

Zeitschrift: Archives des sciences [1948-1980]
Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève
Band: 1 (1948)
Heft: 3

Artikel: La géométrie et la théorie de la connaissance
Autor: Rossier, Paul
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-739277>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 14.03.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

LA GÉOMÉTRIE

ET LA

THÉORIE DE LA CONNAISSANCE¹

PAR

Paul ROSSIER

(Avec 8 fig.)

La science mathématique ne limite pas son ambition à l'augmentation du nombre des propriétés connues. A ce mouvement d'extension des connaissances s'oppose une étude toujours plus sérieuse des bases de la science. Cette recherche prend une importance croissante, à mesure que d'autres domaines de l'activité de l'esprit prennent eux-mêmes la mathématique comme fondement. Le mathématicien a l'ambition d'offrir aux physiciens, aux chimistes, aux philosophes, et peut-être aussi aux biologistes et aux historiens, un domaine de la connaissance dont les points forts d'une part, les faiblesses d'autre part sont clairement dégagés. L'étude des fondements des sciences mathématiques est donc un sujet d'intérêt intellectuel général qui, de tout temps, a préoccupé les savants et les philosophes.

* * *

Dans cet ensemble de travaux, la géométrie présente un intérêt tout particulier, à cause de sa place dans la classification des

¹ Conférence faite à la Société de physique et d'histoire naturelle de Genève le 21 janvier 1947.

sciences d'une part, à cause des faces multiples de cette discipline, d'autre part. La géométrie, en effet, ne constitue pas une science unique; certains auteurs refusent même de parler de la géométrie, mais consacrent des exposés d'ensemble à l'étude des géométries. La géométrie peut être considérée comme une partie de la physique expérimentale; c'est la science des rayons lumineux, des règles, des ficelles tendues et des corps tournants; l'optique géométrique, son nom l'indique bien, une partie de la cristallographie et de la mécanique constituent des chapitres importants de cette géométrie physique et expérimentale. A un point de vue totalement différent, la géométrie constitue une science de raisonnement dont l'ambition est de ne faire aucun appel à l'expérience, une fois posées les propositions fondamentales. La géométrie est alors un chapitre et peut-être le plus simple et en même temps le plus perfectionné de la physique théorique.

Dans la plupart des classifications des sciences, on assigne à la géométrie une place intermédiaire entre la science des nombres, l'arithmétique, dirons-nous pour abrégé, et la physique car, en plus des propriétés des nombres, elle ne fait appel qu'à une unique notion, celle d'espace. Comme la logique ne semble pas pouvoir se passer de la notion de nombre entier, l'étude des fondements de l'arithmétique se confond passablement avec celle des bases de la logique. Dans cette matière, le recours à l'observation est réduit au minimum. L'arithmétique constitue un ensemble logique bien coordonné, quoique perfectible. L'évolution de la science des nombres est conditionné par le progrès de nos connaissances en logique ou à l'intérieur même de cette science. Si parfois la physique pose un problème mathématique nouveau, ce problème ne met pas en question les fondements de la science. En géométrie, au contraire, l'influence de la physique peut être beaucoup plus considérable. L'intérêt brusquement suscité pour les géométries non-euclidiennes et les métriques riemaniennes par l'élaboration de la théorie de la relativité est un exemple encore présent à la mémoire de beaucoup. Si le problème des fondements de la géométrie dialectique est purement spéculatif, il n'en est pas de même de celui de la constitution de la géométrie physique,

intimement lié à l'élaboration des sciences physiques. L'étude des bases de la géométrie physique est évidemment conditionnée par celle de la géométrie rationnelle. C'est à l'étude de quelques points des fondements de la géométrie rationnelle que nous consacrerons la suite de cet exposé.

* * *

Le caractère abstrait des sciences logiques en rend l'étude difficile à un esprit qui n'a pas subi un entraînement approprié. Souvent, le mathématicien réussit à alléger l'effort d'imagination nécessaire en opérant sur des images fictives ou matérielles qui représentent ses symboles. Souvent ces images sont d'ordre géométrique. Il n'y a pas là une propriété intrinsèque de la science de l'espace, mais bien un fait d'origine psychophysique. La vue est le plus perfectionné de nos sens. C'est ce qui rend si fréquent le recours à une figure plane, où seule la forme intervient et dont l'interprétation est facile.

* * *

L'étude des relations entre la science des nombres et celle des figures constitue la géométrie analytique. Cette science repose sur un postulat que nous appellerons le postulat d'isomorphisme: à toute propriété de la figure correspond une propriété de la fonction représentée et réciproquement. Dans l'étude de la géométrie analytique classique, le postulat d'isomorphisme est constamment employé dans le sens analyse vers géométrie. Dans ce sens, son emploi n'a jamais conduit à des difficultés logiques notables. Dans l'enseignement des éléments, souvent dans la recherche, le postulat d'isomorphisme est employé dans le sens géométrie vers analyse. Le mathématicien dit alors qu'il fait appel à l'intuition. L'emploi maladroit de cet artifice n'a pas été sans créer des difficultés; nous aurons l'occasion d'examiner plusieurs exemples de conclusions erronées où l'intuition est employée sans suffisamment de discernement. Le cas bien connu des fonctions continues sans dérivées, celui du conflit entre Cauchy et Chasles au sujet de l'emploi de certaines correspondances sont dans toutes les mémoires.

Si des savants de tout premier plan ont pu s'abuser eux-mêmes en se basant sur le postulat d'isomorphisme, à combien plus forte raison chacun ne doit-il pas se méfier de son intuition en matière logique et contrôler avec tout le soin désirable ses raisonnements, notamment ceux qui portent sur les sujets élémentaires; ce sont eux en effet qui sont le plus sensibles aux suggestions étrangères à la logique. Les mathématiciens sont les premiers à se méfier des appels à l'intuition. Cette attitude critique a conduit à de grandes découvertes dont l'importance dépasse le cadre des mathématiques.

En géométrie élémentaire, grâce aux images matérielles que donnent les figures, l'influence de l'intuition est considérable. La géométrie analytique, par la correspondance qu'elle établit entre les êtres géométriques et ceux relatifs aux nombres permet de ramener le problème de l'édification logique de la science à une question portant sur les nombres. En particulier, les géomètres ramènent le problème de la compatibilité logique de leur science à celui de même nature relatif aux nombres. Est-ce à dire que toute la géométrie est destinée à devenir analytique ? Les succès des anciens en géométrie pure, succès si considérables que l'algèbre même avait pris à cette époque un caractère géométrique accentué, le renouveau dont les études de géométrie pure ont été l'objet au commencement de la période moderne sous l'impulsion des Desargues, des Pascal, des Dürer, l'importance des problèmes philosophiques posés à la fin du dix-huitième siècle par le pressentiment qu'ont eu les Lambert, les Saccheri, de l'existence des géométries non-euclidiennes, la découverte explicite de ces géométries par les Gauss, les Bolyai, les Lobatschevski, les Riemann, les développements nouveaux dont la géométrie synthétique a été l'objet au XIX^e siècle sous l'impulsion des Chasles, des Steiner, des von Staudt, des Darboux, tout cela montre l'existence d'une géométrie indépendante, capable d'un développement considérable, par ses méthodes propres et cela sans appel nécessaire à la géométrie analytique. La plupart des malaises créés par les appels à l'intuition étaient dus à l'emploi inconsidéré de figures de la géométrie. Celui dû à l'emploi du postulat d'isomorphisme dans le sens géométrie vers analyse ne pouvait pas être

éliminé par une extension des connaissances géométriques. Conserver dans l'édifice de la science des points d'instabilité logique, si nous osons employer ce terme, c'était admettre que suivant son domaine d'application, la raison pouvait conduire à des incohérences. Cela est intolérable. Une recherche systématique des conditions de validité des propriétés géométriques fondamentales, un choix de celles des propositions qui devaient être considérées comme fondamentales était indispensable. Ces recherches sur les fondements de la géométrie ont beaucoup préoccupé les mathématiciens depuis un siècle. Les résultats sont considérables. Leur importance dépasse le cadre de la technique géométrique. La géométrie est devenue le type même de la science logique et axiomatique: elle constitue une base indispensable aux sciences physiques et chimiques en attendant peut-être de le devenir par leur intermédiaire pour les sciences de la vie.

