\psi^{\dot\beta_1\dot\beta_2}, &&(B)\quad \mathcal{D}_{\alpha_2\dot\beta_2}\varphi_{\alpha_1}{}^{\dot\beta_2} = -\varkappa\psi_{\alpha_1\alpha_2}
\end{aligned}\right. \qquad (4.3\,h')$$

2e système:
$$\left\{\begin{aligned}
&(B)\quad \mathcal{D}^{\dot\beta_1\alpha_1}\psi_{\alpha_1\alpha_2} = \varkappa\varphi^{\dot\beta_1}{}_{\alpha_2}, &&(A)\quad \mathcal{D}^{\dot\beta_1\alpha_2}\psi_{\alpha_1\alpha_2} = \varkappa\varphi_{\alpha_1}{}^{\dot\beta_2}\\
&(B)\quad \mathcal{D}_{\alpha_1\dot\beta_1}\varphi^{\dot\beta_1}{}_{\alpha_2} = -\varkappa\psi_{\alpha_1\alpha_2}, &&(A)\quad \mathcal{D}^{\dot\beta_2\alpha_2}\varphi^{\dot\beta_1}{}_{\alpha_2} = \varkappa\psi^{\dot\beta_1\dot\beta_2}
\end{aligned}\right. \qquad (4.3\,h'')$$

Nous saisissons sur cet exemple comme la variance relativiste conditionne la formation des équations du type A et des équations du type B.

Ecrivons encore les équations secondaires mixtes relatives à $j = {}^3/_2$.

Premier système.

$$\left.\begin{aligned}
&(A)\quad \mathcal{D}^{\beta_1\alpha_1}\psi_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} = \varkappa\psi^{\dot\beta_1}{}_{\alpha_2\alpha_3}, &&(A)\quad \mathcal{D}^{\dot\beta_1\alpha_1}\psi_{\alpha_1}{}^{\dot\beta_2\dot\beta_3} = \varkappa\psi^{\dot\beta_1\dot\beta_2\dot\beta_3}\\
&(A)\quad \mathcal{D}^{\dot\beta_2\alpha_2}\psi_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} = \varkappa\psi_{\alpha_1}{}^{\dot\beta_2}{}_{\alpha_3}, &&(A)\quad \mathcal{D}_{\alpha_2\dot\beta_2}\psi_{\alpha_1}{}^{\dot\beta_2\dot\beta_3} = -\varkappa\psi_{\alpha_1\alpha_2}{}^{\dot\beta_3}\\
&(A)\quad \mathcal{D}^{\dot\beta_3\alpha_3}\psi_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} = \varkappa\psi_{\alpha_1\alpha_2}{}^{\dot\beta_3}, &&(A)\quad \mathcal{D}_{\alpha_3\dot\beta_3}\psi_{\alpha_1}{}^{\dot\beta_2\dot\beta_3} = -\varkappa\psi_{\alpha_1}{}^{\dot\beta_2}{}_{\alpha_3}\\
&(A)\quad \mathcal{D}_{\alpha_1\dot\beta_1}\psi^{\dot\beta_1}{}_{\alpha_2}{}^{\dot\beta_3} = -\varkappa\psi_{\alpha_1\alpha_2}{}^{\dot\beta_3}, &&(A)\quad \mathcal{D}_{\alpha_1\dot\beta_1}\psi^{\dot\beta_1\dot\beta_2}{}_{\alpha_3} = -\varkappa\psi_{\alpha_1}{}^{\dot\beta_2}{}_{\alpha_3}\\
&(A)\quad \mathcal{D}^{\dot\beta_2\alpha_2}\psi^{\dot\beta_1}{}_{\alpha_2}{}^{\dot\beta_3} = \varkappa\psi^{\dot\beta_1\dot\beta_2\dot\beta_3}, &&(A)\quad \mathcal{D}_{\alpha_2\dot\beta_2}\psi^{\dot\beta_1\dot\beta_2}{}_{\alpha_3} = -\varkappa\psi^{\dot\beta_1}{}_{\alpha_2\alpha_3}\\
&(A)\quad \mathcal{D}_{\alpha_3\dot\beta_3}\psi^{\dot\beta_3}{}_{\alpha_2}{}^{\dot\beta_3} = -\varkappa\psi^{\dot\beta_1}{}_{\alpha_2\alpha_3}, &&(A)\quad \mathcal{D}^{\dot\beta_3\alpha_3}\psi^{\dot\beta_1\dot\beta_2}{}_{\alpha_3} = \varkappa\psi^{\dot\beta_1\dot\beta_2\dot\beta_3}
\end{aligned}\right\} \quad (4.3\,i')$$

Deuxième système.

$$\left.\begin{aligned}
&(A)\quad \mathcal{D}^{\dot\beta_1\alpha_1}\psi_{\alpha_3\alpha_2\alpha_1} = \varkappa\psi_{\alpha_3\alpha_2}{}^{\dot\beta_1}, &&(A)\quad \mathcal{D}^{\dot\beta_1\alpha_1}\psi^{\dot\beta_3\dot\beta_2}{}_{\alpha_1} = \varkappa\psi^{\dot\beta_3\dot\beta_2\dot\beta_1}\\
&(B)\quad \mathcal{D}^{\dot\beta_2\alpha_2}\psi_{\alpha_3\alpha_2\alpha_1} = \varkappa\psi_{\alpha_3}{}^{\dot\beta_2}{}_{\alpha_1}, &&(B)\quad \mathcal{D}_{\alpha_2\dot\beta_2}\psi^{\dot\beta_3\dot\beta_2}{}_{\alpha_1} = \varkappa\psi^{\dot\beta_3}{}_{\alpha_2\alpha_1}\\
&(B)\quad \mathcal{D}^{\dot\beta_3\alpha_3}\psi_{\alpha_3\alpha_2\alpha_1} = \varkappa\psi^{\dot\beta_3}{}_{\alpha_2\alpha_1}, &&(B)\quad \mathcal{D}_{\alpha_3\dot\beta_3}\psi^{\dot\beta_3\dot\beta_2}{}_{\alpha_1} = -\varkappa\psi_{\alpha_3}{}^{\dot\beta_2}{}_{\alpha_1}\\
&(A)\quad \mathcal{D}^{\dot\beta_1\alpha_1}\psi_{\alpha_3}{}^{\dot\beta_2}{}_{\alpha_1} = \varkappa\psi_{\alpha_3}{}^{\dot\beta_2\dot\beta_1}, &&(A)\quad \mathcal{D}^{\dot\beta_1\alpha_1}\psi^{\dot\beta_3}{}_{\alpha_2\alpha_1} = \varkappa\psi^{\dot\beta_3}{}_{\alpha_2}{}^{\dot\beta_1}\\
&(B)\quad \mathcal{D}_{\alpha_2\dot\beta_2}\psi_{\alpha_3}{}^{\dot\beta_2}{}_{\alpha_1} = -\varkappa\psi_{\alpha_3\alpha_2\alpha_1}, &&(B)\quad \mathcal{D}^{\dot\beta_2\alpha_2}\psi^{\dot\beta_3}{}_{\alpha_2\alpha_1} = \varkappa\psi^{\dot\beta_3\dot\beta_2}{}_{\alpha_1}\\
&(B)\quad \mathcal{D}^{\dot\beta_3\alpha_3}\psi_{\alpha_3}{}^{\dot\beta_2}{}_{\alpha_1} = \varkappa\psi^{\dot\beta_3\dot\beta_2}{}_{\alpha_1}, &&(B)\quad \mathcal{D}_{\alpha_3\dot\beta_3}\psi^{\dot\beta_3}{}_{\alpha_2\alpha_1} = -\varkappa\psi_{\alpha_3\alpha_2\alpha_1}
\end{aligned}\right\} \quad (4.3\,i'')$$

Troisième système.

$$\left.\begin{array}{llll}
(\mathrm{B}) & \mathcal{D}^{\dot\beta_1\alpha_1}\,\psi_{\alpha_3\alpha_2\alpha_1} = \varkappa\,\psi_{\alpha_3\alpha_2}{}^{\dot\beta_1}\,, & (\mathrm{B}) & \mathcal{D}_{\alpha_1\dot\beta_1}\,\psi_{\alpha_3\alpha_2}{}^{\dot\beta_1} = -\,\varkappa\,\psi_{\alpha_3\alpha_2\alpha_1} \\
(\mathrm{A}) & \mathcal{D}^{\dot\beta_2\alpha_2}\,\psi_{\alpha_3\alpha_2\alpha_1} = \varkappa\,\psi_{\alpha_3}{}^{\dot\beta_2}{}_{\alpha_1}\,, & (\mathrm{A}) & \mathcal{D}^{\dot\beta_2\alpha_2}\,\psi_{\alpha_3\alpha_2}{}^{\dot\beta_1} = \varkappa\,\psi_{\alpha_3}{}^{\dot\beta_2\dot\beta_1} \\
(\mathrm{B}) & \mathcal{D}^{\dot\beta_3\alpha_3}\,\psi_{\alpha_3\alpha_2\alpha_1} = \varkappa\,\psi^{\dot\beta_3}{}_{\alpha_2\alpha_1}\,, & (\mathrm{B}) & \mathcal{D}^{\dot\beta_3\alpha_3}\,\psi_{\alpha_3\alpha_2}{}^{\dot\beta_1} = \varkappa\,\psi^{\dot\beta_3}{}_{\alpha_2}{}^{\dot\beta_1} \\
(\mathrm{B}) & \mathcal{D}_{\alpha_1\dot\beta_1}\,\psi^{\dot\beta_3}{}_{\alpha_2}{}^{\dot\beta_1} = -\,\varkappa\,\psi^{\dot\beta_3}{}_{\alpha_2\alpha_1}\,, & (\mathrm{B}) & \mathcal{D}^{\dot\beta_1\alpha_1}\,\psi^{\dot\beta_3}{}_{\alpha_2\alpha_1} = \varkappa\,\psi^{\dot\beta_3}{}_{\alpha_2}{}^{\dot\beta_1} \\
(\mathrm{A}) & \mathcal{D}^{\dot\beta_2\alpha_2}\,\psi^{\dot\beta_2}{}_{\alpha_2}{}^{\dot\beta_1} = \varkappa\,\psi^{\dot\beta_3\dot\beta_2\dot\beta_1}\,, & (\mathrm{A}) & \mathcal{D}^{\dot\beta_2\alpha_2}\,\psi^{\dot\beta_3}{}_{\alpha_2\alpha_1} = \varkappa\,\psi^{\dot\beta_3\dot\beta_2}{}_{\alpha_1} \\
(\mathrm{B}) & \mathcal{D}_{\alpha_1\dot\beta_1}\,\psi^{\dot\beta_3}{}_{\alpha_2}{}^{\dot\beta_1} = -\,\varkappa\,\psi^{\dot\beta_3}{}_{\alpha_2\alpha_1}\,, & (\mathrm{B}) & \mathcal{D}_{\alpha_3\dot\beta_3}\,\psi^{\dot\beta_3}{}_{\alpha_2\alpha_1} = -\,\varkappa\,\psi_{\alpha_3\alpha_2\alpha_1}
\end{array}\right\}\quad (4.3\,i''')$$

