Zeitschrift: Archives des sciences [1948-1980]
Herausgeber: Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève
Band: 15 (1962)
Heft: 2

Artikel: Sur la structure des amas globulaires
Autor: Bouvier, P.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-738662

SUR LA STRUCTURE DES AMAS GLOBULAIRES

PAR

P. BOUVIER

Résumé

Le présent travail consiste en une investivagion théorique de la structure d'un amas globulaire stationnaire. Une méthode est proposée pour déterminer les distributions des énergies et des moments angulaires dans un modèle d'amas caractérisés par une loi de densité donnée. Application du procédé au polytrope d'indice 5.

Abstract

This paper deals with a theoretical investigation of the structure of a globular cluster in a steady state. A method is outlined in order to find out the energy and angular momentum distributions corresponding to a cluster model defined by a given density law. Application is made to the polytropic model of index 5.

1. Introduction. Hypothèses initiales

Nous envisageons un amas stellaire globulaire dans un état stationnaire; sa structure est donc définie par un potentiel de la forme

$$U = U(r)$$

r étant la distance au centre. D'autre part, la distribution des positions et des vitesses des diverses étoiles de l'amas sera décrite par une fonction de probabilité

$$\varphi(x_1, \ldots, v_3, m)$$

permettant d'exprimer, sous la forme $\varphi\,(dx)^3\,(dv)^3\,dm$ le nombre moyen des étoiles de coordonnées spatiales comprises entre x_i et x_i+dx_i, de composantes de vitesse comprises entre v_i et v_i+dv_i et de masse comprise entre m et $m+dm$.

Etant donnés le caractère stationnaire et la symétrie sphérique de l'amas considéré, φ ne dépendra des six variables $x_1, \ldots, v_3$ que comme fonction de deux intégrales premières, à savoir l'énergie totale E d'une étoile et son moment angulaire A autour du centre de l'amas. Ces grandeurs ont pour expression, par unité de masse,

$$E = \frac{v^2}{2} + U \qquad\qquad A = rv \sin\theta ,$$

θ étant l'angle formé par le rayon vecteur et la tangente à la trajectoire, à distance r du centre.

En conséquence, nous écrirons

$$\varphi(x_1, \ldots, v_3, m) = f(E, A, m)$$

la fonction f étant supposée indépendante du sens du pseudo-vecteur A.

2. Expression de la densité de masse

Par définition, la densité de masse $\rho(r)$ à distance r a pour expression

$$\rho(r) = \int m dm \int \varphi(x_1, \ldots, v_3, m)(dv)^3 \tag{1}$$

soit, en passant à des coordonnées sphériques, ($\cos\theta = z$, $\varphi = a$)

$$\rho(r) = \int_0^\infty m dm 2\pi \int_0^\infty \int_{-1}^{+1} a(r, v, z, m) v^2 \, dv dz$$

$$= 4\pi \int m dm \iint f(E, A, m) v^2 |\Delta| dE dA$$

Le déterminant fonctionnel Δ se calcule facilement:

$$\Delta = \frac{\partial(v, z)}{\partial(E, A)} = \frac{\partial v}{\partial E}\frac{\partial z}{\partial A} = -\frac{A}{rv^2\sqrt{r^2 v^2 - A^2}} \tag{2}$$

par suite,

$$\rho(r) = \frac{4\pi}{r}\int_0^\infty m dm \int_U^\infty dE \int_0^{A_m} \frac{A}{\sqrt{A_m^2 - A^2}} f(E, A, m) \, dA \tag{3}$$

où A_m est la valeur maximum de A pour r et E donnés; l'on a

$$A_m^2 = r^2 v^2 = 2r^2(E - U)$$

Comme nous n'aurons pas à nous occuper ici de la fonction des masses, nous attribuerons à toutes les étoiles de l'amas la même masse, égale à l'unité:

$$f(E, A, m) = \delta(m-1) f(E, A),$$

δ étant la distribution de Dirac. Par conséquent,

$$\rho(r) = \frac{4\pi}{r} \int_U^\infty dE \int_0^{A_m} \frac{A}{\sqrt{A_m^2 - A^2}} f(E, A)\, dA, \tag{4}$$

