

**Zeitschrift:** Bulletin de l'Association suisse des électriciens  
**Herausgeber:** Association suisse des électriciens  
**Band:** 5 (1914)  
**Heft:** 3

**Artikel:** Régimes permanent et changements de régime dans les circuits électriques  
**Autor:** Landry, J.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-1056619>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 29.01.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# SCHWEIZ. ELEKTROTECHNISCHER VEREIN

# BULLETIN

## ASSOCIATION SUISSE DES ÉLECTRICIENS

Erscheint monatlich mit den Jahres-Beilagen „Statistik der Starkstromanlagen der Schweiz“ sowie „Jahresheft“ und wird unter Mitwirkung einer vom Vorstand des S. E. V. ernannten Redaktionskommission herausgegeben.

Alle den Inhalt des „Bulletin“ betreffenden Zuschriften sind zu richten an das

Generalsekretariat

des Schweiz. Elektrotechnischen Vereins,  
Neumühlequai 12, Zürich 1 - Telephon 9571

Alle Zuschriften betreffend Abonnement, Expedition und Inserate sind zu richten an den

Verlag: Fachschriften-Verlag & Buchdruckerei  
A.-G., Zürich

Bahnhofstrasse 61, Zürich I (Telephon 6741)

Publié sous la direction d'une Commission de Rédaction nommée par le Comité de l'A. S. E.

Ce bulletin paraît mensuellement et comporte comme annexes annuelles la „Statistique des installations électriques à fort courant de la Suisse“, ainsi que l'„Annuaire“.

Prière d'adresser toutes les communications concernant la matière du „Bulletin“ au

Secrétariat général

de l'Association Suisse des Electriciens  
Neumühlequai 12, Zurich 1 - Téléphone 9571

Toutes les correspondances concernant les abonnements, l'expédition et les annonces, doivent être adressées à l'éditeur:

Fachschriften-Verlag & Buchdruckerei S. A.  
Zurich

Bahnhofstrasse 61, Zurich I (Téléphone 6741)

Abonnementspreis  
für Nichtmitglieder inklusive Jahresheft und Statistik:  
Schweiz Fr. 15.—, Ausland Fr. 25.—.  
Einzelne Nummern vom Verlage Fr. 1.50 plus Porto.

Prix de l'abonnement annuel (gratuit pour les membres de l'A.S.E.), y compris l'Annuaire et la Statistique, Fr. 15.— pour la Suisse, Fr. 25.— pour l'étranger.  
L'éditeur fournit des numéros isolés à Fr. 1.50, port en plus.

V. Jahrgang  
V<sup>e</sup> Année

Bulletin No. 3

März 1914  
Mars

## Régimes permanents et changements de régime dans les circuits électriques.

Par J. Landry, professeur, Lausanne.

### Cas des courants alternatifs.

(Suite.)\*

Pour ne pas allonger par trop ce travail et ne pas fatiguer outre mesure le lecteur, nous nous bornerons à l'étude du problème de la transmission par *courants alternatifs sinusoïdaux* et nous considérerons, ainsi que nous l'avons fait précédemment, un circuit simple comprenant un générateur  $G$ , une ligne formée d'un conducteur de longueur  $L$  et de constantes  $r$ ,  $g$ ,  $l$  et  $c$  et d'un conducteur de retour de résistance nulle, et, enfin, d'un récepteur  $R$  d'impédance connue  $Z'$ . Ce dernier sera supposé parfaitement isolé et totalement dépourvu de capacité de conducteur à conducteur dans ses enroulements, ce que l'on peut toujours faire, du moins dans l'étude des régimes permanents. D'ailleurs, et c'est ainsi que le problème se pose le plus souvent, on peut supposer connus la puissance  $P$  absorbée par le dit récepteur  $R$ , la tension  $V_L$  à laquelle il doit être soumis, ainsi que son facteur de puissance  $\cos \varphi'$ , ce qui détermine parfaitement le régime à l'arrivée.

Le circuit considéré (fig. 14) représente somme toute l'une des „phases“ d'un système polyphasé *symétrique* d'ordre  $m$ , système équivalent, ainsi qu'on le sait, et quel que soit le montage des appareils récepteurs, à  $m$  circuits monophasés de puissance  $\frac{P}{m}$  formés chacun de l'une des  $m$  „phases“ génératrices, de l'une des  $m$  „phases“ réceptrices,

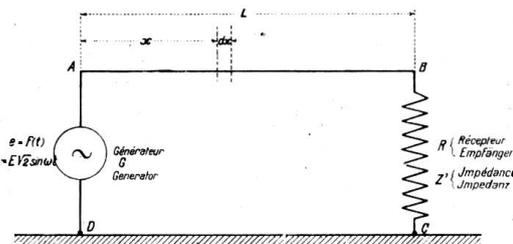


Fig. 14.