Quatrième système.

$$\left.\begin{array}{llll}
(\mathrm{B}) & \mathcal{D}^{\dot\beta_1\alpha_1}\,\psi_{\alpha_3\alpha_2\alpha_1} = \varkappa\,\psi_{\alpha_3\alpha_2}{}^{\dot\beta_1}\,, & (\mathrm{B}) & \mathcal{D}_{\alpha_1\dot\beta_1}\,\psi_{\alpha_3\alpha_2}{}^{\dot\beta_1} = -\,\varkappa\,\psi_{\alpha_3\alpha_2\alpha_1} \\
(\mathrm{B}) & \mathcal{D}^{\dot\beta_2\alpha_2}\,\psi_{\alpha_3\alpha_2\alpha_1} = \varkappa\,\psi_{\alpha_3}{}^{\dot\beta_2}{}_{\alpha_1}\,, & (\mathrm{B}) & \mathcal{D}^{\dot\beta_2\alpha_2}\,\psi_{\alpha_3\alpha_2}{}^{\dot\beta_1} = \varkappa\,\psi_{\alpha_3}{}^{\dot\beta_2\dot\beta_1} \\
(\mathrm{A}) & \mathcal{D}^{\dot\beta_3\alpha_3}\,\psi_{\alpha_3\alpha_2\alpha_1} = \varkappa\,\psi^{\dot\beta_3}{}_{\alpha_2\alpha_1}\,, & (\mathrm{A}) & \mathcal{D}^{\dot\beta_3\alpha_3}\,\psi_{\alpha_3\alpha_2}{}^{\dot\beta_1} = \varkappa\,\psi^{\dot\beta_3}{}_{\alpha_2}{}^{\dot\beta_1} \\
(\mathrm{B}) & \mathcal{D}^{\dot\beta_1\alpha_1}\,\psi_{\alpha_3}{}^{\dot\beta_2}{}_{\alpha_1} = \varkappa\,\psi_{\alpha_3}{}^{\dot\beta_2\dot\beta_1}\,, & (\mathrm{B}) & \mathcal{D}_{\alpha_1\dot\beta_1}\,\psi_{\alpha_3}{}^{\dot\beta_2\dot\beta_1} = -\,\varkappa\,\psi_{\alpha_3}{}^{\dot\beta_2}{}_{\alpha_1} \\
(\mathrm{B}) & \mathcal{D}_{\alpha_2\dot\beta_2}\,\psi_{\alpha_3}{}^{\dot\beta_2}{}_{\alpha_1} = -\,\varkappa\,\psi_{\alpha_3\alpha_2\alpha_1}\,, & (\mathrm{B}) & \mathcal{D}_{\alpha_2\dot\beta_2}\,\psi_{\alpha_3}{}^{\dot\beta_2\dot\beta_1} = -\,\varkappa\,\psi_{\alpha_3\alpha_2}{}^{\dot\beta_1} \\
(\mathrm{A}) & \mathcal{D}^{\dot\beta_3\alpha_3}\,\psi_{\alpha_3}{}^{\dot\beta_2}{}_{\alpha_1} = \varkappa\,\psi^{\dot\beta_3\dot\beta_2}{}_{\alpha_1}\,, & (\mathrm{A}) & \mathcal{D}^{\dot\beta_3\alpha_3}\,\psi_{\alpha_3}{}^{\dot\beta_2\dot\beta_1} = \varkappa\,\psi^{\dot\beta_3\dot\beta_2\dot\beta_1}
\end{array}\right\}\quad (4.3\,i^{\mathrm{IV}})$$

Dans le cas général de spin j, nous avons à distinguer le cas où $2j$ est impair du cas où $2j$ est pair. Dans le premier cas, chaque système comprend un nombre r de groupes du type A et $r' = 2j - r$ groupes du type B, r pouvant prendre les valeurs $1, 3, \ldots 2j-2$ et $2j$ et r' les valeurs $2j-1$, $2j-3, \ldots$ 2, 0. Dans le second cas, r et r' prennent les valeurs $1, 3 \ldots 2j-1$, $2j-3$ et $2j-1$, $2j-3 \ldots$, 3, 1, respectivement.

Classons les formes que prennent, du point de vue spinoriel, les fonctions d'onde relatives aux différentes déterminations du nombre r' (ce qui revient au même qu'avec celles du nombre r). Plaçons-nous dans le cas de $2j$ impair. Le nombre de systèmes admettant r' groupes du type B est égal à $C_{2j}^{2j-r'}$. Les systèmes à r' groupes du type B font intervenir comme fonctions d'ondes

2^{2j} spineurs de rang $2j$ qui peuvent être classés de la manière suivante:

1 spineur $\psi_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{2j}}$

r spineurs de la forme $\psi_{\alpha_1 \dots}{}^{\dot\beta_{l_{n_1}}}{}_{\dots \alpha_{2j}}$ et $2j - r$ de la forme

$$\psi^{\dot\beta_2 \dots}{}_{\alpha_{l_{m_1}}}{}^{\dots \dot\beta_{2j}}$$

$$\left(\text{avec } \sum_{n=0}^{n=r'-1} C_{2j}^{2j-n} + 1 \leqslant l \leqslant \sum_{n=0}^{n=r'} C_{2j}^{2j-n},\ l \text{ prenant } C_{2j}^{r'} \text{ valeurs}\right).$$

C_r^2 spineurs de la forme $\psi_{\alpha_1 \dots}{}^{\dot\beta_{l_{n_1}}}{}_{\dots}{}^{\dot\beta_{l_{n_2}}}{}_{\dots \alpha_{2j}}$

C_{2j-r}^2 spineurs de la forme $\psi_{\alpha_1 \dots}{}^{\dot\beta_{l_{m_1}}}{}_{\dots}{}^{\dot\beta_{l_{m_2}}}{}_{\dots \alpha_{2j}}$

(avec $n_i + m_i = 2j$)

$C_r^1\, C_{2j-r}^2$ spineurs de la forme $\psi^{\dot\beta_1 \dots}{}_{\alpha_{n_1}}{}^{\dots}{}_{\alpha_{l_{m_1}}}{}^{\dots \dot\beta_{2j}}$

C_r^3 spineurs de la forme $\psi_{\alpha_1 \dots}{}^{\dot\beta_{l_{n_1}}}{}_{\dots}{}^{\dot\beta_{l_{n_2}}}{}_{\dots}{}^{\dot\beta_{l_{n_3}}}{}_{\dots \alpha_{2j}}$

C_{2j-r}^3 » » » $\psi^{\dot\beta_1 \dots}{}_{\alpha_{l_{m_1}}}{}^{\dots}{}_{\alpha_{l_{m_2}}}{}^{\dots}{}_{\alpha_{l_{m_3}}}{}^{\dots \dot\beta_{2j}}$

$C_r^2\, C_{2j-n}^1$ » » » $\psi^{\dot\beta_1 \dots}{}_{\alpha_{l_{n_1}}}{}^{\dots}{}_{\alpha_{l_{n_2}}}{}^{\dots}{}_{\alpha_{l_{m_1}}}{}^{\dots \dot\beta_{2j}}$

$C_r^1\, C_{2j-r}^2$ » » » $\psi_{\alpha_1 \dots}{}^{\dot\beta_{l_{n_1}}}{}_{\dots}{}^{\dot\beta_{l_{m_1}}}{}_{\dots}{}^{\dot\beta_{l_{m_2}}}{}_{\dots \alpha_{2j}}$

. . . .

. . . .

C_r^s spineurs de la forme $\psi_{\alpha_1 \dots}{}^{\dot\beta_{l_{n_1}}}{}_{\dots}{}^{\dot\beta_{l_{n_s}}}{}_{\dots \alpha_{2j}}$

C_{2j-r}^s » » » $\psi_{\alpha_1 \dots}{}^{\dot\beta_{l_{m_1}}}{}_{\dots}{}^{\dot\beta_{l_{m_s}}}{}_{\dots \alpha_{2j}}$ si s est pair

ou $\psi^{\dot\beta_1 \dots}{}_{\alpha_{l_{m_1}}}{}^{\dots}{}_{\alpha_{l_{m_s}}}{}^{\dots \dot\beta_{2j}}$ si s est impair

$C_r^{s-t}\, C_{2j-n}^t$ spineurs de la forme $\psi^{\dot\beta_1 \dots}{}_{\alpha_{n_s}}{}^{\dots}{}_{\alpha_{n_{s-t}}}{}^{\dots}{}_{\alpha_{m_1}}{}^{\dots}{}_{\alpha_{m_t}}{}^{\dots \dot\beta_{2j}}$

si s étant quelconque t est impair

ou $\psi_{\alpha_1 \dots}{}^{\dot\beta_{n_s}}{}_{\dots}{}^{\dot\beta_{n_{s-t}}}{}_{\dots}{}^{\dot\beta_{l_{m_1}}}{}_{\dots}{}^{\dot\beta_{l_{m_t}}}{}_{\dots \alpha_{2j}}$

si t est impair

Notons la relation facile à vérifier

$$\sum_{t=0}^{s} C_r^{s-t} C_{2j-r}^{t} = C_{2j}^{s}$$

qui montre que dans la classification ci-dessus le nombre total de spineurs est bien égal à $\sum_{s=1}^{2j} C_{2j}^{s} = 2^{2j}$.

Un tableau analogue des fonctions spinorielles peut être dressé dans le cas où $2j$ est un nombre pair.

En partant de chaque système mixte, nous pouvons former une suite de systèmes composés. Les deux systèmes composés de premier degré pour $j = 1$ sont identiques et égaux aux équatins de L. de Broglie. Pour $j = 2$ on est conduit aux équations de M[me] Tonnelat.

