

Zeitschrift: Archives des sciences physiques et naturelles
Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève
Band: 27 (1945)

Artikel: Sur l'équation de Mathieu
Autor: Wavre, Rolin
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-742504>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 15.03.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Rolin Wavre. — *Sur l'équation de Mathieu.*

Différents physiciens ont rencontré dans des recherches récentes l'équation de Mathieu :

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + (c + a \cos x + b \sin x) u = 0 . \quad (1)$$

Je voudrais montrer ici combien sa solution est simple par les déterminants infinis, en lui appliquant la méthode de Hill et de von Koch. Il n'est même pas nécessaire de connaître la théorie de ces déterminants et nous indiquerons à la fin la solution par des développements en séries très rapidement convergentes.

L'équation (1) s'écrit sous deux formes simples en posant $z = e^{ix}$:

$$\frac{d^2 u}{dy^2} + (c + 2\lambda \cos y) u = 0 \quad (2)$$

$$z^2 \frac{d^2 u}{dz^2} + z \frac{du}{dz} - (c + \lambda z + \lambda z^{-1}) u = 0 . \quad (3)$$

Cette équation est invariante par la substitution $z' = z^{-1}$, de sorte qu'à la solution $u(z)$ correspond la solution $u\left(\frac{1}{z}\right)$.

Le théorème de Fuchs ne s'applique pas à (3) et la solution est de la forme

$$u(z) = z^\rho \sum_n D_n z^n , \quad -\infty < n < +\infty \quad (4)$$

la série convergeant pour toute valeur $z \neq 0$.

La substitution de (4) dans (3) donne le système d'équations

$$b_n D_{n-1} + D_n + a_n D_{n+1} = 0 \quad -\infty < n < +\infty \quad (5)$$

et les coefficients a_n et b_n sont de l'ordre de $|n|^{-2}$. Le déterminant

$$\delta = \begin{vmatrix} \ddots & & & & & \\ & b_{-1} & 1 & a_{-1} & & \\ & & b_0 & 1 & a_0 & \\ & & & b_1 & 1 & a_1 \\ & & & & \ddots & \ddots \end{vmatrix} = 0 , \quad \text{équation en } \rho , \quad (6)$$

est convergent et doit être nul. La solution de l'équation (4) est donnée par

$$u(z) = z^\rho \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & b_{-1} & 1 & a_{-1} & \cdot & \cdot \\ z^{-2} & z^{-1} & z^0 & z^1 & z^2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & b_1 & 1 & a_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

où l'on a remplacé dans le déterminant de (6) une ligne par les puissances de z . Voilà la solution de von Koch. Pour le calcul des coefficients D_n il y aura avantage à poser:

$$E_n = \begin{vmatrix} 1 & a_n & \cdot \\ b_{n+1} & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \quad E_{-n} = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & a_{-n-1} \\ \cdot & b_{-n} & 1 \end{vmatrix}$$

et l'on aura l'équation suivante pour exprimer $\rho = \rho(\lambda, c)$

$$\delta = b_0 a_{-1} E_{-2} E_1 - E_{-1} E_{+1} + a_0 b_1 E_{-1} E_2 = 0$$

et ensuite pour les inconnues:

$$D_n = (-1)^n b_1 \dots b_n E_{-1} E_{n+1}$$

$$D_{-n} = (-1)^n a_{-1} \dots a_{-n} E_1 E_{-n-1}.$$

Tout revient donc au calcul de déterminants de la forme:

$$E = \begin{vmatrix} 1 & e_1 & \cdot & \cdot \\ \varepsilon_1 & 1 & e_2 & \cdot \\ \cdot & \varepsilon_3 & 1 & e_3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \quad \text{qui, avec } x_i = -e_i \varepsilon_{i+1}, \text{ s'écrit}$$

$$E = 1 + \sum x_i + \sum x_i x_j + \sum x_i x_j x_k + \dots$$

avec $1 \leq i, i+1 < j, j+1 < k$, etc. La rapidité de la convergence est assurée puisque les x_i sont de l'ordre de i^{-4} .

Cette méthode s'étend aux équations considérées par M. J. Patry dans le cas où elles n'ont que deux points singuliers dans tout le plan complexe.