expression qui, dans le cas d'isotropie des vitesses où $f(E, A)$ est indépendant de A, se réduit à

$$\rho(r) = 4\pi \int_U^\infty \sqrt{2(E-U)} f(E)\, dE.$$

Dans un cas plus général correspondant d'ailleurs à une loi ellipsoïdale des vitesses nous avons, k étant une constante,

$$f(E, A) = f(2E + kA^2),$$

et nous pouvons écrire (α, angle azimutal),

$$f(2E + kA^2)\, \Delta\, dE dA\, d\alpha =$$
$$f\{ v^2 + 2U + kr^2 (v_x^2 + v_y^2) \} dv_x dv_y dv_z =$$
$$f(w^2 + 2U) \frac{(dw)^3}{1 + kr^2}$$

ce qui nous ramène à une distribution isotrope des vecteurs w liés aux v par les relations suivantes, écrites dans un référentiel cartésien dont l'axe z est mesuré le long du rayon r (Smart, 1938):

$$w_x = v_x \sqrt{1 + kr^2}$$
$$w_y = v_y \sqrt{1 + kr^2}$$
$$w_z = v_z.$$

En particulier avec une loi de Schwarzschild (où C et j sont des constantes)

$$f(E, A) = Ce^{-j^2(2E+kA^2)},$$

nous trouvons

$$\rho(r) = C\left(\frac{\sqrt{\pi}}{j}\right)^3 \frac{e^{-2j^2U}}{1+kr^2}.$$

Cependant, si nous voulons obtenir des modèles de masse totale finie, il est nécessaire (Kurth 1955) de limiter les énergies à une borne supérieure finie E_e, que nous choisirons ici égale à zéro. L'intégration sur $(dw)^3 = 4\pi w^2 dw$ est donc à effectuer de 0 à w_e, soit

$$\rho(r) = \frac{4\pi C}{1+kr^2} e^{-2j^2U} \int_0^{w_e} e^{-2j^2w^2} w^2\, dw,$$

où w_e est fonction de r. Si $E = 0$, $w^2 = kA^2 - 2U$ et en définissant w_e par $w_e^2 = kA_m^2 - 2U$, nous aurions

$$w_e^2 = (1+kr^2)(-2U).$$

En particulier, $k = 0$ nous ramène à la distribution maxwellienne tronquée (Woolley 1954).

3. Développements en série

Reprenons l'expression (4) avec les limites U et 0; une intégration par parties nous conduit à

$$\rho(r) = 4\pi\left\{\int_U^0 f(E, U)\sqrt{2(E-U)}\,dE + \frac{1}{r}\int_U^0 dE\int_0^{A_m}\sqrt{A_m - A^2}\,\frac{\partial f}{\partial A}\,dA\right\}, \quad (5)$$

ce qui suggère un développement en série de Maclaurin autour de $A = 0$, soit

$$f(E, A) = f(E, 0) + A\left(\frac{\partial f}{\partial A}\right)_{A=0} + \frac{1}{2}A^2\left(\frac{\partial A^2}{\partial^2 f}\right)_{A=0} + \ldots$$

ou encore, puisque f est fonction paire de A par hypothèse,

$$f(E, A) = f_0(E) + A^2 f_1(E) + A^4 f_2(E) + \dots \tag{6}$$

avec

$$f_n(E) = \frac{1}{(2n)!}\left(\frac{\partial^{2n} f}{\partial A^{2n}}\right)_{A=0}$$

Bien que f ne dépende pas ici explicitement de r, cette fonction se réduit néanmoins à la distribution isotrope $f_0(E)$ au centre $r = 0$ par où seules passent les orbites de moment angulaire nul. Au voisinage du centre, A restera nécessairement petit pour E donné et $U(0)$ fini ($U < E < 0$), de sorte que le terme $A^2 f_1(E)$ constituera un premier écart à l'isotropie, puis les termes suivants de (6) pourront prendre de l'importance à des distances r plus élevées.