\* Voir numéro de février, pages 33 à 52.

de l'un des  $m$  conducteurs de ligne et d'un conducteur de retour d'impédance nulle. Les constantes de ligne  $r$ ,  $g$ ,  $l$  et  $c$  sont alors rapportées à la tension simple  $V_s$ , soit à la tension

$$V_s = \frac{V_c}{2 \sin \frac{\pi}{m}}$$

$V_c$  étant la tension entre deux conducteurs de ligne ou tension composée d'un système étoilé.

Ayant traité le cas des courants alternatifs sinusoidaux, c'est-à-dire ayant déterminé le régime dû à l'action d'une *fém* sinusoidale

$$e = E\sqrt{2} \sin \omega t$$

produite par le générateur  $G$ , le passage au cas où  $e$  serait une *fém* périodique de forme quelconque ne présentera pas de difficultés bien particulières, car il suffira de décomposer  $e$ , par la série de Fourier, en un terme de fréquence fondamentale et ses divers harmoniques. Le régime cherché s'obtiendra alors par la superposition des régimes dûs à l'action de chacune des *fém* sinusoidales de la série remplaçante, ces dernières étant supposées agir tour à tour dans le circuit et celui-ci étant affecté chaque fois des constantes  $r$ ,  $g$ ,  $l$  et  $c$  correspondantes. Nous ne nous occuperons de ce cas que tout à fait incidemment.

### Equations générales pour le cas particulier des courants sinusoidaux.

#### Forme symbolique.

Admettons donc que le générateur  $G$  produise une force électromotrice sinusoidale et, pour ne pas nous embarrasser inutilement du problème du générateur lui-même, convenons de considérer cette *fém* comme une tension ou différence de potentiel, de telle sorte que l'on ait, quel que soit le régime, figure 14,

$$v_A - v_D = v_0 = V_0 \sqrt{2} \sin \omega t = e = E \sqrt{2} \sin \omega t$$

ou bien, en faisant usage du *mode de représentation* par quantités complexes (voir page 50):

$$\begin{aligned} 1^{er} \text{ cas,} & \quad V = V_0 \sqrt{2} \varepsilon^{j\omega t} \\ \text{ou, } 2^{d} \text{ cas,} & \quad V = V_0, \text{ puisque la phase de } v_0 \text{ est prise comme origine des} \\ & \quad \text{phases } (\alpha = 0). \end{aligned}$$

La tension  $v$  en un point situé à une distance  $x$  du générateur  $G$  différera, aussi bien en grandeur qu'en phase, de la tension  $v_0$ . Sa valeur efficace en cet endroit étant désignée par  $V_x$  et son déphasage par rapport à  $v_0$  par  $\alpha$  (avance ou retard), nous pourrions la représenter par:

$$\begin{aligned} (54) \quad V &= V_x \sqrt{2} \varepsilon^{j(\omega t - \alpha)} = V_x \sqrt{2} \varepsilon^{-j\alpha} \varepsilon^{j\omega t} \\ &= V_x [\cos \alpha - j \sin \alpha] \sqrt{2} \varepsilon^{j\omega t} \\ &= V_x \sqrt{2} \varepsilon^{j\omega t} \end{aligned}$$

Le courant  $i$  à l'endroit  $x$  pourra, de son côté, quelle que soit d'ailleurs sa phase, être représenté par la quantité complexe:

$$(55) \quad I = I_x \sqrt{2} \varepsilon^{j\omega t}$$

Remplaçant  $v$  et  $i$  par les expressions ci-dessus dans les deux équations différentielles (4) et (5), on obtient:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x} (V_x \sqrt{2} \varepsilon^{j\omega t}) &= r I_x \sqrt{2} \varepsilon^{j\omega t} + l \frac{\partial}{\partial t} (I_x \sqrt{2} \varepsilon^{j\omega t}) \\ \text{et} \quad -\frac{\partial}{\partial x} (I_x \sqrt{2} \varepsilon^{j\omega t}) &= g V_x \sqrt{2} \varepsilon^{j\omega t} + c \frac{\partial}{\partial t} (V_x \sqrt{2} \varepsilon^{j\omega t}) \end{aligned}$$