* * *

L'étude complète des fondements de la géométrie suppose la solution préalable d'un problème qui touche à la métaphysique, celui de la nature de l'espace. Les deux opinions extrêmes en cette matière sont représentées par l'enseignement de Kant et les résultats des psychologues modernes. Kant soutenait l'idée de l'espace, forme imposée à priori à notre esprit. Au moins dans sa forme la plus accusée, cette opinion a été abandonnée à la suite de la découverte des géométries non-euclidiennes.

Les progrès actuels de la psychologie conduisent à considérer que les propriétés de l'espace sont acquises par l'enfant à la suite d'un nombre immense d'expériences effectuées déjà durant les premiers mois de la vie. Plus grand, l'enfant apprend à se conduire en évitant les chocs douloureux avec les corps solides. Ceci pourrait expliquer le rôle considérable du solide parfait dans l'élaboration de la science. Mais l'ensemble des expériences enfantines n'est pas seulement d'ordre géométrique, mais bien géométrico-mécanique. L'enfant craint plus la chute que le choc, presque toujours évitable, contre une paroi. La distinction des êtres purement géométriques de ceux qui sont liés aux phénomènes de la pesanteur exige un effort assez considérable.

Nombreuses sont les traces qui subsistent, surtout dans le langage, de l'époque de la confusion des deux groupes. L'assimilation si fréquente de la verticale et de la notion de perpendiculaire, le terme de base utilisé tant en géométrie plane que dans celle de l'espace en sont des exemples simples. Dans l'élaboration de sa science, l'enfant ne se contente pas d'observer, souvent il expérimente. On a pu observer des enfants qui, désirant empiler des objets aussi haut que possible, faisaient des essais de permutation des objets déjà en place afin de vérifier si le sommet, inaccessible dans un cas, le serait encore dans un autre. Dans notre langage savant, cela s'appelle vérifier expérimentalement la propriété commutative de l'addition.

A ce stade, la géométrie physique n'est encore qu'une collection de remarques : elle ne constitue pas encore une science. Pour cela, le recours à l'induction philosophique est indispensable. Celle-ci consiste à admettre que les mêmes circonstances étant réalisées, les mêmes conséquences s'ensuivront. Par exemple, si l'enfant a constaté un nombre suffisant de fois qu'une canne est fixée lorsqu'elle repose sur deux V matériels, il saura, sans savoir l'exprimer, mais sans exiger d'expérience nouvelle, que toute baguette analogue sera aussi fixée par l'appui sur deux V matériels, même si jamais, à sa connaissance, ceux-ci ou la baguette n'ont été utilisés pour un pareil essai.

Peu ou prou, la géométrie conserve ce caractère physique dans de nombreux esprits ; un entraînement approprié est indispensable pour réussir, et pas encore toujours, à faire abstraction de ces habitudes héritées de l'enfance.

* * *

Dès douze ans, disent les psychologues, l'enfant est capable de raisonner logiquement. Dès lors, la géométrie peut devenir une science de raisonnement. C'est elle qui nous intéressera désormais.

En géométrie élémentaire, les raisonnements sont toujours difficiles. Leur justification psychologique exige premièrement une distinction nette entre l'hypothèse et la conclusion ; il faut ensuite que la conclusion paraisse incertaine ou douteuse et

enfin que l'hypothèse semble plus sûre que la conclusion. Le problème logique est tout différent; il consiste seulement à savoir si une proposition en implique une autre; l'implication est une relation logique, sans aucun lien avec la réalité physique. En fait, le souvenir que laisse trop souvent la première étude de la géométrie est entaché d'un malaise; les difficultés semblent avoir été créées à plaisir et arbitrairement ou tout le problème paraît mal posé, être incohérent ou sans but bien clair. Ce malaise a une cause psychologique. Si les enfants sont capables de raisonnements logiques élémentaires dès l'âge de douze ans, ils sont loin d'être mûrs pour l'élaboration d'un édifice logique, pour la compréhension de la classification des propositions en hypothèses, axiomes ou postulats et en théorèmes reposant sur les premiers par l'intermédiaire d'une relation logique. Si ce jeu paraît du plus haut intérêt à l'adulte cultivé, cela n'est qu'à la suite d'efforts considérables. L'existence même de cet ensemble d'efforts laisse supposer que ces matières sont susceptibles de perfectionnements et c'est bien ce que montre l'étude de l'histoire de la science.

* * *

L'état le plus parfait d'une science logique est atteint lorsque celle-ci a été axiomatisée, et enfin lorsqu'il a été possible de montrer l'indépendance et la nécessité de tous les axiomes. Là encore, la perfection n'est atteinte nulle part et, notamment en géométrie, plusieurs systèmes d'axiomes se disputent les suffrages des intéressés. D'ailleurs, ainsi que nous le verrons, il ne semble pas qu'il soit possible d'assurer le caractère définitif d'une science sans la condamner peut-être à la stérilité, avec ceux des domaines de la connaissance qui s'appuient sur elle.

Pour voir d'un peu plus près les caractères d'une science axiomatique, relisons quelques lignes de Hilbert, extraites de ses *Fondements de la Géométrie*: « Nous imaginons, dit-il, trois différents systèmes d'objets: nous nommons points les objets du premier système et nous les désignons par A, B, C, ...; nous nommons droites les objets du deuxième système et nous les désignons par a , b , c , ...; nous nommons plans les objets du troisième système et nous les désignons par α , β , γ , ... »

Puis, plus bas: « Nous imaginons diverses relations entre les points, les droites et les plans; nous désignons ces relations par des mots tels que être sur, passer par, entre, parallèle, congruent, continu; la description de ces relations, précise et appropriée au but des mathématiques, est donnée par les axiomes. »

Ces quelques phrases montrent combien nous sommes éloignés des considérations psychologiques précédentes. Elles montrent que non seulement le géomètre s'interdit tout recours à l'expérience, mais qu'il renonce à toute description effectuée par l'intermédiaire d'une figure. Il s'efforce de faire abstraction de tout recours à l'intuition pour construire un édifice logique aussi pur que possible. Mais l'esprit humain possède un caractère d'unité qui l'empêche d'éliminer arbitrairement une de ses facultés. Qu'il le veuille ou pas, l'intuition subsiste chez le mathématicien et ce serait une grave erreur que d'en négliger les avantages ou d'en nier l'existence. L'intuition suggère les propositions, elle-même incitée à cela par des figures, des images, des objets. Mais l'intuition ne donne pas le moyen de déterminer si la proposition suggérée est toujours valable, ou mieux celui de préciser les conditions de validité de la proposition étudiée. Pour éliminer cette difficulté, on opère par l'artifice de l'exemple négatif. Ce procédé logique n'est pas spécifique à la géométrie.