4.4. *Etude des équations de la mécanique multiondulatoire.*

4.41. *Notation matricielle.*

Commençons par écrire les équations du corpuscule biondulatoire, de spin 1 et sans masse:

$$\text{Premier système} \left\{ \begin{aligned} \left({}^2\underset{+}{\Delta_1^1} - {}^1\underset{+}{\Delta_1^1}\right)[{}^2\psi \times {}^1\psi] &= 0 \\ \left({}^2\underset{+}{\Delta_1^2} - {}^1\underset{+}{\Delta_1^2}\right)[{}^2\psi \times {}^1\psi] &= 0 \end{aligned} \right. \qquad (4.41\,a')$$

$$\text{Deuxième système} \left\{ \begin{aligned} \left({}^2\underset{+}{\Delta_1^1} - {}^1\underset{+}{\Delta_1^1}\right)[{}^2\varphi \times {}^1\varphi] &= 0 \\ \left({}^2\underset{-}{\Delta_1^2} - {}^1\underset{-}{\Delta_1^1}\right)[{}^2\varphi \times {}^1\varphi] &= 0 \end{aligned} \right. \qquad (4.41\,a'')$$

Les ${}^k\psi$ et les ${}^k\varphi$ satisfont aux transformations de Lorentz suivantes:

$$\left. \begin{aligned} {}^2\psi &= \Lambda\ {}^2\psi' , \quad {}^1\psi = \Lambda\,{}^1\psi' \\ {}^2\varphi &= \tilde{\Lambda}^*\,{}^2\varphi' , \quad {}^1\varphi = \Lambda\,{}^1\varphi' \end{aligned} \right\} \qquad (4.41\,b)$$

Considérons maintenant le cas du corpuscule biondulatoire de spin j et de masse au repos nulle dont les équations ont été consignées dans le tableau (3.11 n).

Dans le cas du premier système nous poserons:

$$\overset{1}{_{c_1}\psi} = \left[\prod_1^{c_1} \Lambda\right] \overset{1}{_{c_1}\psi'} \;, \qquad \overset{2}{_{c_2}\psi} = \left[\prod_1^{c_2} \Lambda\right] \overset{2}{_{c_2}\psi'} \tag{4.41 c}$$

du deuxième système:

$$\overset{1}{_{c_1}\psi} = \left[\prod_1^{c_1} \Lambda\right] \overset{1}{_{c_1}\psi'} \;, \qquad \overset{2}{_{c_2}} = \left[\tilde{\Lambda}^* \times \prod_1^{c_2-1} \Lambda\right] \overset{2}{_{c_2}\psi'} \tag{4.41 d}$$

du troisième système:

$$\overset{1}{_{c_1}\psi} = \left[\prod_1^{c_1} \Lambda\right] \overset{1}{_{c_1}\psi'} \;, \qquad \overset{2}{_{c_2}\psi} = \left[\Lambda \times \tilde{\Lambda}^* \times \prod_1^{c_2-1} \Lambda\right] \overset{2}{_{c_2}\psi'} \tag{4.41 e}$$

. . . .

du $2j + 1^{\text{ième}}$ système

$$\overset{1}{_{c_1}\psi} = \tilde{\Lambda}^* \times \prod_1^{c_1-1} \overset{1}{_{c_1}\psi'} \;, \qquad \overset{2}{_{c_2}\psi} = \left[\prod_1^{c_2} \Lambda\right] \overset{2}{_{c_2}\psi'} \tag{4.41 f}$$

. . . .

du 2^{2j-1} système:

1° $2j$ est un nombre pair

a) $\qquad c_1 \geqslant c_2 \quad c_1 \geqslant j \quad c_2 \leqslant j$

$$\overset{1}{_{c_1}\psi} = \left[\prod_1^{c_1-j} \tilde{\Lambda}^* \times \prod_1^{j} \Lambda\right] \psi' \;, \qquad \overset{2}{_{c_2}\psi} = \left[\prod_1^{c_2} \tilde{\Lambda}^*\right] \overset{2}{_{c_2}\psi'} \tag{4.41 g'}$$

b) $\qquad c_1 \leqslant c_2 \quad c_1 \leqslant j \quad c_2 \geqslant j$

$$\overset{1}{_{c_1}\psi} = \left[\prod_1^{c_1} \tilde{\Lambda}^*\right] \psi' \;, \qquad \overset{2}{_{c_2}\psi} = \left[\prod_1^{j} \Lambda \times \prod_1^{c_2-j} \tilde{\Lambda}^*\right] \psi' \tag{4.41g''}$$

2° $2j$ est un nombre impair.

On remplacera j par $j - \frac{1}{2}$ dans les relations *a*) et *b*).

4.42. *Notation spinorielle.*

Equations mixtes du corpuscule bi-ondulatoire de spin 1.

Premier système.

$$\left.\begin{aligned}
(\mathcal{D}^{\dot\beta_1\alpha_1}\,{}^2\psi_{\alpha_2})\,{}^1\psi_{\alpha_1} - {}^2\psi_{\alpha_2}(\mathcal{D}^{\dot\beta_1\alpha_1}\,{}^1\psi_{\alpha_1}) &= \varkappa\,{}^2\psi_{\alpha_2}\,{}^1\psi^{\dot\beta} \\
(\mathcal{D}^{\dot\beta_1\alpha_1}\,{}^2\psi^{\dot\beta_2})\,{}^1\psi_{\alpha_1} - {}^2\psi^{\dot\beta_2}(\mathcal{D}^{\dot\beta_1\alpha_1}\,{}^1\psi_{\alpha_1}) &= \varkappa\,{}^2\psi^{\dot\beta_2}\,{}^1\psi^{\dot\beta_1} \\
(\mathcal{D}^{\dot\beta_2\alpha_2}\,{}^2\psi_{\alpha_2})\,{}^1\psi_{\alpha_1} - {}^2\psi_{\alpha_2}(\mathcal{D}^{\dot\beta_2\alpha_2}\,{}^1\psi_{\alpha^1}) &= \varkappa\,{}^2\psi^{\dot\beta_2}\,{}^1\psi_{\alpha_1} \\
(\mathcal{D}_{\alpha_2\dot\beta_2}\,{}^2\psi^{\dot\beta_2})\,{}^1\psi_{\alpha_1} - {}^2\psi^{\dot\beta_2}(\mathcal{D}_{\alpha_2\dot\beta_2}\,{}^1\psi_{\alpha_1}) &= -\varkappa\,{}^2\psi_{\alpha_2}\,{}^1\psi_{\alpha_1}
\end{aligned}\right\} \quad (4.42\,a')$$

Deuxième système.

$$\left.\begin{aligned}
(\mathcal{D}^{\dot\beta_1\alpha_1}\,{}^2\psi_{\alpha_2})\,{}^1\psi_{\alpha_1} - {}^2\psi_{\alpha_2}(\mathcal{D}^{\dot\beta_1\alpha_1}\,{}^1\psi_{\alpha_1}) &= \varkappa\,{}^2\psi_{\alpha_2}\,{}^1\psi^{\dot\beta_1} \\
(\mathcal{D}_{\alpha_1\dot\beta_1}\,{}^2\psi_{\alpha_2})\,{}^1\psi^{\dot\beta_1} - {}^2\psi_{\alpha_2}(\mathcal{D}_{\alpha_1\dot\beta_1}\,{}^1\psi^{\dot\beta_1}) &= -\varkappa\,{}^2\psi_{\alpha_2}\,{}^1\psi_{\alpha_1} \\
(\mathcal{D}^{\dot\beta_2\alpha_2}\,{}^2\psi_{\alpha_2})\,{}^1\psi_{\alpha_1} - {}^2\psi_{\alpha_2}(\mathcal{D}^{\dot\beta_2\alpha_2}\,{}^1\psi_{\alpha_1}) &= \varkappa\,{}^2\psi^{\dot\beta_2}\,{}^1\psi_{\alpha_1} \\
(\mathcal{D}^{\dot\beta_2\alpha_2}\,{}^2\psi_{\alpha_2})\,{}^1\psi^{\dot\beta_1} - {}^2\psi_{\alpha_2}(\mathcal{D}^{\dot\beta_2\alpha_2}\,{}^1\psi^{\dot\beta_1}) &= \varkappa\,{}^2\psi^{\dot\beta_2}\,{}^1\psi^{\dot\beta_1}
\end{aligned}\right\} \quad (4.42\,a'')$$

Afin de simplifier les écritures, nous envisagerons les opérateurs ${}^1\mathcal{D}$ qui agissent sur les fonctions ${}^1\psi$, ${}^2\mathcal{D}$ qui agissent sur les ${}^2\psi$, etc. Avec cette nouvelle notation, il vient :

$$\left.\begin{aligned}
({}^2D^{\dot\beta_1\alpha_1} - {}^1D^{\dot\beta_1\alpha_1})\,{}^2\psi_{\alpha_2}\,{}^1\psi_{\alpha_1} &= \varkappa\,{}^2\psi_{\alpha_2}\,{}^1\psi^{\dot\beta_1} \\
({}^2D^{\dot\beta_1\alpha_1} - {}^1D^{\dot\beta_1\alpha_1})\,{}^2\psi^{\dot\beta_2}\,{}^1\psi_{\alpha_1} &= \varkappa\,{}^2\psi^{\dot\beta_2}\,{}^1\psi^{\dot\beta_1} \\
({}^2D^{\dot\beta_2\alpha_2} - {}^1D^{\dot\beta_1\alpha_1})\,{}^2\psi_{\alpha_2}\,{}^1\psi_{\alpha_1} &= \varkappa\,{}^2\psi^{\dot\beta_2}\,{}^1\psi_{\alpha_1} \\
({}^2D_{\alpha_2\dot\beta_2} - {}^cD_{\alpha_2\dot\beta_2})\,{}^2\psi^{\dot\beta_2}\,{}^1\psi_{\alpha_1} &= -\varkappa\,{}^2\psi_{\alpha_2}\,{}^1\psi_{\alpha_1}
\end{aligned}\right\} \quad (4.42\,b')^*$$

$$\left.\begin{aligned}
({}^2D^{\dot\beta_1\alpha_1} - {}^1D^{\dot\beta_1\alpha_1})\,{}^2\psi_{\alpha_2}\,{}^1\psi_{\alpha_1} &= \varkappa\,{}^2\psi_{\alpha_2}\,{}^1\psi^{\dot\beta_1} \\
({}^2D_{\dot\beta_1\alpha_1} - {}^1D_{\dot\beta_1\alpha_1})\,{}^2\psi_{\alpha_2}\,{}^1\psi^{\dot\beta_1} &= -\varkappa\,{}^2\psi_{\alpha_2}\,{}^1\psi_{\alpha_1} \\
({}^2D^{\dot\beta_2\alpha_2} - {}^1D^{\dot\beta_1\alpha_2})\,{}^2\psi_{\alpha_2}\,{}^1\psi_{\alpha_1} &= \varkappa\,{}^2\psi^{\dot\beta_2}\,{}^1\psi_{\alpha_1} \\
({}^2D^{\dot\beta_2\alpha_2} - {}^1D^{\dot\beta_2\alpha_2})\,{}^2\psi_{\alpha_2}\,{}^1\psi^{\dot\beta_1} &= \varkappa\,{}^2\psi^{\dot\beta_2}\,{}^1\psi^{\dot\beta_1}
\end{aligned}\right\} \quad (4.42\,b'')$$

---

* Pour des raisons typographiques on a dû mettre depuis cette formule, $D^{\dot\beta\alpha}$ à la place de $\mathcal{D}^{\dot\beta\alpha}$.