On voit alors aisément que la fonction  $\varepsilon^{j\omega t}$ , qui symbolise la variation sinusoidale des grandeurs  $v$  et  $i$ , conformément à ce qui a été admis, s'élimine, ainsi d'ailleurs que le facteur numérique  $\sqrt{2}$ , et que les deux équations ci-haut deviennent :

$$(56) \quad -\frac{dV_x}{dx} = (r + j\omega l) I_x = z I_x$$

$$(57) \quad \text{et} \quad -\frac{dI_x}{dx} = (g + j\omega c) V_x = a V_x$$

On pourra, soit en faisant la même substitution dans les équations (6) et (7), soit en procédant par élimination sur les équations (56) et (57), obtenir deux équations dont l'une ne contiendra plus que  $V_x$  et l'autre plus que  $I_x$ , soit :

$$(58) \quad \frac{d^2 V_x}{dx^2} = (r + j\omega l) (g + j\omega c) V_x = z a V_x$$

$$(59) \quad \text{et} \quad \frac{d^2 I_x}{dx^2} = (r + j\omega l) (g + j\omega c) I_x = z a I_x$$

Ce sont les équations différentielles qui caractérisent le régime permanent de tout circuit électrique parcouru par un courant alternatif sinusoidal de pulsation  $\omega$ . La première est en  $V_x$ , expression complexe réduite de la tension en chacun des points de la ligne; l'autre en  $I_x$ , expression complexe réduite de l'intensité du courant en chacun des points de la ligne. On en pourra donc tirer tout d'abord :

$$V_x = f(x)$$

$$\text{et} \quad I_x = \varphi(x)$$

qui montreront comment *valeurs efficaces* et *phases* de  $v$  et de  $i$  varient le long de la ligne, puis, si l'on a quelque intérêt à le faire, on pourra en déduire immédiatement, en réintroduisant convenablement la variable  $t$ , les fonctions

$$v = f(x, t)$$

$$\text{et} \quad i = \varphi(x, t)$$

qui indiqueront les lois de variation, dans le *temps* et dans l'*espace*, des grandeurs  $v$  et  $i$  dans l'hypothèse faite (variation sinusoidale dans le temps).

Ayant la même forme, les équations (58) et (59) auront des solutions qui ne différeront que par les constantes d'intégration déterminées par les conditions aux limites. Généralement, on déterminera  $V_x$ , par exemple, en partant de l'équation (58); ayant trouvé  $V_x$ , on l'introduira dans (57) d'où l'on tirera  $I_x$  en intégrant par rapport à  $x$ , ou dans (56) d'où l'on tirera  $I_x$  en divisant la dérivée négative de  $V_x$ , obtenu précédemment, par  $z$ .

Ces généralités étant rappelées, nous allons, ainsi que nous l'avons fait pour les courants continus, traiter successivement :

1<sup>o</sup> Le cas d'un circuit tel que celui de la figure 14, mais en négligeant la capacité  $c$  et la perditance  $g$  de la ligne.  $c = g = 0$ .

2<sup>o</sup> Le cas général dans lequel nous tiendrons compte de tous les effets dont il a été parlé, soit des constantes  $r$ ,  $g$ ,  $l$  et  $c$  qui caractérisent ces derniers.

Le premier est celui de la technique industrielle *courante* où, grâce aux faibles fréquences qui sont celles des courants industriels (courants forts) et aux longueurs relativement faibles des lignes de transmission, les courants de déplacement de fil à fil (capacité) et, à plus forte raison encore, les courants de conduction au travers du diélectrique ne jouent, même pour des tensions relativement élevées, qu'un rôle minime, industriellement parlant. Mais il n'en est plus de même dans le cas de transmissions par câbles, même de relativement faible longueur, ni dans les transmissions aériennes de grande longueur, ni surtout dans les transmissions téléphoniques, par exemple, où, grâce aux fréquences élevées et d'ailleurs multiples des courants dont ces circuits sont le siège et grâce au complet ren-

versement de proportion entre courants émis et courants utilisés par les récepteurs, les phénomènes ont une allure foncièrement différente de celle à laquelle on serait conduit si l'on faisait abstraction des effets de capacité, avant tout, et même des pertes par suite d'isolement imparfait. Ce dernier problème présente un très haut intérêt, mais il présente des faces si particulières que nous ne nous en occuperons pas ou tout au plus d'une façon tout à fait incidente dans la suite de cet article, quitte à y revenir en temps opportun.