Analysons le procédé de l'exemple négatif. Un théorème se présente sous la forme suivante: si un objet satisfait à diverses conditions données, D_1, D_2, \dots, D_n , il obéit à une conclusion C . Les questions les plus importantes que l'on se pose sur un tel énoncé sont relatives aux données D . Sont-elles toutes nécessaires? La liste en est-elle complète? Est-elle surabondante? Un théorème est bien connu si toutes les conditions nécessaires et suffisantes le sont elles-mêmes. La méthode de l'exemple négatif consiste en l'artifice qui consiste à construire un objet logique qui satisfait aux données D , mais pas à la conclusion C . On démontre ainsi la fausseté de la proposition considérée, même si celle-ci est suggérée par de nombreux motifs intuitifs.

Pour illustrer ce qui précède, nous allons examiner quelques cas particuliers de l'emploi de l'exemple négatif dans l'étude de la géométrie. Cette étude nous conduira à quelques remarques

relatives à la construction des systèmes d'axiomes dont l'intérêt dépasse la seule géométrie.

* * *

Nous basant sur l'observation intuitive, énonçons quelques propriétés des courbes. Soit A un point d'une ligne; prenons ce point pour centre d'un cercle de rayon arbitraire; l'observation suggère la proposition suivante: quelque petit que soit le rayon d'un cercle centré sur un point d'une courbe, il existe des points de la courbe intérieurs à ce cercle. Cette propriété exprime le caractère continu de la ligne.

Pour dessiner une ligne on déplace généralement une pointe matérielle; le mouvement de cette pointe est bien déterminé en chaque point de la courbe; ce mouvement est caractérisé géométriquement par la tangente à la courbe. L'intuition conduit à la proposition suivante: toute courbe représentable par le mouvement d'un point possède une tangente en chaque point. Mais la condition exprimée par les termes « représentable par le mouvement d'un point » est-elle nécessaire? Ne semble-t-il pas que toute courbe continue possède une tangente? D'une courbe qui possède une tangente on dit parfois qu'elle est régulière. Toute courbe continue n'est-elle pas régulière? On le croyait jusqu'à Weierstrass. Dans un instant nous verrons un exemple de courbe continue non régulière.

Deux autres suggestions dues à l'intuition sont les suivantes: Une ligne de longueur finie ne peut être disloquée de telle sorte que ses points occupent toute une surface; toute ligne tracée à l'intérieur d'une surface finie ne peut être de longueur infinie. Ici encore, nous allons voir que l'intuition est trompeuse.

Pour donner un exemple simple de courbe continue, sans tangente et dont tout arc est de longueur infinie, examinons la courbe de v. Koch. Construisons un segment de droite dirigé AB ; partageons-le en trois parties égales AC , CD , DB et, sur le tiers intermédiaire CD , construisons le triangle équilatéral CDE , placé à gauche de AB . Sur les quatre segments dirigés AC , CE , ED , DB , répétons la même construction, et cela indéfiniment. La courbe de v. Koch est le lieu des sommets des

triangles équilatéraux précédents. Cette courbe est continue, car à l'intérieur de tout cercle centré sur un point de la courbe il existe des sommets de triangles considérés. Pour essayer de tracer une tangente à la courbe, joignons deux de ses points P et Q par une droite. Relativement au côté de triangle équilatéral passant par P, cette sécante a deux directions extrêmes possibles; elle lui est superposée ou elle fait avec lui un angle de 30 degrés. Faisons varier le point Q de façon à le rapprocher de P; la sécante PQ oscille constamment entre ces deux

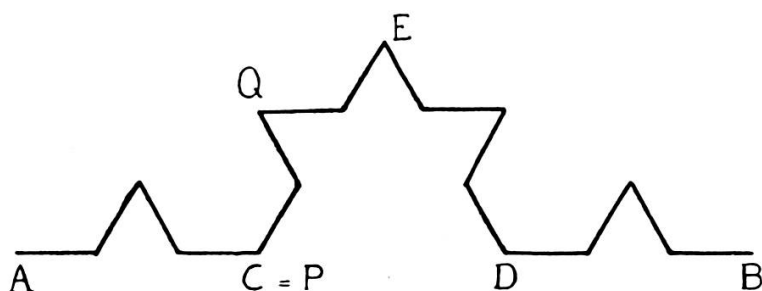


Fig. 1.

positions extrêmes sans jamais tendre vers une limite bien déterminée. Or comme la tangente est par définition la position limite de la sécante, si elle existe, la remarque précédente conduit à la conclusion que la courbe de von Koch ne possède aucune tangente en aucun de ses points. Malgré sa continuité, la courbe de von Koch n'est pas régulière.

Essayons de nous faire une opinion sur la longueur de la courbe comprise entre les deux points A et B. Remplacer le segment AB par le contour ACEDB, c'est en multiplier la longueur par $4/3$. Répéter cette opération indéfiniment, c'est multiplier indéfiniment la longueur AB par $4/3$, c'est-à-dire la faire croître au delà de toute limite. La longueur de la courbe comprise entre A et B est donc infinie; la proposition s'étend facilement à tout arc de la courbe. Toute la courbe est contenue à l'intérieur ou sur le contour du triangle ABE. Toute surface fermée contenant ce triangle à son intérieur contient aussi une infinité d'arcs de courbe de longueur infinie, ce qui met en défaut une seconde suggestion de l'intuition. Au contraire,

l'exemple cité montre que la continuité n'implique pas la régularité et qu'un arc de courbe de longueur infinie peut être imaginé à l'intérieur d'une portion finie de plan.

* * *

La courbe de von Koch va nous permettre une autre remarque paradoxale. Toute courbe, semble-t-il, doit être un lieu de points. Cependant, une courbe peut être engendrée par ses tangentes : plusieurs phénomènes d'optique, l'usage de la lime pour réaliser un contour métallique sont des exemples matériels de ce tracé d'une courbe par ses tangentes.

Les géomètres ont imaginé des transformations qui à tout point d'un plan font correspondre une droite de ce plan ; l'une des plus simples est celle dite par polaires réciproques. Soit un cercle de centre O et de rayon r ; au point P du plan, on fait correspondre la perpendiculaire à OP qui est éloignée du centre O d'une longueur x telle que le produit $x \cdot OP = r^2$.

Transformons la courbe de von Koch par polaires réciproques par rapport à un cercle de son plan ; la courbe initiale ne possède que des points et aucune tangente ; la transformée n'a que des tangentes et aucun point. Nous sommes ainsi conduits à la notion d'une courbe lieu de droites mais ne possédant aucun point ; ce résultat est en contradiction avec l'intuition.

* * *

Une autre courbe dont l'examen est suggestif est celle étudiée par Peano. Dans un plan, considérons un segment AB que nous prendrons comme unité de longueur. Déplaçons ce segment perpendiculairement à lui-même de sa propre longueur ; dans ce mouvement, le segment balaie un carré ; dans ce carré, on peut imaginer une infinité de positions distinctes du segment. Malgré cela, il est possible d'établir entre les points du carré et ceux du segment une correspondance telle qu'à tout point du segment correspond un point du carré et, réciproquement, qu'à tout point du carré, il correspond un point du segment.