Substituons la série (6) supposée uniformément convergente, dans l'expression (5); nous obtiendrons un développement de la forme

$$\rho(r) = \psi_0(U) + r^2 \psi_1(U) + r^4 \psi_2(U) + \dots \tag{7}$$

où $\psi_n(U)$ est lié à $f_n(E)$ par l'équation

$$\psi_n(U) = c_n \int_U^0 (E - U)^{n+\frac{1}{2}} f_n(E)\, dE\,, \tag{8}$$

avec

$$c_n = 4\pi 2^{n+\frac{1}{2}} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\,, \quad n = 0, 1, 2, \dots.$$

Or (8) est une équation intégrale homogène de Volterra de première espèce pour f_n; la forme particulièrement simple du noyau permet ici l'application d'une méthode directe (Trumpler 1953) qui nous donne

$$f_n(E) = \frac{(-1)^n}{c_n \sqrt{\pi}\, \Gamma(n+\frac{3}{2})} \int_E^0 \frac{d^{n+2}\psi_n}{dU^{n+2}} \frac{dU}{\sqrt{U-E}}\,. \tag{9}$$

Les transformations réciproques (8) et (9) précisent donc une correspondance biunivoque entre les séries (6) et (7).

Toutefois, le développement (7) est purement formel puisque les variables r et U ne sont pas indépendantes.

4. Recherche des distributions $f(E, A)$

Afin de tirer des considérations précédentes une méthode capable de déterminer les diverses distributions possibles $f(E, A)$ dans un amas globulaire de densité donnée $\rho(r)$, nous procédons comme suit: de l'équation de Poisson

$$\nabla^2 U = 4\pi G\rho , \tag{10}$$

nous tirons le potentiel

$$U = U(r) , \tag{11}$$

correspondant à la densité $\rho(r)$. L'inversion de (11), soit $r = r(U)$ nous conduit à écrire formellement

$$\rho(r) = \psi(U) ,$$

et en identifiant $\psi(U)$ au premier terme du développement (7), nous déduisons de (9) où $n = 0$ la distribution isotrope $f(E) = f_0(E)$.

Mais nous pouvons aussi chercher à égaler $\psi(U)$ à la somme des deux premiers termes de (7), ce qui revient à trouver deux fonctions $\psi_0(U)$, $\psi_1(U)$ telles que (11) vérifie identiquement la relation

$$\psi_0(U) + r^2 \psi_1(U) = \psi(U) .$$

A ces fonctions ψ_0, ψ_1 correspondent, par (9) les coefficients f_0, f_1 permettant de construire la fonction de distribution anisotrope

$$f(E, A) = f_0(E) + A^2 f_1(E) , \tag{12}$$

dont il restera à s'assurer du caractère défini positif.

De même, s'il est possible de trouver trois fonctions ψ_0, ψ_1, ψ_2 telles que (11) vérifie identiquement l'égalité

$$\psi_0(U) + r^2 \psi_2(U) + r^4 \psi_2(U) = \psi(U) ,$$

on pourra construire, à l'aide des f_0, f_1, f_2 correspondants, une fonction

$$f(E, A) = f_0(E) + A^2 f_1(E) + A^4 f_2(E) , \tag{13}$$

qui, dans le domaine où elle apparaît définie positive, définira un autre sous-modèle de l'amas décrit par la loi de densité $\rho(r)$. D'une manière plus générale, un choix convenable des fonctions $\psi_n(U)$ nous fournira n'importe laquelle des distributions $f(E, A)$ relatives à la densité $\rho(r)$ et représentable par une série du type (6).