Equations mixtes composées du corpuscule biondulatoire de spin 1.

$$
\begin{aligned}
\left({}^{2}D^{\dot\beta_1\alpha_1} - {}^{1}D^{\dot\beta_1\alpha_1}\right)\left[{}^{(1)2}\psi_{\alpha_2}\,{}^{(1)1}\psi_{\alpha_1} - {}^{(2)2}\psi_{\alpha_2}\,{}^{(2)1}\psi_{\alpha_1}\right] &= \varkappa\left[{}^{(1)2}\psi_{\alpha_2}\,{}^{(1)1}\psi^{\dot\beta_1} - {}^{(2)2}\psi_{\alpha_2}\,{}^{(2)1}\psi^{\dot\beta_1}\right]\\
\left({}^{2}D^{\dot\beta_2\alpha_2} - {}^{1}D^{\dot\beta_2\alpha_2}\right)\left[{}^{(1)2}\psi_{\alpha_2}\,{}^{(1)1}\psi_{\alpha_1} - {}^{(2)2}\psi_{\alpha_2}\,{}^{(2)1}\psi_{\alpha_1}\right] &= \varkappa\left[{}^{(1)2}\psi^{\dot\beta_2}\,{}^{(1)1}\psi_{\alpha_1} - {}^{(2)2}\psi^{\dot\beta_2}\,{}^{(1)1}\psi_{\alpha_1}\right]\\
\left({}^{2}D_{\alpha_1\dot\beta_1} - {}^{1}D_{\alpha_1\dot\beta_1}\right)\left[{}^{(1)2}\psi_{\alpha_2}\,{}^{(1)1}\psi^{\dot\beta_1} - {}^{(2)2}\psi_{\alpha_2}\,{}^{(2)1}\psi^{\dot\beta_1}\right] &= -\varkappa\left[{}^{(1)2}\psi_{\alpha_2}\,{}^{(1)1}\psi_{\alpha_1} - {}^{(2)2}\psi_{\alpha_2}\,{}^{(2)1}\psi_{\alpha_1}\right]\\
\left({}^{2}D^{\dot\beta_2\alpha_2} - {}^{1}D^{\dot\beta_2\alpha_2}\right)\left[{}^{(1)2}\psi_{\alpha_2}\,{}^{(1)1}\psi^{\dot\beta_1} - {}^{(2)2}\psi_{\alpha_2}\,{}^{(2)1}\psi^{\dot\beta_1}\right] &= \varkappa\left[{}^{(1)2}\psi^{\dot\beta_2}\,{}^{(1)1}\psi^{\dot\beta_1} - {}^{(2)2}\psi^{\dot\beta_2}\,{}^{(2)1}\psi^{\dot\beta_1}\right]
\end{aligned}
\tag{4.42 c}
$$

$$
\begin{aligned}
\left({}^{2}D^{\dot\beta_1\alpha_1} - {}^{1}D^{\dot\beta_1\alpha_1}\right)\left[{}^{(1)2}\psi_{\alpha_2}\,{}^{(2)1}\psi_{\alpha_1} + {}^{(2)2}\psi_{\alpha_2}\,{}^{(1)1}\psi_{\alpha_1}\right] &= \varkappa\left[{}^{(1)2}\psi_{\alpha_2}\,{}^{(2)1}\psi^{\dot\beta_1} + {}^{(2)2}\psi_{\alpha_2}\,{}^{(1)1}\psi^{\dot\beta_1}\right]\\
\left({}^{2}D^{\dot\beta_2\alpha_2} - {}^{1}D^{\dot\beta_2\alpha_2}\right)\left[{}^{(1)2}\psi_{\alpha_2}\,{}^{(2)1}\psi_{\alpha_1} + {}^{(2)2}\psi_{\alpha_2}\,{}^{(1)1}\psi_{\alpha_1}\right] &= \varkappa\left[{}^{(1)2}\psi^{\dot\beta_2}\,{}^{(2)1}\psi_{\alpha_1} + {}^{(2)2}\psi^{\dot\beta_2}\,{}^{(1)1}\psi_{\alpha_1}\right]\\
\left({}^{2}D_{\alpha_1\dot\beta_1} - {}^{1}D_{\alpha_1\dot\beta_1}\right)\left[{}^{(1)2}\psi_{\alpha_2}\,{}^{(2)1}\psi^{\dot\beta_1} + {}^{(2)2}\psi_{\alpha_2}\,{}^{(1)1}\psi^{\dot\beta_1}\right] &= -\varkappa\left[{}^{(1)2}\psi_{\alpha_2}\,{}^{(2)1}\psi_{\alpha_1} + {}^{(2)2}\psi_{\alpha_2}\,{}^{(1)1}\psi_{\alpha_1}\right]\\
\left({}^{2}D^{\dot\beta_2\alpha_2} - {}^{1}D^{\dot\beta_2\alpha_2}\right)\left[{}^{(1)2}\psi_{\alpha_2}\,{}^{(2)1}\psi^{\dot\beta_1} + {}^{(2)2}\psi_{0_2}\,{}^{(1)1}\psi^{\dot\beta_1}\right] &= \varkappa\left[{}^{(1)2}\psi^{\dot\beta_2}\,{}^{(1)1}\psi^{\dot\beta_1} + {}^{(2)2}\psi^{\dot\beta_2}\,{}^{(1)1}\psi^{\dot\beta_1}\right]
\end{aligned}
\tag{4.42 c''}
$$

Equations mixtes du corpuscule biondulatoire de spin $^3/_2$.

Nous avons deux cas à envisager suivant le nombre de composantes de deux champs d'onde.

1° $\quad {}^{1}\psi = {}^{1}\psi_{\alpha_1} \quad$ et $\quad {}^{2}\psi = {}^{2}\psi_{\alpha_3\alpha_2}$

2° $\quad {}^{1}\psi = {}^{1}\psi_{\alpha_2\alpha_1} \quad$ et $\quad {}^{2}\psi = {}^{2}\psi_{\alpha_3}$.

Nous allons écrire les équations d'onde relatives au premier cas:

$$
\left.
\begin{aligned}
\left({}^{2}D^{\dot\beta_1\alpha_1} - {}^{1}D^{\dot\beta_1\alpha_1}\right){}^{2}\psi_{\alpha_3\alpha_2}\,{}^{1}\psi_{\alpha_1} &= \varkappa\,{}^{2}\psi_{\alpha_3\alpha_2}\,{}^{1}\psi^{\dot\beta_1}\\
\left({}^{2}D^{\dot\beta_2\alpha_2} - {}^{1}D^{\dot\beta_2\alpha_2}\right){}^{2}\psi_{\alpha_3\alpha_2}\,{}^{1}\psi_{\alpha_1} &= \varkappa\,{}^{2}\psi_{\alpha_3}{}^{\dot\beta_2}\,{}^{1}\psi_{\alpha_1}\\
\left({}^{2}D^{\dot\beta_3\alpha_3} - {}^{1}D^{\dot\beta_3\alpha_3}\right){}^{2}\psi_{\alpha_3\alpha_2}\,{}^{1}\psi_{\alpha_1} &= \varkappa\,{}^{2}\psi^{\dot\beta_3}{}_{\alpha_2}\,{}^{1}\psi_{\alpha_1}
\end{aligned}
\right\}
\tag{4.42 d'}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
\left({}^{2}D^{\dot\beta_1\alpha_1} - {}^{1}D^{\dot\beta_1\alpha_1}\right){}^{2}\psi^{\dot\beta_3}{}_{\alpha_2}\,{}^{1}\psi_{\alpha_1} &= \varkappa\,{}^{2}\psi^{\dot\beta_3}{}_{\alpha_2}\,{}^{1}\psi^{\dot\beta_1}\\
\left({}^{2}D^{\dot\beta_2\alpha_2} - {}^{1}D^{\dot\beta_2\alpha_2}\right){}^{2}\psi^{\dot\beta_3}{}_{\alpha_2}\,{}^{1}\psi_{\alpha_1} &= \varkappa\,{}^{2}\psi^{\dot\beta_3\dot\beta_2}\,{}^{1}\psi_{\alpha_1}\\
\left({}^{2}D_{\alpha_3\dot\beta_3} - {}^{1}D_{\alpha_3\dot\beta_3}\right){}^{2}\psi^{\dot\beta_3}{}_{\alpha_2}\,{}^{1}\psi_{\alpha_1} &= -\varkappa\,{}^{2}\psi_{\alpha_3\alpha_2}\,{}^{1}\psi_{\alpha_1}
\end{aligned}
\right\}
\tag{4.42 d''}
$$

$$\left.\begin{aligned}
\left({}^2D^{\dot\beta_1\alpha_1} - {}^1D^{\dot\beta_1\alpha_1}\right) {}^2\psi_{\alpha_3}{}^{\dot\beta_2}\,{}^1\psi_{\alpha_1} &= \varkappa\, {}^2\psi_{\alpha_3}{}^{\dot\beta_2}\,{}^1\psi^{\dot\beta_1}\\
\left({}^2D_{\alpha_2\dot\beta_2} - {}^1D_{\alpha_2\dot\beta_2}\right) {}^2\psi_{\alpha_3}{}^{\dot\beta_2}\,{}^1\psi_{\alpha_1} &= \varkappa\, {}^2\psi_{\alpha_3\alpha_2}\,{}^1\psi_{\alpha_1}\\
\left({}^2D^{\dot\beta_3\alpha_3} - {}^1D^{\dot\beta_3\alpha_3}\right) {}^2\psi_{\alpha_3}{}^{\dot\beta_2}\,{}^1\psi_{\alpha_1} &= \varkappa\, {}^2\psi^{\dot\beta_3\dot\beta_2}\,{}^1\psi_{\alpha_1}
\end{aligned}\right\}\quad (4.42\,d''')$$

$$\left.\begin{aligned}
\left({}^2D_{\alpha_1\dot\beta_1} - {}^1D_{\alpha_1\dot\beta_1}\right) {}^2\psi_{\alpha_3\alpha_2}\,{}^1\psi^{\dot\beta_1} &= \varkappa\, {}^2\psi_{\alpha_3\alpha_0}\,{}^1\psi_{\alpha_1}\\
\left({}^2D^{\dot\beta_2\alpha_2} - {}^1D^{\dot\beta_2\alpha_2}\right) {}^2\psi_{\alpha_3\alpha_2}\,{}^1\psi^{\dot\beta_1} &= \varkappa\, {}^2\psi_{\alpha_3}{}^{\dot\beta_2}\,{}^1\psi^{\dot\beta_1}\\
\left({}^2D^{\dot\beta_3\alpha_3} - {}^1D^{\dot\beta_3\alpha_3}\right) {}^2\psi_{\alpha_3\alpha_2}\,{}^1\psi^{\dot\beta_1} &= \varkappa\, {}^2\psi^{\dot\beta_3}{}_{\alpha_2}\,{}^1\psi^{\dot\beta_1}
\end{aligned}\right\}\quad (4.42\,d^{\mathrm{IV}})$$