Pour cela, divisons le segment AB en neuf parties égales AC , CD , ... KB . Divisons le carré en neuf carrés partiels par des

parallèles aux côtés et division en trois des côtés. Numérotions ces carrés partiels de 1 à 9 en commençant par celui ayant sommet en A: comme numéros 2 et 3 prenons les deux autres adjacents à AB; attribuons le numéro 4 à celui adjacent à 3, puis 5 et 6 aux deux, respectivement voisins de 2 et 1; quant aux numéros 7, 8 et 9, donnons-les à la dernière ligne de carrés,

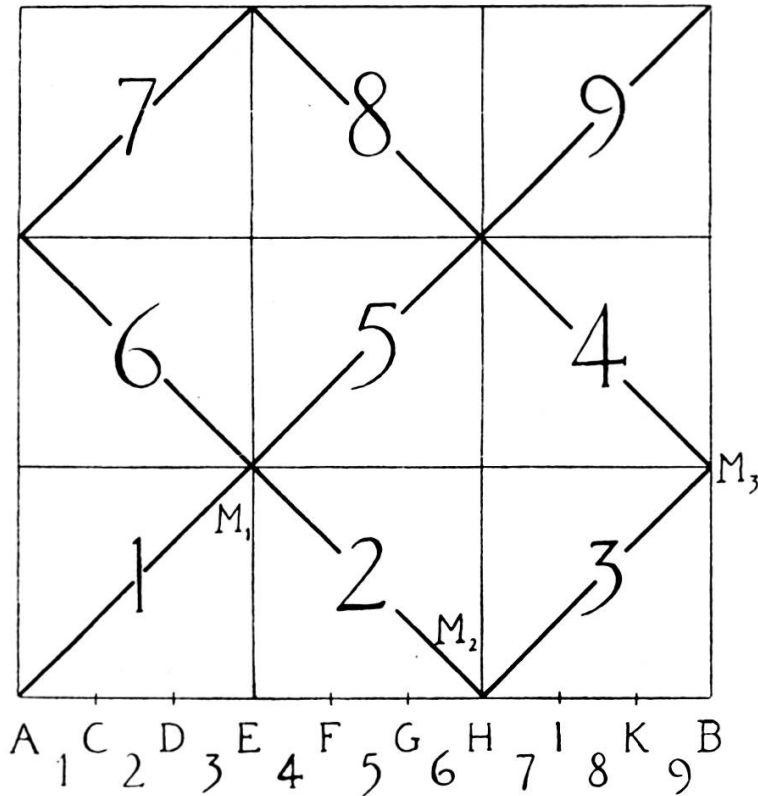


Fig. 2.

en commençant par celui adjacent à 6. Cela fait, menons les diagonales AM_1 du premier carré, M_1M_2 du deuxième, M_2M_3 du troisième, et ainsi de suite. Nous obtenons une ligne brisée $AM_1M_2 \dots$. A chacun des segments la composant, faisons correspondre le segment de même numéro pris sur AB. Cela fait, répétons la même construction sur chaque carré partiel et sur son segment correspondant, et cela indéfiniment. La ligne brisée passe arbitrairement près de tout point intérieur au carré primitif: elle occupe donc tout ce carré; à chacun des segments qui la composent, correspond un segment bien déter-

miné de AB, et réciproquement, à tout segment infiniment petit de AB correspond un segment infiniment court pris à l'intérieur du carré primitif. En quelque sorte, le segment primitif a été disloqué en ses composants infinitésimaux et ceux-ci répartis sur le carré de façon à le recouvrir en entier. Ici encore, la conclusion a un caractère paradoxal dû à la contra-

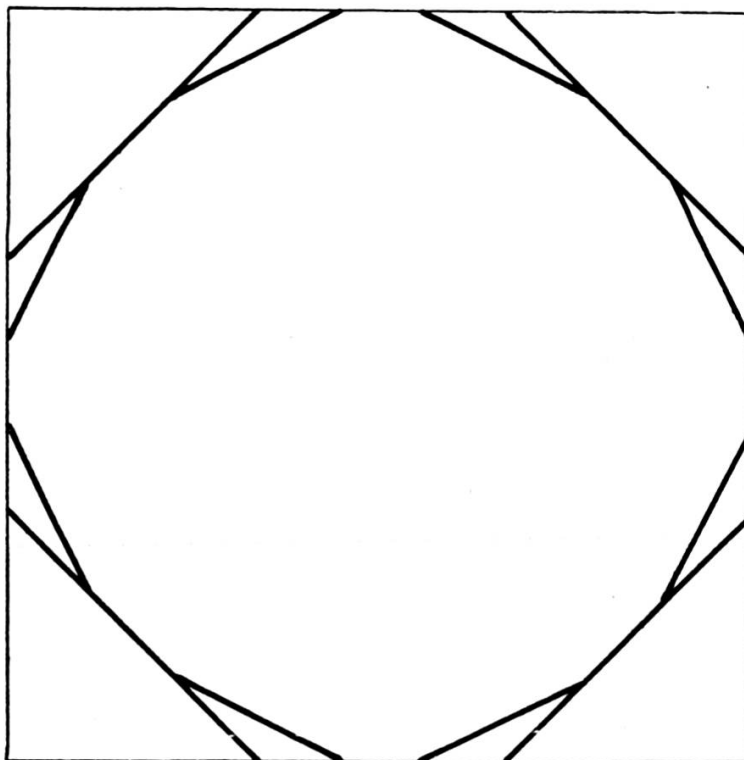


Fig. 3.

diction entre l'intuition et l'étude logique. La notion intuitive de courbe est plus restreinte que celle fournie par la raison, à condition d'employer la notion de passage à la limite. Or le passage à la limite est indispensable à la géométrie élémentaire. L'esprit répugne à l'idée d'imposer une limitation à l'emploi d'une de ses opérations fondamentales.

* * *

Certains problèmes pratiques conduisent parfois à des êtres mathématiques d'une complication inattendue. Citons par

exemple une courbe étudiée récemment par M. de Rham¹. Rien ne semble plus inoffensif au point de vue mathématique qu'un manche d'outil. Cependant, l'étude de la construction de ce manche va être fort instructive. Pour tailler un manche « rond », l'ouvrier part d'un prisme de bois de section carrée. Divisant longitudinalement chaque face en trois parties égales, il abat les coins et, sur l'octogone irrégulier ainsi obtenu, il répète l'opération de division en trois et d'ablation de l'arête. L'étude mathématique de la courbe vers laquelle tend la section droite du manche, lorsque l'opération est indéfiniment répétée, conduit aux conclusions suivantes. La courbe est continue; elle possède partout une tangente. Etudions son cercle de courbure en un point quelconque. On sait que pour bien tracer une courbe, le dessinateur la remplace souvent par une suite d'arcs de cercles; on conçoit qu'en augmentant indéfiniment le nombre de ses arcs, il doit être théoriquement possible de tracer la courbe avec une précision indéfinie. Or l'étude de notre courbe montre l'impossibilité de la construction de ce cercle en une infinité de points de tout arc de la courbe, mais pas en tous. Cette impossibilité est due au fait suivant. Pour que la détermination de cercle de courbure soit possible, il faut que la tangente à la courbe varie de façon continue; cela n'est pas le cas en un point anguleux. Or la construction même de la courbe considérée multiplie indéfiniment ces points singuliers.