5. Polytrope d'indice 5

Tentons l'application de la méthode au modèle polytropique d'indice 5 défini, comme on sait, par la loi de densité

$$\rho(r) = \rho_c \left(1 + \frac{r^2}{a^2}\right)^{-\frac{5}{2}} \tag{14}$$

où ρ_c est la densité centrale et a une longueur constante égale au rayon de la sphère contenant en projection la demi-masse totale finie $M/2$. De (10) et (14) on calcule le potentiel

$$U(r) = U_c \left(1 + \frac{r^2}{a^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{15}$$

où U_c a la valeur finie $U_c = U(0) = -G\dfrac{M}{a}$

(14) et (15) nous conduisent à la relation

$$\rho(r) = \psi(U) = \rho_c \left(\frac{U}{U_c}\right)^5$$

d'où un premier sous-modèle à distribution de vitesses isotrope (Camm 1952)

$$f(E) = \frac{64\rho_c}{7\pi^2\sqrt{2}} \frac{(-E)^{7/2}}{(-U_c)^5}\,. \tag{16}$$

Cependant, étant donné que

$$\left(1 + \frac{r^2}{a^2}\right)^{-\frac{5}{2}} = \left(1 + \frac{r^2}{a^2}\right)^{-\frac{3}{2}} - \frac{r^2}{a^2}\left(1 + \frac{r^2}{a^2}\right)^{-\frac{5}{2}}$$

nous pourrons satisfaire identiquement l'égalité

$$\psi_0(U) + \frac{r^2}{a^2}\psi_1(U) = \psi(U)\,, \tag{17}$$

en posant

$$\psi_0(U) = \rho_c \left(\frac{U}{U_c}\right)^3, \quad \psi_1(U) = -\rho_c \left(\frac{U}{U_c}\right)^5$$

et la formule (9) nous donne alors

$$f_0(E) = \frac{4\rho_c}{\pi^2\sqrt{2}} \frac{(-E)^{3/2}}{(-U_c)^3}$$

$$f_1(E) = -\frac{16\rho_c}{\pi^2\sqrt{2}} \frac{(-E)^{5/2}}{(-U_c)^5}.$$

Corrélativement à (17) nous aurons

$$f(E, A) = f_0(E) + \frac{A^2}{a^2} f_1(E)$$

c'est-à-dire

$$f(E, A) = \frac{4\rho_c}{\pi^2\sqrt{2}} \frac{(-E)^{3/2}}{(-U_c)^3} \left\{ 1 - 4\frac{A^2}{a^2}\frac{(-E)}{U_c^2} \right\} \tag{18}$$

fonction définie positive si

$$A^2 < \frac{a^2 U_c^2}{4(-E)}.$$

Or cette inégalité est certainement satisfaite pour des moments angulaires assez petits; si nous voulons qu'elle le soit encore pour toutes les valeurs, de 0 à A_m, que peut prendre A à r et E donnés, il faut que l'on ait en particulier,

$$A_m^2 = 2r^2(E - U) < \frac{a^2 U_c^2}{4(-E)}$$

soit, en introduisant les rapports $\frac{r}{a} = \xi$ et $\frac{E}{U_c} = \eta$

$$8\xi^2\eta^2 - \frac{8\xi^2}{\sqrt{1+\xi^2}}\eta + 1 > 0.$$

Ce trinôme du second degré en η est effectivement positif pour $\eta = 0$ et $\eta = 1$; il est assuré de le rester pour toute valeur de η si son discriminant est négatif, ce qui implique $\xi < 1$.

Par conséquent, la distribution (18) a un sens tant que $r < a$ et l'anisotropie se manifeste ici par une raréfaction croissante des moments angulaires élevés lorsque r varie de 0 à a; pour $r > a$ il faudrait limiter A à une valeur inférieure à A_m afin que f restât définie positive.

Il est d'ailleurs possible de former, par combinaison linéaire des fonctions (16) et (18) une distribution définie positive pour tout $r < b$ où b est une distance finie arbitraire.