La formation des équations mixtes composées s'effectue comme pour le corpuscule bi-ondulatoire de spin 1. Chacune des équations précédentes va se dédoubler selon l'exemple suivant, qui est celui de la première équation:

$$\left.\begin{aligned}
\left({}^2D^{\dot\beta_1\alpha_1} - {}^1D^{\dot\beta_1\alpha_1}\right)\left[{}^{(1)2}\psi_{\alpha_3\alpha_2}\,{}^{(1)1}\psi_{\alpha_1} - {}^{(2)2}\psi_{x_3\alpha_2}\,{}^{(2)1}\psi_{\alpha_1}\right] &=\\
= \varkappa\left[{}^{(1)2}\psi_{\alpha_3\alpha_2}\,{}^{(1)1}\psi^{\dot\beta_1} - {}^{(2)2}\psi_{\alpha_3 0_2}\,{}^{(2)1}\psi^{\dot\beta_1}\right]&\\
\left({}^2D^{\dot\beta_1\alpha_1} - {}^1D^{\dot\beta_1\alpha_1}\right)\left[{}^{(1)2}\psi_{\alpha_3\alpha_2}\,{}^{(2)1}\psi_{\alpha_1} + {}^{(2)2}\psi_{\alpha_3\alpha_2}\,{}^{(1)1}\psi_{\alpha_1}\right] &=\\
= \varkappa\left[{}^{(1)2}\psi_{\alpha_3\alpha_2}\,{}^{(2)1}\psi^{\dot\beta_1} + {}^{(2)2}\psi_{\alpha_3\alpha_2}\,{}^{(1)1}\psi^{\dot\beta_1}\right]&
\end{aligned}\right\}\quad (4.42\,e)$$

Equations mixtes du corpuscule triondulatoire de spin $^3/_2$.

Nous poserons

$$\left[{}^3D\right]^{\dot\beta\alpha} = -\,{}^3D^{\dot\beta\alpha} + {}^2D^{\dot\beta\alpha} - {}^1D^{\dot\beta\alpha}\,. \qquad (4.42\,f)$$

Nous avons affaire à quatre systèmes d'équations dont voici le premier:

$$\left.\begin{aligned}
\left[{}^3D\right]^{\dot\beta_1\alpha_1}\,{}^3\psi_{\alpha_3}\,{}^2\psi_{\alpha_2}\,{}^1\psi_{\alpha_1} &= \varkappa\,{}^3\psi_{\alpha_3}\,{}^2\psi_{\alpha_2}\,{}^1\psi^{\dot\beta_1}\\
\left[{}^3D\right]^{\dot\beta_2\alpha_2}\,{}^3\psi_{\alpha_3}\,{}^2\psi_{\alpha_2}\,{}^1\psi_{\alpha_1} &= \varkappa\,{}^3\psi_{\alpha_3}\,{}^2\psi^{\dot\beta_2}\,{}^1\psi_{\alpha_1}\\
\left[{}^3D\right]^{\dot\beta_3\alpha_3}\,{}^3\psi_{\alpha_3}\,{}^2\psi_{\alpha_3}\,{}^1\psi_{\alpha_1} &= \varkappa\,{}^3\psi^{\dot\beta_3}\,{}^2\psi_{\alpha_2}\,{}^1\psi_{\alpha_1}
\end{aligned}\right\}\quad (4.42\,g')$$

$$\left.\begin{aligned}
\left[{}^{3}D\right]^{\dot\beta_1\alpha_1}\,{}^{3}\psi^{\dot\beta_3}\,{}^{2}\psi^{\dot\beta_2}\,{}^{1}\psi_{\alpha_1} &= \varkappa\,{}^{3}\psi^{\dot\beta_3}\,{}^{2}\psi^{\dot\beta_2}\,{}^{1}\psi^{\dot\beta_1}\\
\left[{}^{3}D\right]_{\alpha_2\dot\beta_2}\,{}^{3}\psi^{\dot\beta_3}\,{}^{2}\psi^{\dot\beta_2}\,{}^{1}\psi_{\alpha_1} &= \varkappa\,{}^{3}\psi^{\dot\beta_3}\,{}^{2}\psi_{\alpha_2}\,{}^{1}\psi_{\alpha_2}\\
\left[{}^{3}D\right]_{\alpha_3\dot\beta_3}\,{}^{3}\psi^{\dot\beta_3}\,{}^{2}\psi^{\dot\beta_2}\,{}^{1}\psi_{\alpha_1} &= \varkappa\,{}^{3}\psi_{\alpha_3}\,{}^{2}\psi^{\dot\beta_2}\,{}^{1}\psi_{\alpha_1}
\end{aligned}\right\}\qquad (4.42\,g'')$$

$$\left.\begin{aligned}
\left[{}^{3}D\right]_{\alpha_1\dot\beta_1}\,{}^{3}\psi^{\dot\beta_3}\,{}^{2}\psi_{\alpha_2}\,{}^{1}\psi^{\dot\beta_1} &= \varkappa\,{}^{3}\psi^{\dot\beta_3}\,{}^{2}\psi_{\alpha_2}\,{}^{1}\psi_{\alpha_1}\\
\left[{}^{3}D\right]^{\dot\beta_2\alpha_2}\,{}^{3}\psi^{\dot\beta_3}\,{}^{2}\psi_{\alpha_2}\,{}^{1}\psi^{\dot\beta_1} &= \varkappa\,{}^{3}\psi^{\dot\beta_2}\,{}^{2}\psi^{\dot\beta_2}\,{}^{1}\psi^{\dot\beta_1}\\
\left[{}^{3}D\right]_{\alpha_3\dot\beta_3}\,{}^{3}\psi^{\dot\beta_3}\,{}^{2}\psi_{\alpha_2}\,{}^{1}\psi^{\dot\beta_1} &= \varkappa\,{}^{3}\psi_{\alpha_3}\,{}^{2}\psi_{\alpha_2}\,{}^{1}\psi^{\dot\beta_1}
\end{aligned}\right\}\qquad (4.42\,g''')$$

$$\left.\begin{aligned}
\left[{}^{3}D\right]_{\alpha_1\dot\beta_1}\,{}^{3}\psi_{\alpha_3}\,{}^{2}\psi^{\dot\beta_2}\,{}^{1}\psi^{\dot\beta_1} &= \varkappa\,{}^{3}\psi_{\alpha_3}\,{}^{2}\psi^{\dot\beta_2}\,{}^{1}\psi_{\alpha_1}\\
\left[{}^{3}D\right]_{\alpha_2\dot\beta_2}\,{}^{3}\psi_{\alpha_3}\,{}^{2}\psi^{\dot\beta_2}\,{}^{1}\psi^{\dot\beta_1} &= \varkappa\,{}^{3}\psi_{\alpha_3}\,{}^{2}\psi_{\alpha_2}\,{}^{1}\psi^{\dot\beta_1}\\
\left[{}^{3}D\right]^{\dot\beta_3\alpha_3}\,{}^{3}\psi_{\alpha_3}\,{}^{2}\psi^{\dot\beta_2}\,{}^{1}\psi^{\dot\beta_1} &= \varkappa\,{}^{3}\psi^{\dot\beta_3}\,{}^{2}\psi^{\dot\beta_2}\,{}^{1}\psi^{\dot\beta_1}
\end{aligned}\right\}\qquad (4.42\,g^{\mathrm{IV}})$$

Les autres systèmes peuvent s'écrire aussi facilement, il suffit dans les équations correspondantes du corpuscule uni-ondulatoire de spin $^3/_2$ ($4.3\,i'$ à $4.3\,i^{\mathrm{IV}}$) de scinder les spineurs de troisième rang en produits de trois spineurs de premier rang.

Pour obtenir les équations mixtes composées il faut prendre comme fonctions d'onde les huit expressions suivantes:

$$\begin{aligned}
&{}^{(1)3}\psi_{\alpha_3}\,{}^{(1)2}\psi_{\alpha_2}\,{}^{(1)1}\psi_{\alpha_1} - {}^{(1)3}\psi_{\alpha_3}\,{}^{(2)2}\psi_{\alpha_2}\,{}^{(2)1}\psi_{\alpha_1} -\\
&\qquad - {}^{(2)3}\psi_{\alpha_3}\,{}^{(1)2}\psi_{\alpha_2}\,{}^{(2)1}\psi_{\alpha_1} - {}^{(2)3}\psi_{\alpha_3}\,{}^{(2)2}\psi_{\alpha_2}\,{}^{(1)1}\psi_{\alpha_1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&{}^{(1)3}\psi_{\alpha_3}\,{}^{(1)2}\psi_{\alpha_2}\,{}^{(1)1}\psi_{\alpha_1} + {}^{(1)3}\psi_{\alpha_3}\,{}^{(2)2}\psi_{\alpha_2}\,{}^{(1)1}\psi_{\alpha_1} +\\
&\qquad + {}^{(2)3}\psi_{\alpha_3}\,{}^{(1)2}\psi_{\alpha_2}\,{}^{(1)1}\psi_{\alpha_1} - {}^{(2)3}\psi_{\alpha_3}\,{}^{(2)2}\psi_{\alpha_2}\,{}^{(2)1}\psi_{\alpha_1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&{}^{(1)3}\psi_{\alpha_3}\,{}^{(1)2}\psi^{\dot\beta_2}\,{}^{(2)1}\psi^{\dot\beta_1} - {}^{(1)3}\psi_{\alpha_3}\,{}^{(2)2}\psi^{\dot\beta_2}\,{}^{(2)1}\psi^{\dot\beta_1} -\\
&\qquad - {}^{(2)3}\psi_{\alpha_3}\,{}^{(1)2}\psi^{\dot\beta_2}\,{}^{(2)1}\psi^{\dot\beta_1} - {}^{(2)3}\psi_{\alpha_3}\,{}^{(2)2}\psi^{\beta_2}\,{}^{(1)1}\psi^{\dot\beta_1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&{}^{(2)3}\psi_{\alpha_3}\,{}^{(1)2}\psi^{\dot\beta_2}\,{}^{(1)1}\psi^{\dot\beta_1} - {}^{(2)3}\psi_{\alpha_3}\,{}^{(2)3}\psi^{\dot\beta_2}\,{}^{(2)1}\psi^{\dot\beta_1} +\\
&\qquad + {}^{(2)3}\psi_{\alpha_3}\,{}^{(1)2}\psi^{\dot\beta_2}\,{}^{(2)1}\psi^{\dot\beta_1} + {}^{(2)3}\psi_{\alpha_3}\,{}^{(2)2}\psi^{\dot\beta_2}\,{}^{(1)1}\psi^{\dot\beta_1}
\end{aligned}$$

