Zeitschrift: Archives des sciences physiques et naturelles
Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève
Band: 27 (1945)

Artikel: Sur l'équation de Mathieu
Autor: Wavre, Rolin
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-742504

Rolin Wavre. — *Sur l'équation de Mathieu.*

Différents physiciens ont rencontré dans des recherches récentes l'équation de Mathieu:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + (c + a \cos x + b \sin x) u = 0 \ . \tag{1}$$

Je voudrais montrer ici combien sa solution est simple par les déterminants infinis, en lui appliquant la méthode de Hill et de von Koch. Il n'est même pas nécessaire de connaître la théorie de ces déterminants et nous indiquerons à la fin la solution par des développements en séries très rapidement convergentes.

L'équation (1) s'écrit sous deux formes simples en posant $z = e^{ix}$:

$$\frac{d^2 u}{dy^2} + (c + 2\lambda \cos y) u = 0 \tag{2}$$

$$z^2 \frac{d^2 u}{dz^2} + z \frac{du}{dz} - (c + \lambda z + \lambda z^{-1}) u = 0 \ . \tag{3}$$

Cette équation est invariante par la substitution $z' = z^{-1}$, de sorte qu'à la solution $u(z)$ correspond la solution $u\left(\frac{1}{z}\right)$.

Le théorème de Fuchs ne s'applique pas à (3) et la solution est de la forme

$$u(z) = z^{\rho} \sum_{n} \mathrm{D}_n z^n \ , \qquad -\infty < n < +\infty \tag{4}$$

la série convergeant pour toute valeur $z \neq 0$.

La substitution de (4) dans (3) donne le système d'équations

$$b_n \mathrm{D}_{n-1} + \mathrm{D}_n + a_n \mathrm{D}_{n+1} = 0 \qquad -\infty < n < +\infty \tag{5}$$

et les coefficients a_n et b_n sont de l'ordre de $|n|^{-2}$. Le déterminant

$$\delta = \begin{vmatrix} \ddots & & & & & \\ & b_{-1} & 1 & a_{-1} & & \\ & & b_0 & 1 & a_0 & \\ & & & b_1 & 1 & a_1 \\ & & & & & \ddots \end{vmatrix} = 0 \ , \quad \text{équation en } \rho \ , \tag{6}$$

est convergent et doit être nul. La solution de l'équation (4) est donnée par

$$u(z) = z^{\rho} \begin{vmatrix} \cdots & & & & \\ \vdots\ b_{-1} & 1 & a_{-1} & & \\ z^{-2} & z^{-1} & z^{0} & z^{1} & z^{2} \\ & & b_1 & 1 & a_1 \vdots \\ & & & & \cdots \end{vmatrix}$$

où l'on a remplacé dans le déterminant de (6) une ligne par les puissances de z. Voilà la solution de von Koch. Pour le calcul des coefficients D_n il y aura avantage à poser:

$$E_n = \begin{vmatrix} 1 & a_n & \cdot \\ b_{n+1} & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \qquad E_{-n} = \begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & a_{-n-1} \\ \cdot & b_{-n} & 1 \end{vmatrix}$$

et l'on aura l'équation suivante pour exprimer $\rho = \rho(\lambda, c)$

$$\delta = b_0 a_{-1} E_{-2} E_1 - E_{-1} E_{+1} + a_0 b_1 E_{-1} E_2 = 0$$

et ensuite pour les inconnues:

$$D_n = (-1)^n b_1 \dots b_n E_{-1} E_{n+1}$$

$$D_{-n} = (-1)^n a_{-1} \dots a_{-n} E_1 E_{-n-1} .$$

Tout revient donc au calcul de déterminants de la forme:

$$E = \begin{vmatrix} 1 & e_1 & & & \cdot \\ \varepsilon_1 & 1 & e_2 & & \vdots \\ & \varepsilon_3 & 1 & e_3 & \vdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \quad \text{qui, avec } x_i = -e_i \varepsilon_{i+1}\text{, s'écrit}$$

$$E = 1 + \Sigma x_i + \Sigma x_i x_j + \Sigma x_i x_j x_k + \dots$$

avec $1 \leqslant i$, $i+1 < j$, $j+1 < k$, etc. La rapidité de la convergence est assurée puisque les x_i sont de l'ordre de i^{-4}.

Cette méthode s'étend aux équations considérées par M. J. Patry dans le cas où elles n'ont que deux points singuliers dans tout le plan complexe.