D'autre part, l'extension du procédé conduisant à (18) permet de construire des distributions $f(E, A)$ renfermant un nombre fini quelconque de termes; ainsi à partir de l'identité

$$(1+\xi^2)^{-\frac{5}{2}} = (1+\xi^2)^{-\frac{1}{2}} - 2\xi^2(1+\xi^2)^{-\frac{5}{2}} - \xi^4(1+\xi^2)^{-\frac{5}{2}}, \qquad (19)$$

nous poserons

$$\psi_0(U) = \rho_c \frac{U}{U_c}, \quad \psi_1(U) = -2\rho_c\left(\frac{U}{U_c}\right)^5, \quad \psi_2(U) = -\rho_c\left(\frac{U}{U_c}\right)^5$$

ou bien, en modifiant légèrement (19) en

$$(1+\xi^2)^{-\frac{5}{2}} = (1+\xi^2)^{-\frac{1}{2}} - 2(1+\xi^2)^{-\frac{3}{2}} + (2-\xi^4)(1+\xi^2)^{-\frac{5}{2}} \qquad (20)$$

nous pourrions avoir, alternativement,

$$\begin{aligned}
\psi_0(U) &= \rho_c\left[\frac{U}{U_c} - 2\left(\frac{U}{U_c}\right)^3 + 2\left(\frac{U}{U_c}\right)^5\right] \\
\psi_1(U) &= 0 \\
\psi_2(U) &= -\rho_c\left(\frac{U}{U_c}\right)^5.
\end{aligned}$$

Les distributions qui résultent de là par (9) ainsi que celles que l'on peut construire par superposition entre elles ou avec les fonctions (16), (18) sont de la forme (13), les coefficients $f_0(E)$, $f_1(E)$, $f_2(E)$ apparaissant toujours comme des puissances demi-entières de $(-E)$ ou comme des combinaisons linéaires de ces puissances.

6. Remarque sur l'évolution globale

Si l'amas globulaire considéré jusqu'ici n'est plus strictement en état stationnaire mais devient le siège d'une évolution lente, nous aurons

$$U = U(r, t),$$

$$\rho(r, t) = \frac{4\pi}{r} \int_U^0 dE \int_0^{A_m} \frac{A}{\sqrt{A_m^2 - A^2}} f(E, A, t)\, dA .$$

Le nombre des étoiles (toutes de masse $m = 1$) ayant, n'importe où dans l'amas, une énergie comprise entre E et $E+dE$, un moment angulaire compris entre A et $A+dA$ s'élève donc à

$$g(E, A, t) = 16\pi^2 \int_0^{r_m} r^2\, dr\, v^2 \,|\Delta|\, f(E, A, t), \tag{21}$$

où $r = r_m$ est donné par $U(r_m, t) = E$.

Or selon (2)

$$r^2 v^2 \,|\Delta| = \frac{\sqrt{1 - z^2}}{z}$$

de sorte qu'on écrira aussi

$$g(E, A, t) = 16\pi^2 \int_0^{r_m} r\, dr\, \frac{\sqrt{1 - z^2}}{z}\, a(r, v, z, t).$$

A partir de la dérivée $\frac{\partial g}{\partial t}$ on peut, en procédant comme dans le cas isotrope (Hénon 1961), parvenir à une équation d'évolution globale des étoiles (E, A)

$$\int_0^{r_m} r\, dr\, \frac{A}{\sqrt{2r^2(E - U) - A^2}} \left[\left(\frac{\partial a}{\partial t}\right)_p - \frac{\partial f}{\partial E}\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial f}{\partial t}\right] = 0 \tag{22}$$

Cependant l'expression $\left(\frac{\partial a}{\partial t}\right)_p$ de la variation de distribution des vitesses, due aux rencontres entre étoiles, devient ici très compliquée (Michie 1961).

Observatoire de Genève, juin 1962.

BIBLIOGRAPHIE

CAMM, G. L. (1952). *M. N.*, **112**, 155.
HÉNON, M. (1961). *Ann. d'Ap.*, t. **24**, 369.
KURTH, R. (1955). *A. N.*, **282**, 97.
MICHIE, R. W. (1961). *Ap. J.*, **133**, 781.
SMART, W. M. (1938). *Stellar Dynamics*, Cambridge U. Press, ch. X, n° 34.
TRUMPLER, R. J. and WEAVER, H. F. (1953). *Statistical Astronomy*, UC Press Berkeley and L. A., ch. 1-4.
WOOLLEY, R. v. d. R. (1954.) *M. N.*, **114**, 191.