$$
{}^{(1)3}\psi_{\alpha_3}\,{}^{(1)2}\psi_{\alpha_2}\,{}^{(1)1}\psi^{\dot\beta_1} - {}^{(1)3}\psi_{\alpha_3}\,{}^{(2)2}\psi_{\alpha_2}\,{}^{(2)1}\psi^{\dot\beta_1} -
$$
$$
- {}^{(2)3}\psi_{\alpha_1}\,{}^{(1)2}\psi_{\alpha_2}\,{}^{(2)1}\psi^{\dot\beta_1} - {}^{(2)3}\psi_{\alpha_1}\,{}^{(2)2}\psi_{\alpha_2}\,{}^{(1)1}\psi^{\dot\beta_1}
$$

$$
{}^{(2)3}\psi_{\alpha_3}\,{}^{(1)2}\psi_{\alpha_2}\,{}^{(1)1}\psi^{\dot\beta_1} - {}^{(2)3}\psi_{\alpha_3}\,{}^{(2)2}\psi_{\alpha_2}\,{}^{(2)1}\psi^{\dot\beta_1} +
$$
$$
+ {}^{(1)3}\psi_{\alpha_1}\,{}^{(1)2}\psi_{\alpha_2}\,{}^{(2)1}\psi^{\dot\beta_1} + {}^{(1)3}\psi_{\alpha_1}\,{}^{(2)2}\psi_{\alpha_2}\,{}^{(1)1}\psi^{\dot\beta_1}
$$

$$
{}^{(1)3}\psi_{\alpha_3}\,{}^{(1)2}\psi^{\dot\beta_2}\,{}^{(1)1}\psi_{\alpha_1} - {}^{(1)3}\psi_{\alpha_3}\,{}^{(2)2}\psi^{\dot\beta_2}\,{}^{(2)1}\psi_{\alpha_1} -
$$
$$
- {}^{(2)3}\psi_{\alpha_3}\,{}^{(1)2}\psi^{\dot\beta_2}\,{}^{(2)1}\psi_{\alpha_1} - {}^{(2)3}\psi_{\alpha_3}\,{}^{(2)2}\psi^{\dot\beta_2}\,{}^{(1)1}\psi_{\alpha_1}
$$

$$
{}^{(1)3}\psi_{\alpha_3}\,{}^{(1)2}\psi^{\dot\beta_2}\,{}^{(2)1}\psi_{\alpha_1} + {}^{(1)3}\psi_{\alpha_3}\,{}^{(2)2}\psi^{\dot\beta_2}\,{}^{(1)1}\psi_{\alpha_1} +
$$
$$
+ {}^{(2)3}\psi_{\alpha_3}\,{}^{(1)2}\psi^{\dot\beta_2}\,{}^{(1)1}\psi_{\alpha_1} - {}^{(2)3}\psi_{\alpha_3}\,{}^{(2)2}\psi^{\dot\beta_2}\,{}^{(2)1}\psi_{\alpha_1}
$$

La première et la deuxième expression doivent être soumises à l'action des opérateurs:

$$
\left[{}^{3}D\right]^{\dot\beta_1\alpha_1}, \quad \left[{}^{3}D\right]^{\dot\beta_2\alpha_2} \text{ et } \left[{}^{3}D\right]^{\dot\beta_3\alpha_3},
$$

la troisième et la quatrième à l'action des opérateurs:

$$
\left[{}^{3}D\right]_{\alpha_1\dot\beta_1}, \quad \left[{}^{3}D\right]_{\alpha_2\dot\beta_2} \quad \text{et} \quad \left[{}^{3}D\right]^{\dot\beta_3\alpha_3}
$$

la cinquième et la sixième à celle des:

$$
\left[{}^{3}D\right]_{\alpha_1\dot\beta_1}, \quad \left[{}^{3}D\right]^{\dot\beta_2\alpha_2} \quad \text{et} \quad \left[{}^{3}D\right]^{\dot\beta_3\alpha_3}
$$

et les deux dernières à celle des:

$$
\left[{}^{3}D\right]^{\dot\beta_1\alpha_1}, \quad \left[{}^{3}D\right]_{\alpha_2\dot\beta_2} \quad \text{et} \quad \left[{}^{3}D\right]^{\dot\beta_3\alpha_3}.
$$

5. Aperçu de la théorie des ondes planes en mécanique ondulatoire simple et en mécanique multiondulatoire des corpuscules de spin quelconque.

5.1. *Mécanique uniondulatoire.*

5.11. *Corpuscule de spin ½.*

Prenons les équations primaires, écrites spinoriellement

$$D^{\dot\beta_1 \alpha_1} \psi_{\alpha_1} = \varkappa \psi^{\dot\beta_1}$$

et posons-y

$$\psi_1 = a_1 e^{iS} + b_1 e^{-iS} , \qquad \psi_2 = a_2 e^{iS} + b_2 e^{-iS} \tag{5.11 a}$$

avec

$$S = \frac{i}{h} (Wt - p_1 x_1 - p_2 x_2 - p_3 x_3) \tag{5.11 b}$$

Il vient immédiatement que les amplitudes a_k et b_k satisfont au système d'équations suivantes:

$$\left.\begin{array}{llllll}
\left(\frac{W}{c} + p_3\right) a_1 & - (p_1 + i p_2) a_2 & & - i m_0 c b^*_2 & = 0 \\
- (p_1 - i p_2) a_1 & + \left(\frac{W}{c} - p_3\right) a_2 & + i m_0 c b^*_1 & & = 0 \\
& - i m_0 c a_2 & + \left(\frac{W}{c} + p_3\right) b^*_1 & - (p_1 - i p_2) b^*_2 & = 0 \\
i m_0 c a_1 & & - (p_1 + i p_2) b^*_1 & + \left(\frac{W}{c} - p_3\right) b^*_2 & = 0
\end{array}\right\} \tag{5.11 c}$$

dont le déterminant est égal à

$$\left(\frac{W^2}{c^2} - p^2_1 - p^2_2 - p^2_3 - m^2_0 c^2\right)^2 = 0 . \tag{5.11 d}$$

Les coefficients b_1 et b_2 s'expriment en fonctions des a_1 et a_2, on a:

$$\left.\begin{aligned} b_1^* &= \frac{-(p_1 - i p_2) a_1 + \left(\frac{W}{c} - p_3\right) a_2}{-i m_0 c} \\ b_2^* &= \frac{-\left(\frac{W}{c} + p_3\right) a_1 + (p_1 + i p_2) v_2}{-i m_0 c} \end{aligned}\right\} \quad (5.11\,e)$$

Pour obtenir l'onde plane à énergie positive Ψ^+ de l'équation de Dirac (solution qui n'est pas « complète »), nous devons associer les solutions ${}^1\psi$ et ${}^2\psi$ de deux équations primaires, solutions qui ne sont pas indépendantes. L'onde Ψ^+, en effet, doit être de la forme Ae^{iS}; posons

$$\begin{aligned} \Psi_1^+ &= {}^1\psi + i\,{}^2\psi = A_1 e^{iS} = \\ &= ({}^1a + i\,{}^2a)\, e^{iS} + ({}^1b + i\,{}^2b)\, e^{-S} \end{aligned}$$

d'où

$$ {}^2b = i\,{}^1b\ . \qquad (5.11\,f')$$

De même, de la relation

$$\Psi_2^+ = \sigma[{}^1\psi^* + i\,{}^2\psi^*] = A_2 e^{iS}$$

on tire

$$ {}^2a = -\,i\,{}^1a\ . \qquad (5.11\,f'')$$

La solution ${}^2\Psi$ s'écrit donc

$$ {}^2\Psi = -\,i\,a\,e^{iS} + i\,b\,e^{-iS} = a\,e^{iS'} + b\,e^{-iS'} \qquad (5.11\,g)$$

avec

$$S' = S - \frac{\pi}{2} = \frac{W}{c}t - p_1 x_1 - p_2 x_2 - p_3 x_3 - \frac{\pi}{2}\ . \qquad (5.11\,h)$$

Posons maintenant

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \tfrac{1}{2}({}^1\psi_1 + i\,{}^2\psi_1) = a_1 e^{iS}\ , & \varphi_2 &= \tfrac{1}{2}({}^1\psi_2 + i\,{}^2\psi_2) = a_2 e^{iS} \\ \theta_1 &= \tfrac{1}{2}({}^1\psi_1 - i\,{}^2\psi_1) = b_1 e^{-iS}\ , & \theta_2 &= \tfrac{1}{2}({}^1\psi_2 - i\,{}^2\psi_2) = b_2 e^{-iS} \end{aligned}$$

(4.11 i)

et, ensuite

$$\left.\begin{aligned}
\Psi_1 &= \varphi_1 - i\,\theta_2^* = \left(a_1 - i\,b_2^*\right)e^{iS} = A_1\,e^{iS}\\
\Psi_2 &= \varphi_1 + i\,\theta_2^* = \left(a_1 + i\,b_2^*\right)e^{iS} = A_2\,e^{iS}\\
\Psi_3 &= \varphi_2 + i\,\theta_1^* = \left(a_2 + i\,b_1^*\right)e^{iS} = A_3\,e^{iS}\\
\Psi_4 &= \varphi_2 - i\,\theta_1^* = \left(a_2 - i\,b_1^*\right)e^{iS} = A_4\,e^{iS}
\end{aligned}\right\} \qquad (5.11\,j)$$

Compte tenu de (5.11 *e*), on trouve facilement:

$$\left.\begin{aligned}
A_1 &= \frac{\left(-\frac{W}{c} + p_3 - m_0 c\right)a_1 + (p_1 + i\,p_2)\,a_2}{m_0 c}\\
A_2 &= \frac{\left(\frac{W}{c} + p_3 + m_0 c\right)a_1 - (p_1 + i\,p_2)\,a_2}{m_0 c}\\
A_3 &= \frac{-(p_1 - i\,p_2)\,a_1 + \left(\frac{W}{c} + m_0 c - p_3\right)a_2}{m_0 c}\\
A_4 &= \frac{(p_1 - i\,p_2)\,a_1 - \left(\frac{W}{c} - p_3 - m_0 c\right)a_2}{m_0 c}\,.
\end{aligned}\right\} \qquad (5.11\,k)$$

En exprimant A_1 et A_4 en fonction de A_2 et A_3 on trouve bien

$$A_1 = \frac{(p_1 + i\,p_2)\,A_3 - p_3\,A_2}{\frac{W}{c} + m_0 c}\,, \qquad A_4 = \frac{(p_1 - i\,p_2)\,A_2 + p_3\,A_3}{\frac{W}{c} + m_0 c}\,. \qquad (5.11\,l)$$