* * *

Nous venons de voir quelques cas où la méthode de l'exemple négatif exclut la compatibilité de certaines propositions. Le procédé peut aussi fournir des résultats positifs et montrer la nécessité d'avoir recours à certains axiomes pour l'élaboration de la science. On prouve en même temps l'indépendance de cet axiome de ceux qui ont pu être énoncés précédemment.

Par exemple, pour montrer la nécessité et l'indépendance de l'axiome dit d'Archimède, nous allons examiner la notion

¹ *Revue de mathématiques élémentaires*, II, n° 4, p. 73; n° 5, p. 89, 1947.

d'angle lunaire de Klein. L'axiome d'Archimède a la teneur suivante: par multiplication d'une grandeur on peut atteindre toute grandeur finie de même nature. Par exemple par multiplication d'un angle, on doit pouvoir atteindre tout angle donné. Cela est vrai pour la notion ordinaire d'angle, mais suivant ce que l'on entend par ce terme, la proposition n'est

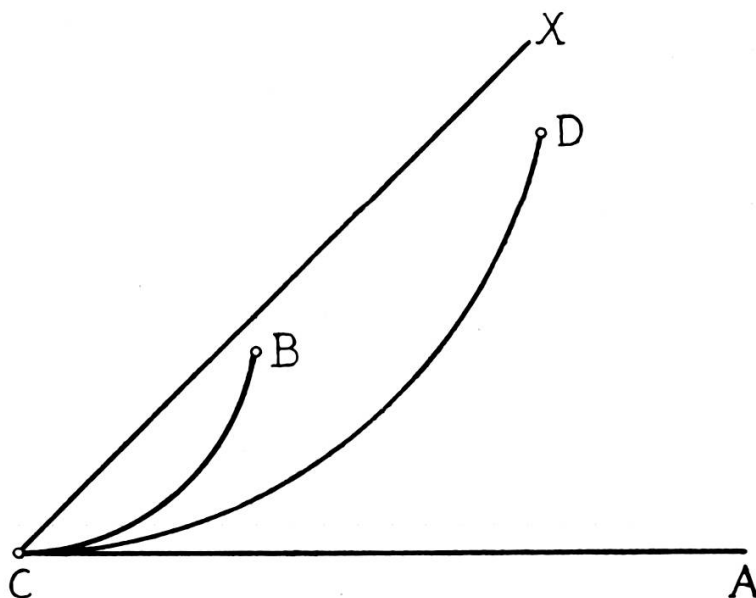


Fig. 4.

pas toujours vraie. Dans un plan, considérons tous les cercles qui passent par un point C , les droites comprises, car elles constituent des cercles de courbure nulle. Appelons angle lunaire l'espace compris entre deux d'entre eux. Pour alléger l'exposé, contenons-nous d'examiner les angles lunaires dont l'un des côtés est la droite CA . Définissons l'inégalité de deux angles lunaires. De deux angles lunaires ACB et ACD , le plus petit est celui dont le second côté CB ou CD est le plus voisin de CA , au voisinage de C . De tous les angles lunaires de côté CA , tous ceux dont le second côté est tangent à CA sont moindres que l'un quelconque de ceux dont le second côté CX est rectiligne. Pour la suite, seuls présentent de l'intérêt les opérations effectuées sur les angles lunaires dont le second côté est un cercle tangent à CA . Définissons l'addition de tels angles. Soient b et d les rayons des cercles constituant les seconds

côtés des angles lunaires ACB et ACD. L'angle lunaire ACE sera dit la somme des deux angles ACB et ACD si le rayon e du cercle qui constitue son second côté est donné par l'équation $1/e = 1/b + 1/d$. C'est dire que la courbure du cercle de rayon e est égale à la somme des courbures des deux autres. De ce qui précède, on tire facilement la multiplication par un entier. Le n -uple d'un angle lunaire a pour second côté un cercle de rayon n fois moindre que celui de l'angle multiplié. Quel grand que soit n , cet angle lunaire ne sera jamais égal ou supérieur à tout angle lunaire ACX de second côté rectiligne. Les angles lunaires constituent donc un ensemble d'objets logiques n'obéissant pas à l'axiome d'Archimède. Celui-ci est donc indépendant des axiomes d'addition ou de multiplication. En développant un tel système logique, on aboutit à la constitution de ces géométries non-archimédiennes dont l'élaboration a été l'une des œuvres du dernier demi-siècle.

* * *

L'exemple précédent montre le géomètre profitant de l'ambiguïté de l'objet « angle » pour résoudre un problème de relation logique. Cet artifice de l'emploi d'une notion analogue à une notion courante, mais distincte tout de même, est très fréquent dans l'étude des fondements de la géométrie. Dans ses travaux de philosophie scientifique, Poincaré, par exemple, démontre comme suit la compatibilité logique de la géométrie non-euclidienne. Considérons dans un plan, dit-il, une droite a et l'ensemble de tous les demi-cercles c dont le centre est un-point de a et qui sont situés dans l'un des deux demi-plans déterminés par a . Appelons pseudo-droites ces demi-cercles; ces pseudo-droites satisfont aux propriétés fondamentales des droites : deux de ses points déterminent une pseudo-droite; deux pseudo-droites, si elles se coupent, le font en un point. Appelons pseudo-distance de deux points une fonction appropriée (le logarithme du rapport anharmonique) des deux extrémités du segment considéré et des deux intersections de la pseudo-droite passant par elles avec la droite a . La fonction choisie est telle que la pseudo-distance d'un point quelconque d'une pseudo-droite à

l'une des intersections de celle-ci avec la droite a est infinie. Si nous considérons comme parallèles deux pseudo-droites qui ont un point commun sur la droite a , donc à l'infini, on constate que toute droite possède deux parallèles passant par un point donné. La géométrie des pseudo-droites est une géométrie de Lobatschewski, puisque l'axiome caractéristique de cette géométrie est l'existence de deux parallèles à une droite passant par un point donné. Supposons cet axiome incompatible avec les autres axiomes de la géométrie; c'est dire qu'il est possible

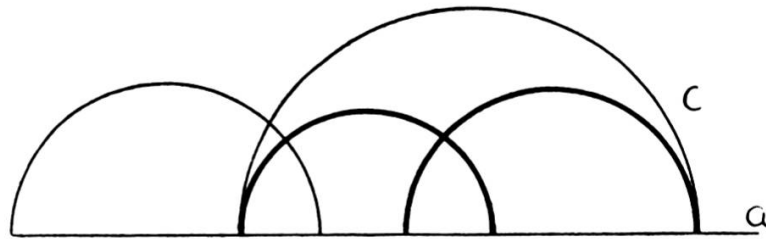


Fig. 5.

de découvrir une proposition, basée entre autres sur cet axiome, qui est en contradiction avec une conséquence des autres axiomes de la géométrie. Si cela était, on trouverait deux propriétés contradictoires relatives aux pseudo-droites de Poincaré, donc aux systèmes de cercles orthogonaux à une droite donnée. Une contradiction dans la géométrie plane de Lobatschewski en impliquerait donc une dans la géométrie euclidienne ordinaire. L'échec logique de l'une de ces géométries entraînerait celui de l'autre. Comme nous avons de bonnes raisons d'admettre la compatibilité logique de la géométrie euclidienne, la géométrie non-euclidienne de Lobatschewski a la même droit à l'existence logique que cette géométrie euclidienne.

