

**Zeitschrift:** Archives des sciences [1948-1980]  
**Herausgeber:** Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève  
**Band:** 11 (1958)  
**Heft:** 1

**Artikel:** Parallélismes affin et cayleyen  
**Autor:** Rossier, Paul  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-738801>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 30.03.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

5. CITA, M. B. (1953), Studi stratigrafici sul Terziario subalpino lombardo. Nota I: Introduzione allo studio del Terziario lombardo. *Riv. it. Pal. Strat.*, LIX, 4, 157-171 <sup>1</sup>.
6. HAGN, Herbert (1956), Geologische und paläontologische Untersuchungen im Tertiär des Monte Brione und seiner Umgebung (Gardasee, Ober-Italien). *Palaeontographica*, 107, A, 3-6, 67-210 mit Taf. 7-18 u. 8 Abb. im Text.
7. KUHN-SCHNYDER, Emil und Louis VONDERSCHMITT (1953), Geologische und paläontologische Probleme des Südtessins. *Ecl. geol. helv.*, 46, 2, 223-236 mit 2 Textfig. u. 1 Taf. (XII).
8. SCHWEIGHAUSER, Jakob (1953-1954), Mikropaläontologische und stratigraphische Untersuchungen im Paleocaen und Eocaen des Vicentin (Norditalien). *Schw. Pal. Abhandlungen*, 70, 1-97 mit einer Tabelle und 12 Tafeln.
9. VILLA, F. A. (1955), Studi stratigrafici sul Terziario subalpino lombardo. Nota IV: Gli affioramenti terziari a sud del lago di Varese. *Riv. it. Pal. Strat.*, LXI, 2, 66-87 con 3 tav. e 2 fig.
10. — (1956), Studi stratigrafici sul Terziario subalpino lombardo. Nota VI: Microfaune e microfacies del Nummulitico di Travedona (Varese). *Riv. it. Pal. Strat.*, LXII, 2, 109-118 con 3 tav.

*Cartes.*

11. *Carta geologica d'Italia al 1: 100.000*, F. 31, 32, 33, Varese (1932), Como (1937), Bergamo (1954).
12. *Tektonische Karte des Gebietes zwischen Lugano und Como 1: 100.000*, Taf. XII, *Ecl. geol. helv.*, 46, 2, 1953.
13. *Carta geologica generale della Svizzera 1: 200.000*, F. 7, Ticino, 1955.

**Paul Rossier.** — *Parallélismes affin et cayleyen.*

1. — En géométrie cayleyenne plane, les perpendiculaires à une droite ne sont pas parallèles; elles convergent au pôle de la droite par rapport à la conique absolue. Des parallèles cayleyennes se coupent en un point de cette conique.

En géométrie euclidienne, au contraire, les perpendiculaires à une droite sont parallèles. Or on considère souvent la géométrie euclidienne comme un cas particulier de géométrie cayleyenne: celui où la conique absolue est tangentielllement dégénérée en une paire de points imaginaires conjugués. Un théorème général, le non-parallélisme des perpendiculaires à une droite ne saurait être faux dans un cas particulier. Nous

<sup>1</sup> Avec 62 titres de bibliographie.

allons voir que c'est la multiplicité des sens donnés au mot parallèle qui est la cause de cette disparité.

Une paire de parallèles, euclidiennes ou cayleyennes jouit de deux propriétés importantes: leur angle est nul et leur intersection infiniment éloignée. Dans le cas de la dégénérescence tangentielle de l'absolu, les deux points qui le constituent déterminent une droite, la droite exceptionnelle du plan cayleyen. Deux droites qui se coupent sur cette droite forment un angle cayleyen nul. Mais dans le plan cayleyen à absolu tangentiellement dégénéré, la distance cayleyenne de deux points quelconques est nulle; par conséquent deux droites d'angle cayleyen nul ne s'y coupent pas en un point infiniment éloigné. Si dans ce plan, nous conservons la définition cayleyenne du parallélisme des droites (se couper sur l'absolu), seules des droites qui passent par l'un des points absolus seraient parallèles. L'angle cayleyen de ces droites est indéterminé, sans qu'on puisse donner une borne inférieure à sa grandeur. Cet angle peut être considéré comme nul, à condition de compléter la définition de l'angle. De même, la distance de leur intersection est indéterminée et non bornée supérieurement. Si l'on voulait considérer que de telles droites se coupent infiniment loin, il faudrait cette fois considérer comme infinie une quantité indéterminée. De telles conventions hétérogènes n'ont rien pour satisfaire le logicien. D'ailleurs, l'intérêt des droites précédentes est fort réduit: les points absolus étant imaginaires, ces parallèles le sont aussi.