5.12. *Corpuscule de spin 1.*

Ecrivons explicitement les équations primaires de ce corpuscule, en nous bornant au premier système:

$$\left.\begin{aligned}
(\partial_t - \partial_3)\,\psi_{11} + (\partial_1 + i\,\partial_2)\,\psi_{12} &= -\,\varkappa\,\varphi_{22}^*\\
(\partial_1 - i\,\partial_2)\,\psi_{11} + (\partial_t + \partial_3)\,\psi_{12} &= \varkappa\,\varphi_{21}^*\\
(\partial_t - \partial_3)\,\psi_{21} + (\partial_t + i\,\partial_2)\,\psi_{22} &= \varkappa\,\varphi_{12}^*\\
(\partial_1 - i\,\partial_2)\,\psi_{21} + (\partial_t + \partial_3)\,\psi_{22} &= -\,\varkappa\,\varphi_{11}^*
\end{aligned}\right\} \qquad (5.12\,a')$$

$$\left.\begin{aligned}
(\partial_t - \partial_3)\,\varphi_{11} + (\partial_1 + i\,\partial_2)\,\varphi_{12} &= \varkappa\,\psi^*_{22} \\
(\partial_1 - i\,\partial_2)\,\varphi_{11} + (\partial_t + \partial_3)\,\varphi_{12} &= -\,\varkappa\,\psi^*_{21} \\
(\partial_t - \partial_3)\,\varphi_{21} + (\partial_1 + i\,\partial_2)\,\varphi_{22} &= -\,\varkappa\,\psi^*_{12} \\
(\partial_1 - i\,\partial_2)\,\varphi_{21} + (\partial_t + \partial_3)\,\varphi_{22} &= \varkappa\,\psi^*_{11}
\end{aligned}\right\} \qquad (5.12\,a'')$$

$$\left.\begin{aligned}
(\partial_t - \partial_3)\,\psi_{11} + (\partial_1 + i\,\partial_2)\,\psi_{21} &= i\,\varkappa\,\varphi_{11} \\
(\partial_1 - i\,\partial_2)\,\psi_{11} + (\partial_t + \partial_3)\,\psi_{21} &= i\,\varkappa\,\varphi_{21} \\
(\partial_t - \partial_3)\,\psi_{12} + (\partial_1 + i\,\partial_2)\,\psi_{22} &= i\,\varkappa\,\varphi_{12} \\
(\partial_1 - i\,\partial_2)\,\psi_{12} + (\partial_t + \partial_3)\,\psi_{22} &= i\,\varkappa\,\varphi_{22}
\end{aligned}\right\} \qquad (5.12\,a''')$$

$$\left.\begin{aligned}
(\partial_t + \partial_3)\,\varphi_{11} - (\partial_1 + i\,\partial_2)\,\varphi_{21} &= i\,\varkappa\,\psi_{11} \\
-\,(\partial_1 - i\,\partial_2)\,\varphi_{11} + (\partial_t - \partial_3)\,\varphi_{21} &= i\,\varkappa\,\psi_{21} \\
(\partial_t + \partial_3)\,\varphi_{12} - (\partial_1 + i\,\partial_2)\,\varphi_{22} &= i\,\varkappa\,\psi_{12} \\
-\,(\partial_1 - i\,\partial_2)\,\psi_{12} + (\partial_t - \partial_3)\,\varphi_{22} &= i\,\varkappa\,\psi_{22}
\end{aligned}\right\} \qquad (5.12\,a^{\mathrm{IV}})$$

Cherchons les solutions de la forme:

$$\left.\begin{aligned}
\psi_{lk} &= a_{lk}\,e^{iS} + b_{lk}\,e^{-iS} \\
\varphi_{lk} &= c_{lk}\,e^{iS} + d_{lk}\,e^{-iS}
\end{aligned}\right\} \qquad (5.12\,b)$$

Les coefficients a_{11}, a_{12}, a_{21} et a_{22} étant fixés arbitrairement, tous les autres coefficients se trouvent déterminés. Il vient:

$$\left.\begin{aligned}
c_{11} &= {}^1/m_0\,c\left[\left(\frac{W}{c} + p_3\right)a_{11} - (p_1 + i\,p_2)\,a_{21}\right] \\
c_{12} &= {}^1/m_0\,c\left[\left(\frac{W}{c} + p_3\right)a_{12} - (p_1 + i\,p_2)\,a_{22}\right] \\
c_{21} &= {}^1/m_0\,c\left[-\,(p_1 - i\,p_2)\,a_{11} + \left(\frac{W}{c} - p_3\right)a_{21}\right] \\
c_{22} &= {}^1/m_0\,c\left[-\,(p_1 - i\,p_2)\,a_{12} + \left(\frac{W}{c} - p_3\right)a_{22}\right]
\end{aligned}\right\} \qquad (5.12\,c')$$

$$\left.\begin{aligned}
d_{11} &= {}^{i}/m_0\, c\left[-(p_1 + i\,p_2)\,a^*_{21} + \left(\frac{\mathrm{W}}{c} - p_3\right)a^*_{22}\right] \\
d_{12} &= -{}^{i}/m_0\, c\left[\left(\frac{\mathrm{W}}{c} + p_3\right)a^*_{21} - (p_1 - i\,p_2)\,a^*_{22}\right. \\
d_{21} &= -{}^{i}/m_0\, c\left[-(p_1 + i\,p_2)\,a^*_{11} + \left(\frac{\mathrm{W}}{c} - p_3\right)a^*_{12}\right] \\
d_{22} &= {}^{i}/m_0\, c\left[\left(\frac{\mathrm{W}}{c} + p_3\right)a^*_{11} - (p_1 - i\,p_2)\,a^*_{12}\right]
\end{aligned}\right\} \quad (5.12\,c'')$$

$$\left.\begin{aligned}
b_{11} &= -{}^{i}/m_0^2 c^2\left[(p_1 + i\,p_2)^2\,a^*_{11} - \left(\frac{\mathrm{W}}{c} - p_3\right)(p_1 + i\,p_2)\left(a^*_{12} + a^*_{21}\right) + \left(\frac{\mathrm{W}}{c} - p_3\right)a^*_{23}\right] \\
b_{12} &= {}^{i}/m_0^2 c^2\left[-\left(\frac{\mathrm{W}}{c} + p_3\right)(p_1 + i\,p_2)\,a^*_{11} + \left(\frac{\mathrm{W}^2}{c^2} - p_3^2\right)a^*_{21} + \left(p_1^2 + p_2^2\right)a^*_{12} -\right. \\
&\qquad\qquad \left. - (p_1 - i\,p_2)\left(\frac{\mathrm{W}}{c} - p_3\right)a^*_{2}\right] \\
b_{21} &= {}^{i}/m_0^2 c^2\left[-\left(\frac{\mathrm{W}}{c} + p_3\right)(p_1 + i\,p_2)\,a^*_{11} + \left(p_1^2 + p_2^2\right)a^*_{21} + \left(\frac{\mathrm{W}}{c} - p_3^2\right)a^*_{12} -\right. \\
&\qquad\qquad \left. - (p_1 - i\,p_2)\left(\frac{\mathrm{W}}{c} - p_3\right)a^*_{22}\right] \\
b_{22} &= -{}^{i}/m_0^2 c^2\left[\frac{\mathrm{W}}{c} + p_3\right)^2 a^*_{11} - \left(\frac{\mathrm{W}}{c} + p_3\right)(p_1 - i\,p_2)\left(a^*_{12} + a^*_{21}\right) + (p_1 - i\,p_2)^2\,a^*_{22}\right]
\end{aligned}\right\} \quad (5.12\,c''')$$

Pour obtenir la solution « onde plane à énergie positive » des équations mixtes composées (équations du corpuscule de spin 1 de L. de Broglie), nous précéderons comme en théorie du corpuscule de spin ½. Aux équations (5.12*a*) nous allons adjoindre un second système d'équations exactement pareil, mais dont nous prendrons les solutions suivantes:

$$\left.\begin{aligned}
{}^2\psi_{lk} &= a_{lk}\,e^{i\left(\mathrm{S}-\frac{\pi}{2}\right)} + b_{lk}\,e^{-i\left(\mathrm{S}-\frac{\pi}{2}\right)} \\
{}^2\varphi_{lk} &= c_{lk}\,e^{i\left(\mathrm{S}-\frac{\pi}{2}\right)} + d_{lk}\,e^{-i\left(\mathrm{S}-\frac{\pi}{2}\right)}
\end{aligned}\right\} \quad (5.12\,d)$$

Posons [Cf. (2.23 *b*)]

$$\left.\begin{aligned}
{}^1\Phi_{lk} &= {}^1/_2\left({}^1\psi_{lk} + i\,{}^2\psi_{lk}\right) = a_{tk}\,e^{i\mathrm{S}} \\
{}^2\Phi_{lk} &= {}^1/_2\left({}^1\varphi_{lk} + i\,{}^2\varphi_{lk}\right) = c_{tk}\,e^{i\mathrm{S}} \\
{}^3\Phi_{lk} &= -{}^{i}/_2[\sigma\times\sigma]\left({}^1\varphi^*_{lk} + i\,{}^2\varphi^*_{lk}\right) = -\,i[\sigma\times\sigma]\,d^*_{lk}\,e^{i\mathrm{S}} \\
{}^4\Phi_{lk} &= {}^{i}/_2[\sigma\times\sigma]\left({}^1\psi^*_{lk} + i\,{}^2\psi^*_{lk}\right) = \,i[\sigma\times\sigma]\,b^*_{lk}\,e^{i\mathrm{S}}
\end{aligned}\right\} \quad (5.12\,e)$$

et ensuite

$$\left.\begin{aligned}
\Psi_{11} &= {}^1/\sqrt{2}\,({}^1\Phi_{11} + {}^4\Phi_{11}) = {}^1/\sqrt{2}\,(a_{11} - i\,b^*_{22})\,e^{iS} = A_{11}\,e^{iS} \\
\Psi_{12} &= {}^1/\sqrt{2}\,({}^1\Phi_{12} + {}^4\Phi_{12}) = {}^1/\sqrt{2}\,(a_{12} - i\,b_{21})\,e^{iS} = A_{12}\,e^{iS} \\
\Psi_{13} &= {}^1/\sqrt{2}\,({}^1\Phi_{21} + {}^4\Phi_{21}) = {}^1/\sqrt{2}\,(a_{21} + i\,b_{12})\,e^{iS} = A_{13}\,e^{iS} \\
\Psi_{14} &= {}^1/\sqrt{2}\,({}^1\Phi_{22} + {}^4\Phi_{22}) = {}^1/\sqrt{2}\,(a_{22} - i\,b_{11})\,e^{iS} = A_{14}\,e^{iS}
\end{aligned}\right\}\quad(5.12\,f')$$