* * *

Un autre sujet moins connu que l'exemple précédent est le rôle de la proposition de Desargues relative aux triangles homologues et ses relations avec la « dimensionnalité » de de l'espace. La proposition de Desargues est la suivante: Si, dans un plan, deux triangles se correspondent de telle sorte

que leurs côtés homologues ont leurs points d'intersection alignés, les sommets correspondants sont alignés sur un point. Cet énoncé ne fait appel qu'aux propriétés d'incidences de droites et de points; il n'exige aucune connaissance des notions métriques de longueur, d'angle ou d'égalité de triangles. Si dans l'énoncé précédent, on remplace les mots « dans un plan » par l'expression « dans l'espace », et que l'on exclue ainsi le cas de la coplanarité des deux triangles, la proposition est presque évidente, comme résultant de la section par deux plans d'une surface pyramidale. Admettant la proposition dans l'espace, il est facile de la démontrer dans le cas du plan, par deux applications successives de la propriété de l'espace. On obtient ainsi le théorème de Desargues relatif aux triangles homologues. Mais la proposition relative aux triangles plans exclut dans son énoncé tout recours à l'espace. Une sorte d'intuition logique conduit à chercher une démonstration du théorème relatif au plan basée, comme celle relative à l'espace, sur les seules relations d'incidence, donc indépendante des axiomes métriques. Cette démonstration n'existe pas, car, si elle existait, elle impliquerait une contradiction dans la géométrie de certains groupes de cercles.

Voici comment Hilbert démontre cette affirmation. Considérons une ellipse d'axes a et $2a$, et sur le grand axe, un point F distant du centre de la courbe de $3a$. On démontre que si un cercle passe par F , et s'il coupe l'ellipse, il ne le fait jamais en plus de deux points. Dans le plan de l'ellipse, traçons une droite d qui coupe l'ellipse en deux points D et D' . Menons le cercle FDD' et appelons pseudo-droite la ligne formée par les deux demi-droites portées par d , d'extrémités D et D' , extérieures à l'ellipse et l'arc DD' du dernier cercle. Si D et D' sont confondus ou n'existent pas, la pseudo-droite est confondue avec la droite. En particulier, le grand axe de l'ellipse est une pseudo-droite.

Le petit axe et un diamètre quelconque de l'ellipse portent tous deux une pseudo-droite et l'on vérifie facilement que l'intersection de ces deux pseudo-droites n'appartient pas au grand axe. Les trois pseudo-droites portées par le grand axe, le petit axe et un diamètre quelconque ne sont donc pas con-

courantes, tandis que les droites qui les portent le sont. Sur chacune de ces trois droites, marquons une paire de points; nous formons ainsi deux triangles dont les sommets sont alignés sur le centre de l'ellipse; selon le théorème de Desargues, les intersections des côtés homologues de ces triangles sont alignées sur une droite m ; en choisissant les sommets des triangles de façon appropriée, on pourra faire que la droite m et les triangles soient entièrement extérieurs à l'ellipse. Les

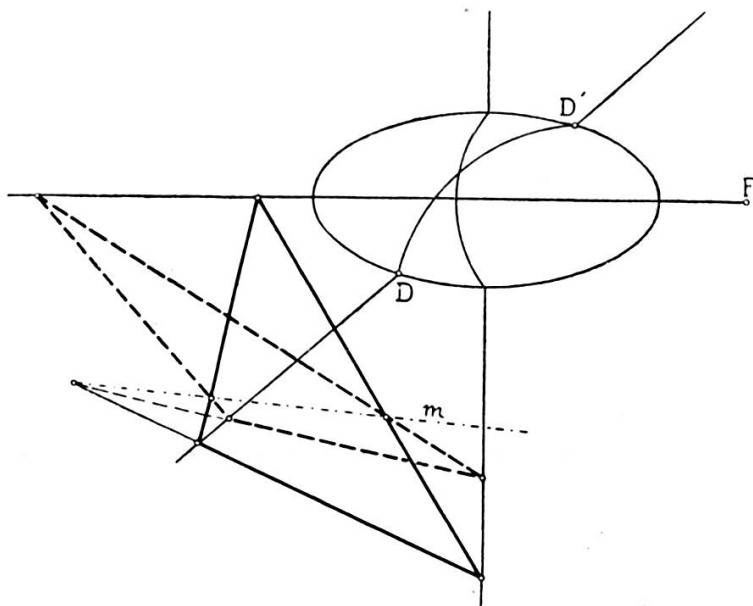


Fig. 6.

triangles et m appartiendront donc à notre système de pseudo-droites. Les deux triangles obéiront à l'hypothèse du théorème de Desargues mais pas à la conclusion. Ce théorème ne saurait donc résulter de la seule considération des axiomes plans d'incidence.

Ces remarques sont d'un intérêt capital lorsqu'on se propose de constituer l'ensemble des axiomes de la géométrie projective plane. La géométrie projective est celle qui limite son ambition à l'étude des propriétés d'incidence et d'alignement. Dans cette géométrie, le recours au théorème de Desargues est indispensable et fréquent. Comme sa démonstration est impossible en géométrie plane, cette proposition devra être admise comme postulat. Supposons au contraire que l'on aborde immédiate-

ment l'étude de la géométrie projective de l'espace. Le fait d'admettre les axiomes d'incidence relatifs aux plans implique le théorème de Desargues. Nous avons donc l'exemple d'une propriété qui est un théorème en géométrie de l'espace et un axiome en géométrie plane. A un certain point de vue, la géométrie de l'espace est donc logiquement plus simple que la géométrie plane.

* * *

La notion de dimension apparaît encore dans un autre domaine encore plus simple. Examinons les propriétés des points d'une droite et, à leur sujet, le groupe des trois axiomes dits de l'ordre :

1. Si A, B et C sont trois points d'une droite, et que B soit entre A et C, B est entre C et A et n'est ni A ni C.

2. Si A et C sont deux points d'une droite, il y a toujours sur la droite au moins un point B situé entre A et C et au moins un point D tel que C est entre A et D.

3. De trois points d'une droite, il n'y en a qu'un qui est entre les deux autres.

Si l'on se propose d'étudier la géométrie des points de la droite, en faisant abstraction de tout point extérieur à celle-ci, on a besoin de la proposition suivante :

4. Si l'on donne sur une droite un nombre quelconque de points, ceux-ci peuvent être mis dans l'ordre A, B, C, ... L, de telle sorte que

B est entre A et les autres points C, D, ... et L,

C est entre A et B d'une part et D ... L, d'autre part, et ainsi de suite.

En faisant usage des propriétés du plan, la proposition 4 peut être démontrée en s'appuyant sur les trois premières et les axiomes du plan. Par contre on ne connaît pas de démonstration de cette propriété basée exclusivement sur les axiomes de la droite et l'on ignore si cette démonstration est possible.