Ce qui précède montre que des deux propriétés des parallèles (angle nul et intersection à l'infini), la première est plus importante que la seconde. Or, dans les éléments, et à juste titre, c'est par la non-existence de l'intersection que l'on définit les parallèles; la nullité de l'angle est un théorème qui résulte d'une extension appropriée de la notion d'angle.

2. — Pour donner la structure euclidienne au plan cayleyen à absolu dégénéré, superposons-lui un plan affín, en choisissant la droite exceptionnelle comme droite impropre. Désormais, deux droites d'angle cayleyen nul sont affínement parallèles. En géométrie euclidienne, le théorème du parallélisme des perpendiculaires à une droite est hétérogène: le parallélisme est

affin et non cayleyen, tandis que la perpendicularité, notion vide de sens en géométrie affine, est cayleyenne. Le théorème n'est pas cayleyen, mais elliptico-affin; il n'est plus en contradiction avec le non-parallélisme cayleyen des perpendiculaires à une droite.

3. — Des remarques de même nature montrent pourquoi le théorème de Pythagore, si important dans les éléments, n'a pas de correspondant en géométrie projective; il est lui aussi, elliptico-affin.

Introduisons dans le plan un système de coordonnées projectives dont la droite à l'infini est la droite impropre; choisissons les points infinis des deux axes en des points conjugués par rapport aux points absolus. Les axes sont rectangulaires, mais les coordonnées ne sont pas encore cartésiennes: l'égalité des segments-unités sur les axes n'est pas réalisée, car elle n'est même pas définie.

En coordonnées homogènes, soient  $x_2 = \pm mx_1$  les équations des droites qui passent par l'origine et les points absolus et  $\Sigma a_{jk}x_jx_k = 0$  ( $j$  et  $k = 1, 2, 3$ ) celle d'une conique qui passe par ces points et telle que l'origine soit le pôle de la droite impropre (donc le centre de la conique). Le passage par les points absolus implique  $a_{12} = 0$  et  $a_{11} + m^2 a_{22} = 0$ . Le fait pour la droite impropre d'être la polaire de l'origine implique que  $a_{13} = a_{23} = 0$ . En coordonnées non homogènes, cette équation devient  $x^2 - m^2 y^2 = r^2$ , en posant  $a_{11} r^2 = -a_{33}$ .

Posons axiomatiquement que cette conique est un cercle, lieu des points équidistants de son centre, l'origine. La notion de distance ainsi introduite n'est pas cayleyenne; elle caractérise le plan euclidien. Les distances à l'origine des intersections de notre cercle avec les axes sont égales et en posant successivement  $y = 0$  et  $x = 0$ , il vient  $x_0^2 = r^2 = y_0^2 = -\frac{m^2}{r^2}$ .

Cette égalité impose  $m^2 = -1$  et l'équation du cercle devient  $x^2 + y^2 = r^2$ .

C'est là une expression du théorème de Pythagore. Pour donner un sens à cette proposition, nous avons superposé deux plans de nature différentes: l'un contient une métrique angulaire elliptique et l'autre est affin.

4. — Poincaré a souvent insisté sur le fait que la géométrie est l'étude d'un groupe, celui des déplacements. Ce qui distingue la géométrie euclidienne, c'est l'existence, au sein de ce groupe, du sous-groupe des translations.

Ce qui précède montre le caractère fondamental de cette distinction; le sous-groupe des translations est lié au plan affín tandis que les rotations reposent sur la notion de cercle et d'angle qui sont de caractère elliptique.

5. — Essayons de superposer un plan affín et un plan cayleyen à absolu tangentiellement dégénéré, mais sans identification des droites exceptionnelle et impropre. Les déplacements doivent conserver chacune de ces droites; sur la droite exceptionnelle, les points absolus sont conservés, ainsi que l'intersection avec la droite impropre. La droite exceptionnelle est donc conservée point par point dans l'homographie qu'est un déplacement. Tout déplacement devient ainsi une homologie devant conserver une droite autre que son axe; elle est une identité. La géométrie que nous avons imaginée ignorerait donc la notion de déplacement. C'est dire son peu d'intérêt.

### Séance du 6 mars 1958

#### A. Amstutz. — *Boussole de géologue.*

Avec l'aide de MM. Rollat et Clerissi j'ai construit récemment une boussole de géologue qui peut être utilisée en topographie et qui présente les caractères et avantages suivants:

1) L'aiguille suspendue qui est adjointe aux boussoles habituelles pour la mesure des pendages, est ici remplacée par une petite bille d'or ou de platine roulant dans une gorge circulaire munie d'une graduation. Cette bille, non magnétique et de poids spécifique élevé, ne demande aucune immobilisation lorsqu'on ne s'en sert pas et procure donc un gain de temps. De plus, elle ne nécessite pas de tapotements sur l'appareil lorsque celui-ci n'est pas tout-à-fait vertical et qu'il crée de ce fait des frictions le long de l'aiguille.