$$\left.\begin{aligned}
\Psi_{21} &= {}^1/\sqrt{2}\,({}^2\Phi_{11} + {}^3\Phi_{11}) = {}^1/\sqrt{2}\,(c_{11} + i\,d^*_{22})\,e^{iS} = A_{21}\,e^{iS} \\
\Psi_{22} &= {}^1/\sqrt{2}\,({}^2\Phi_{12} + {}^3\Phi_{12}) = {}^1/\sqrt{2}\,(c_{12} - i\,d^*_{21})\,e^{iS} = A_{22}\,e^{iS} \\
\Psi_{23} &= {}^1/\sqrt{2}\,({}^2\Phi_{21} + {}^3\Phi_{21}) = {}^1/\sqrt{2}\,(c_{21} - i\,d^*_{12})\,e^{iS} = A_{23}\,e^{iS} \\
\Psi_{24} &= {}^1/\sqrt{2}\,({}^2\Phi_{22} + {}^3\Phi_{22}) = {}^1/\sqrt{2}\,(c_{22} + i\,d^*_{11})\,e^{iS} = A_{24}\,e^{iS}
\end{aligned}\right\}\quad(5.12\,f'')$$

$$\left.\begin{aligned}
\Psi_{31} &= {}^1/\sqrt{2}\,({}^2\Phi_{11} - {}^3\Phi_{11}) = {}^1/\sqrt{2}\,(c_{11} - i\,d^*_{22})\,e^{iS} = A_{31}\,e^{iS} \\
\Psi_{32} &= {}^1/\sqrt{2}\,({}^2\Phi_{12} - {}^3\Phi_{12}) = {}^1/\sqrt{2}\,(c_{12} + i\,d^*_{21})\,e^{iS} = A_{32}\,e^{iS} \\
\Psi_{33} &= {}^1/\sqrt{2}\,({}^2\Phi_{21} - {}^3\Phi_{21}) = {}^1/\sqrt{2}\,(c_{21} + i\,d^*_{12})\,e^{iS} = A_{33}\,e^{iS} \\
\Psi_{34} &= {}^1/\sqrt{2}\,({}^2\Phi_{22} - {}^3\Phi_{22}) = {}^1/\sqrt{2}\,(e_{21} - i\,d^*_{11})\,e^{iS} = A_{34}\,e^{iS}
\end{aligned}\right\}\quad(5.12\,f''')$$

$$\left.\begin{aligned}
\Psi_{41} &= {}^1/\sqrt{2}\,({}^1\Phi_{11} - {}^4\Phi_{11}) = {}^1/\sqrt{2}\,(a_{11} + i\,b^*_{22})\,e^{iS} = A_{41}\,e^{iS} \\
\Psi_{42} &= {}^1/\sqrt{2}\,({}^1\Phi_{12} - {}^4\Phi_{12}) = {}^1/\sqrt{2}\,(a_{12} - i\,b^*_{21})\,e^{iS} = A_{42}\,e^{iS} \\
\Psi_{43} &= {}^1/\sqrt{2}\,({}^1\Phi_{21} - {}^4\Phi_{21}) = {}^1/\sqrt{2}\,(a_{21} - i\,b^*_{12})\,e^{iS} = A_{43}\,e^{iS} \\
\Psi_{44} &= {}^1/\sqrt{2}\,({}^1\Phi_{22} - {}^4\Phi_{22}) = {}^1/\sqrt{2}\,(a_{22} + i\,b^*_{11})\,e^{iS} = A_{44}\,e^{iS}
\end{aligned}\right\}\quad(5.12\,f^{\text{IV}})$$

En se servant des relations (5.12 c', c'' et c''') on exprimera les seize amplitudes A_{ek} de l'onde plane à énergie positive en fonction des quatre paramètres a_{11}, a_{21} et a_{22}.

La méthode s'étend sans difficulté à l'étude des ondes planes des corpuscules de spin quelconque.

5.2. *Mécanique multiondulatoire.*

5.21. *Corpuscule de spin biondulatoire de spin 1.*

En cherchant les solutions de la forme

$$\left.\begin{aligned} {}^1\psi_{\alpha_1} &= {}^1a_{\alpha_1} e^{i1\,\mathrm{S}} + {}^1b_{\alpha_1} e^{-i1\,\mathrm{S}} \\ {}^2\psi_{\alpha_2} &= {}^2a_{\alpha_2} e^{i2\,\mathrm{S}} + {}^2b_{\alpha_2} e^{-i2\,\mathrm{S}} \end{aligned}\right\} \qquad (5.21\,a)$$

avec

$$\left.\begin{aligned} {}^1\mathrm{S} &= \frac{{}^1\mathrm{W}}{c} t - {}^1p_1 x_1 - {}^1p_2 x_2 - {}^1p_3 x_3 \\ {}^2\mathrm{S} &= \frac{{}^2\mathrm{W}}{c} t - {}^2p_1 x_1 - {}^2p_2 x_2 - {}^2p_3 x_3 \end{aligned}\right\}, \qquad (5.21\,b)$$

des équations $(4.4\,d')$, on trouve immédiatement les relations suivantes entre les coefficients ${}^1a$ et ${}^1b$ d'une part, et les coefficients ${}^2a$ et ${}^2b$ d'autre part

$$\left.\begin{aligned} {}^lb^*_1 &= {}^1/m_0 c \left\{ -\left[({}^2p_1 - {}^1p_1) - i({}^2p_2 - {}^1p_2)\right]{}^la_1 + \left[\frac{{}^2\mathrm{W} - {}^1\mathrm{W}}{c} - ({}^2p_3 - {}^1p_3)\right]{}^la_2 \right\} \\ {}^lb^*_2 &= {}^1/m_0 c \left\{ -\left[\frac{{}^2\mathrm{W} - {}^1\mathrm{W}}{c} + ({}^2p_3 - {}^1p_3)\right]{}^la_1 + \left[({}^2p_1 - {}^1p_1) + i({}^2p_2 - {}^1p_2)\right]{}^la_2 \right\} \\ &\text{où } l = 1 \text{ ou } 2\ . \end{aligned}\right\}$$

On voit donc que les coefficients ${}^1b$ de la première fonction d'onde ne dépendent que des coefficients ${}^1a$ de la même fonction d'onde et, de même, les coefficients ${}^2b$ s'expriment uniquement en fonction de ${}^2a$, les relations ne faisant intervenir que les différences

$$\frac{\mathrm{W}}{c} = \frac{{}^2\mathrm{W}}{c} - \frac{{}^1\mathrm{W}}{c} \quad \text{et} \quad p_k = {}^2p_k - {}^1p_k\ . \qquad (5.21\,d)$$

Dans le cas d'équations mixtes composées nous avons pour fonctions d'onde les expressions suivantes:

$$^{(m)l}\psi_{\alpha_l} = {}^{(m)l}a_{\alpha_l} e^{i^l\mathrm{S}} + {}^{(m)l}b_{\alpha_l} e^{-i^l\mathrm{S}} \qquad (5.21\,e)$$

$$\text{où } m = 1 \text{ et } 2$$

avec

$$\left.\begin{aligned} {}^{(1)l}b^*_{1} + {}^{(2)l}b^*_{1} &= {}^{1}/m_0\, c \left\{ -(p_1 + i\,p_2)\left({}^{(1)l}a_1 + i\,{}^{(2)l}a_1\right) + \left(\frac{W}{c} - p_3\right)\left({}^{(1)l}a_2 + i\,{}^{(2)l}a_2\right) \right\} \\ {}^{(1)l}b^*_{3} + {}^{(2)l}b^*_{2} &= {}^{1}/m_0\, c \left\{ -\left(\frac{W}{c} - p_3\right)\left({}^{(1)l}a_1 + i\,{}^{(2)l}a_1\right) + (p_1 + i\,p_2)\left({}^{(1)l}a_2 + i\,{}^{(2)l}a_2\right) \right\} \end{aligned}\right\} \quad (5.21\,f)$$

5.22. *Corpuscule* n-*ondulatoire de spin* $^{n}/_{2}$.

Nous avons

$$^{l}\Psi_{\alpha_l} = {}^{l}a_{\alpha_l}\, e^{i\,{}^{l}S} + {}^{l}b_{\alpha_l}\, e^{-i\,{}^{l}S}\,, \qquad l = 1, 2, \dots n \qquad (5.22\,a)$$

avec

$$\left.\begin{aligned} {}^{l}b^*_{1} &= {}^{1}/m_0\, c \left\{ -[p_1 - i\,p_2]\, a^l_1 + \left[\frac{W}{c} - p_3\right] a^l_2 \right\} \\ {}^{l}b^*_{2} &= {}^{1}/m_0\, c \left\{ -\left[\frac{W}{c} + p_3\right] a^l_1 + [p_1 + i\,p_2]\, a^l_2 \right\} \end{aligned}\right\} \quad (5.22\,b)$$

où

$$W = \sum_{l=1}^{n} (-1)^l\, {}^{l}W \qquad p = \sum_{l=1}^{n} (-1)^l\, {}^{l}p\,. \qquad (5.23\,c)$$

5.23. *Corpuscule biondulatoire de spin* $^{3}/_{2}$.

Nous poserons donc les équations ($4.42\,d$):

$$\left.\begin{aligned} {}^{1}\psi_{\alpha_1} = {}^{1}a_{\alpha_1}\, e^{i\,{}^{1}S} + {}^{1}b_{\alpha_1}\, e^{-i\,{}^{1}S}\,, \qquad {}^{2}\psi_{\alpha_3\alpha_2} = {}^{2}a_{\alpha_3\alpha_2}\, e^{i\,{}^{2}S} + {}^{3}b_{\alpha_3\alpha_2}\, e^{-i\,{}^{2}S} \\ {}^{2}\psi^{\dot\beta_3}{}_{\alpha_2} = {}^{2}c^{\dot\beta_3}{}_{\alpha_2}\, e^{i\,{}^{2}S} + {}^{2}d^{\dot\beta_3}{}_{\alpha_2}\, e^{-i\,{}^{2}S}\,. \end{aligned}\right\} \quad (5.23\,a)$$

On trouve facilement que les coefficients a_α et b_α satisfont aux relations ($5.11\,e$), tandis que les coefficients $a_{\alpha_3\alpha_2}$, $b_{\alpha_3\alpha_2}$, $c^{\dot\beta_3}{}_{\alpha_2}$ et $d^{\dot\beta_3}{}_{\alpha_2}$, aux relations ($5.12\,c$), où on a, dans celles-ci comme dans celles-là:

$$W = {}^{2}W - {}^{1}W \qquad \text{et} \qquad p = {}^{2}p - {}^{1}p\,. \qquad (5.23\,b)$$

(à suivre)