* * *

Les deux derniers cas étudiés montrent avec quel soin doit être élaboré un système d'axiomes. En effet, adjoindre à la géométrie de la droite celle du plan fait passer certaines propositions du rang d'axiome à celui de théorème; le même fait se présente lorsqu'on adjoint la géométrie de l'espace à celle du plan. On peut se demander si la seule extension à l'espace tridimensionnel suffit pour simplifier au maximum notre système d'axiomes. Ce que l'on sait, dans l'état actuel de nos connaissances, c'est que l'emploi de l'hyperespace est fécond en ce sens qu'il permet de trouver parfois des démonstrations simples et brèves pour des propriétés de l'espace ordinaire, mais il est impossible de répondre de façon satisfaisante à la question posée ci-dessus. Baser toute la géométrie sur celle de l'hyperespace pour passer ensuite à l'étude des applications à l'espace ordinaire est évidemment une opération fort belle de l'esprit. Riemann a été un initiateur en cette matière et les physiciens théoriciens ont largement profité de ces travaux qui ont pris un caractère fortement analytique et algébrique. Du point de vue strict de la géométrie logique, le travail reste à faire. Il est délicat et peut paraître quelque peu factice, car, dans le fond, le rôle des espaces physiques observables n'est jamais totalement éliminé par l'esprit.

* * *

Un exemple typique du rôle de ces modèles est celui du ruban de Mœbius. Si à une personne non avertie on pose la question de savoir si une surface possède deux côtés, la réponse risque fort d'être un haussement d'épaules. Ici encore toute dépend du sens que l'on donne à la question. Dans une région suffisamment petite de la surface, l'observation montre bien l'existence des deux faces, dont l'une, pour suivre une suggestion de M. Wavre¹, pourra être couverte de « oui » et l'autre de « non ». Mais si l'on ne fait pas la restriction exprimée par les termes « dans une région suffisamment petite », il peut devenir impos-

¹ Rolin WAVRE, *La logique amusante*, p. 10. Ed. du Mont-Blanc, Genève, 1946.

sible de distinguer le côté des « oui » de celui des « non ». Pour le montrer, Mœbius a imaginé l'opération suivante. Soit un rectangle de papier ABCD, où AB et CD sont les grands côtés, BC et DA les petits. Courbons la feuille de telle sorte que les deux extrémités A et C d'une part, B et D d'autre part des deux diagonales soient confondues et collons l'un sur l'autre les côtés BC et DA. La surface obtenue est telle que si l'on commence à couvrir de « oui » l'un de ses côtés, on en recouvre toute

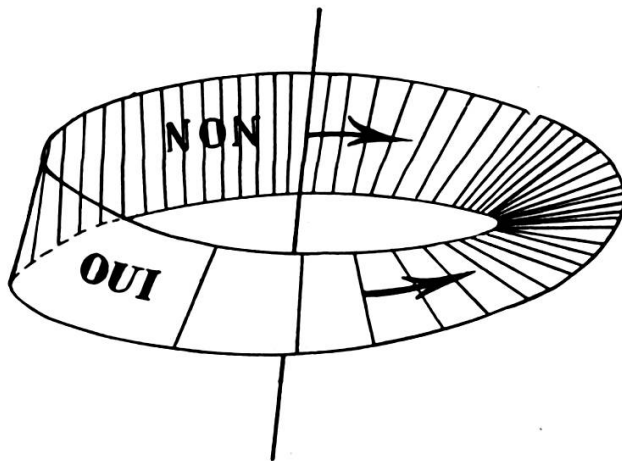


Fig. 7.

la surface, des deux côtés, sans jamais franchir de bord. D'un point de vue global, la surface de Mœbius constitue une surface à un seul côté.

On pensera qu'il ne s'agit là que d'une curiosité sans application. Il n'en est rien; les praticiens font parfois usage de pareilles surfaces. Si l'on suit attentivement une ligne téléphonique posée sur les poteaux d'une ligne de tramway, on constate qu'à intervalles réguliers, les deux fils du téléphone sont permutés afin d'obtenir que le flux magnétique dû à la ligne principale soit inversé de place en place; on élimine ainsi des forces électromotrices d'induction qui empêcheraient tout emploi de l'appareil sensible qu'est le téléphone.

* * *

La démonstration donnée plus haut de façon expérimentale par le ruban de Mœbius ne peut satisfaire entièrement le

mathématicien. Darboux a démontré rigoureusement d'une catégorie considérable de surfaces qu'elles sont à un seul côté, et cela par la méthode analytique. Au fond, sa démonstration repose sur une remarque dont un cas élémentaire revient à la question suivante: qu'est-ce que l'intérieur d'un 8 ? Imaginons un observateur qui décrit l'une des boucles de façon à en avoir constamment l'intérieur à sa gauche. Au moment où il franchit le point de croisement, supposons qu'il continue à considérer l'intérieur comme étant à gauche. Il appellera extérieur du 8 le domaine qui, après parcours complet de la courbe, n'aura jamais été à sa gauche: dans ce cas l'extérieur du 8 serait ce que nous appelons l'intérieur de la boucle d'où l'observateur n'est pas parti. Le caractère paradoxal de cette conclusion provient du fait que l'on a franchi sans précaution le point de croisement. Ce point constitue ce que le mathématicien appelle une singularité de la courbe. Le rôle des singularités est très important dans un grand nombre de problèmes. C'était le cas dans la courbe de von Koch. Ce sera aussi le fait de négliger l'importance des singularités qui donnera un caractère paradoxal à un dernier exemple, relatif à la géométrie de l'espace que nous proposons d'examiner, celui des surfaces développables non réglées.

* * *

Les surfaces développables sont celles que l'on peut obtenir par déformation d'un plan, sans allongement ou rétrécissement des lignes qui y sont tracées, sans déchirure ni duplication. On voit facilement que si l'on mène toutes les tangentes à une courbe de l'espace, la surface ainsi engendrée est développable. Cette sorte de surface développable comporte une infinité de génératrices rectilignes. Sur toute surface développable, les théorèmes de la somme des angles des triangles ou celui de Pythagore sont vrais. Peut-on affirmer que toute surface développable possède des génératrices rectilignes ? Beaucoup de géomètres l'ont admis, sans songer à expliciter l'hypothèse qu'ils faisaient de n'envisager que des surfaces sans points singuliers. Cependant, il existe des surfaces applicables sur le plan qui ne contiennent pas de droites, surfaces dont, dit

M. Bouligand, une feuille de papier indéfiniment froissée nous donne l'intuition. Même ainsi que l'a montré M. Lebesgue, les

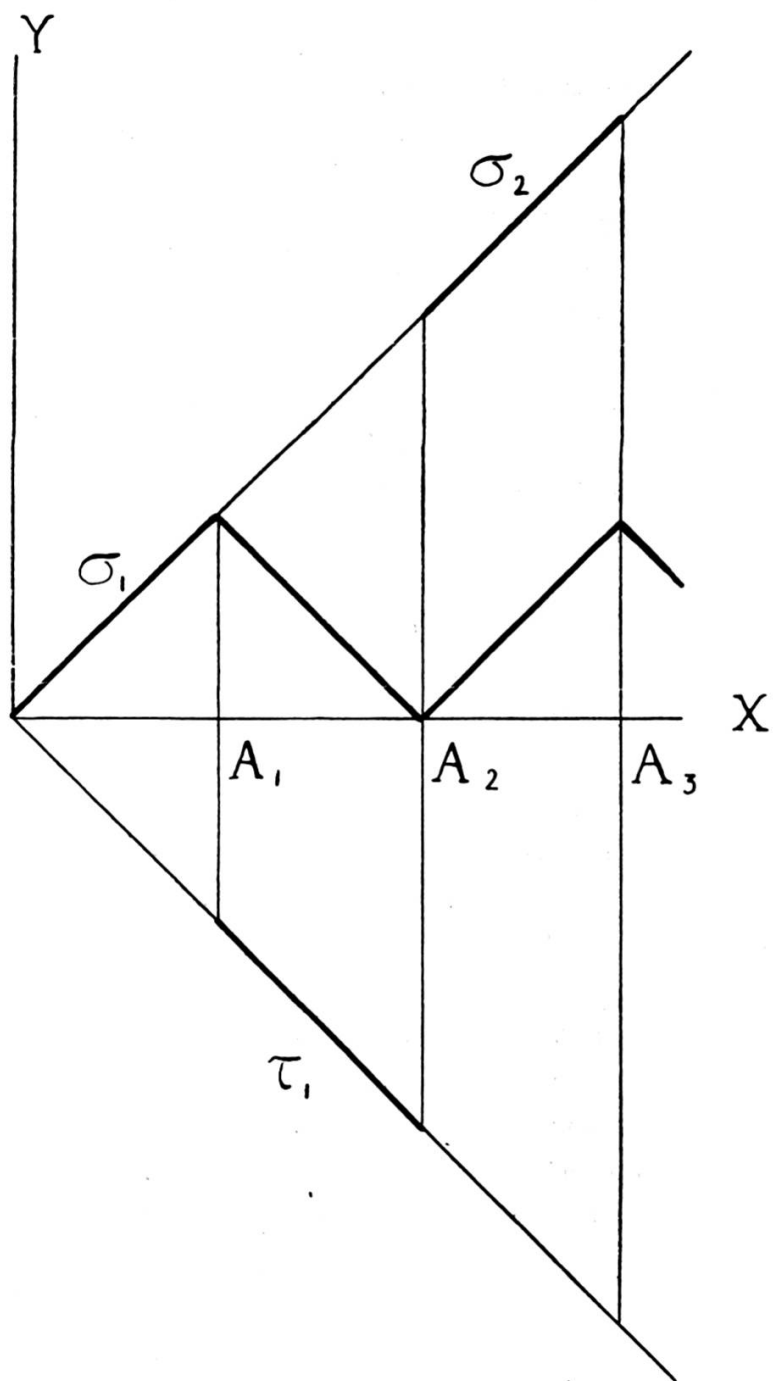


Fig. 8.

tangentes à la courbe gauche n'engendrent-elles une surface développable qu'en l'absence de certaines singularités.

Pour donner un exemple géométrique d'une surface développable sans génératrices rectilignes, considérons un système d'axes rectangulaires XOY de la géométrie analytique élémentaire. Traçons les deux demi-droites issues de l'origine situées à droite de l'axe des x et faisant un angle de 45° avec cet axe. Faisons tourner la figure autour de l'axe des y . On engendre ainsi les deux nappes σ et τ d'un cône de révolution. Coupons le cône par des cylindres de révolution d'axe OY et qui coupent l'axe OX et les points successifs A_1, A_2, A_3, \dots . Sur le demi-cône σ retenons les portions $\sigma_1, \sigma_2, \dots$ respectivement comprises entre le sommet O et le cylindre par A_1 , entre les cylindres par A_2 et celui par A_3 , puis entre A_4 et A_5 et ainsi de suite. Sur la seconde nappe τ , retenons les portions τ_1, τ_2, \dots respectivement comprises entre les cylindres par A_1 et A_2 , celle entre A_3 et A_4 et ainsi de suite. Le petit parallèle d'une portion σ a même grandeur que le grand de la portion τ . Il en est de même pour le grand parallèle d'une portion τ et le petit d'une région σ . Déplaçons chacune des portions parallèlement à l'axe OY, de façon à superposer les parallèles égaux. On obtient ainsi une surface de révolution à rigoles concentriques. Cette surface est évidemment développable, puisque les cônes le sont. Elle ne contient aucune droite, mais bien des segments de droite de longueur inférieure à une certaine limite, proportionnelle à la plus grande des distances qui séparent deux consécutifs des points A. En réduisant suffisamment cette distance maximum, on trouvera que notre surface développable ne porte aucun segment de longueur supérieure à une valeur donnée d'avance. Nous avons bien construit une surface développable non réglée, mais celle-ci comporte une infinité de points singuliers sur les parallèles de raccordement des diverses régions σ et τ .

* * *

Allonger la liste de ces exemples serait fastidieux. Ce qui précède suffit pour justifier quelques conclusions relatives à l'établissement des bases d'une science logique et peut-être aussi pour montrer l'influence constante des progrès d'une science nouvelle sur la science déjà établie.

L'idéal de toute science est de devenir aussi déductive que possible. Pour cela, il faut choisir comme point de départ un ensemble d'axiomes appropriés. Ce choix est suggéré par l'intuition. Celle-ci est incapable de distinguer entre les axiomes compatibles et ceux qui ne le sont pas : il lui est même fort difficile d'explicitier tous les axiomes qui réellement sont utilisés. Seul un travail de critique permet cette mise en ordre des propositions. Pour être entièrement satisfaisant, un système d'axiomes devrait être total, c'est-à-dire englober toute la science actuelle et future. En effet, toute découverte nouvelle, toute extension de la science peut conduire à une révision de la science déjà construite, ainsi que nous l'a montré l'exemple du passage de la géométrie linéaire à celle du plan, puis ensuite l'extension à l'espace. Des sciences autres que celle du nombre, la géométrie est la seule dont l'axiomatisation soit quelque peu avancée. De ce fait, elle constitue un modèle pour la physique avec laquelle elle a des liens nombreux et intimes. La physique ne saurait se passer de la notion d'espace. Les progrès de la physique ont été rapides depuis le commencement de notre siècle, à tel point qu'à deux reprises au moins, par l'introduction de la relativité et celle des quanta, les physiciens ont dû reconstruire leur science. Ces adjonctions à l'axiomatique géométrique de domaines appartenant à la physique peuvent être considérées comme des extensions analogues à celles déjà étudiées en géométrie et que nous venons de rappeler. Dans ces conditions, parler d'un système total d'axiomes est une impossibilité, ou cela est contraindre la recherche scientifique à la stérilité. De ces considérations résulte la conclusion de l'état de problème ouvert qu'est celui des bases logiques de la science. Il ne semble pas qu'il soit possible de prouver le bien-fondé définitif de nos édifices logiques scientifiques. C'est au contraire à une révision constante des concepts fondamentaux qu'il faut nous attendre, révision d'autant plus nécessaire que les progrès de nos connaissances seront plus rapides.

Si la spécialisation a été, est et probablement sera encore une condition nécessaire de progrès dans les techniques scientifiques, elle risque, à elle seule d'entraîner une transformation de la science en une magnifique collection de techniques, chacune

pleine d'intérêt; derrière cet ensemble risque de disparaître le but même de l'activité de la pensée, but qui ne peut être qu'un essai toujours plus approfondi de découverte des liens et des coordinations entre les divers êtres dont notre univers est le siège, dans ce qui nous paraît actuellement posséder la forme matérielle, autant que dans le domaine de l'abstraction et enfin entre la matière et l'abstraction. L'étude de l'histoire de la pensée humaine montre que toujours les périodes de fécondité, même dans la technique appliquée, ont été celles où la recherche désintéressée a été le plus poussée. Les progrès de la recherche exigent une mise en ordre des résultats. Celle-ci est l'œuvre des logiciens.