Nous avons beaucoup employé le mot „relativement“ dans les quelques remarques qui précèdent. La raison en apparaît immédiatement, car, pour peu que l'on veuille prendre un peu de recul, cesser d'envisager tel cas particulier, pour embrasser l'ensemble des merveilleuses applications auxquelles la transmission électrique se prête, on est frappé de ce qu'il y a de relatif dans les conclusions obtenues par la considération de tel ou tel cas concret et combien, par conséquent, il faut être prudent dans les généralisations. C'est ainsi, par exemple, que l'appellation „ligne longue“ ou „ligne courte“ peut prendre des sens tout différents suivant le domaine dans lequel on se meut. Tandis qu'une ligne de transmission d'énergie de 400 km de longueur est une *ligne courte* en ce qui concerne certains côtés des problèmes que l'on peut se poser à son sujet (déphasage-espace, affaiblissement), la même ligne doit être considérée comme ligne longue en ce qui concerne d'autres points (coups de fouet, réglage etc.). Une ligne téléphonique souterraine de même longueur, par contre, devra être considérée dans tous les cas comme „ligne longue“ ou même „très longue“.

1. — Occupons-nous tout d'abord du premier cas, bien que succinctement, et considérons, fig. 14, le circuit *GLR* dans lequel agit la force électromotrice de générateur

$$e = f(t) = E \sqrt{2} \sin \omega t = V_0 \sqrt{2} \sin \omega t$$

Dans l'hypothèse  $g = c = 0$ , les équations (56) et (57) deviennent:

$$(60) \quad -\frac{dV_x}{dx} = (r + j\omega l) I_x = z I_x$$

$$(61) \quad \text{et} \quad -\frac{dI_x}{dx} = 0$$

et peuvent aussi s'écrire, puisque  $r + j\omega l$  est l'expression complexe de l'impédance de la ligne par unité de longueur et en vertu de ce qui a été dit plus haut:

$$(62) \quad \left\{ \begin{array}{l} -\frac{dV_x}{dx} = z I_x = z e^{j\varphi} I_x \\ \text{et} \quad -\frac{dI_x}{dx} = 0, \end{array} \right.$$

$$\text{avec } z = \sqrt{r^2 + \omega^2 l^2} \quad \text{et} \quad \varphi = \arctg \frac{\omega l}{r}$$

Ou en tire immédiatement, de la seconde:

$$(63) \quad I_x = -A = \text{constante}$$

ce qui veut dire que l'intensité du courant a même valeur efficace et même phase en tous les points du circuit, et, de la première, en tenant compte du résultat précédent:

$$(64) \quad V_x = z A x + B = z A x e^{j\varphi} + B$$

Tenant compte de ce que la phase de la tension à l'origine,  $v_0$ , est prise pour origine des phases, c'est-à-dire

$$V_x = V_0, \quad \text{pour } x = 0$$

$$\text{et de ce que} \quad V_x = V_L = -Z' A = -Z' A e^{j\varphi'}, \quad \text{pour } x = L,$$

on trouve, en introduisant ces conditions dans l'équation (64) et en tenant compte de (63):

$$B = V_0$$

$$A = -\frac{V_0}{Z' + Lz} = -\frac{V_0}{Z' + Z}$$

d'où finalement, après quelques transformations :

$$(65) \quad V_x = V_0 \left[ 1 - \frac{z \varepsilon^{j\psi}}{Z' \varepsilon^{j\psi'} + Z \varepsilon^{j\psi}} x \right] = V_0 \left[ 1 - \frac{z}{Z' + Z} x \right]$$

$$(66) \quad \text{et} \quad I_x = -A = \frac{V_0}{Z' \varepsilon^{j\psi'} + Z \varepsilon^{j\psi}} = \frac{V_0}{Z' + Z} = I$$

en posant  $Z = Lz = Lz \varepsilon^{j\psi} = Z \varepsilon^{j\psi}$ , expression qui représente l'impédance totale de la ligne.

Pour  $Z' = \infty$ , cas de la ligne *ouverte* à son extrémité, on a :

$$(67) \quad \begin{cases} V_x = V_0 = \text{constante} \\ I_x = 0, \end{cases}$$

la tension a même valeur efficace et même phase dans toute l'étendue de la ligne.

Pour  $Z' = 0$ , cas de la ligne *court-circuitée* à son extrémité, on a :

$$(68) \quad \begin{cases} V_x = V_0 \left[ 1 - \frac{z}{Lz} x \right] = V_0 \left[ 1 - \frac{x}{L} \right] \\ \text{et} \quad I_x = \frac{V_0}{Z} = \frac{V_0}{Z} \varepsilon^{-j\psi} = I. \end{cases}$$

Dans ce dernier cas, la tension a *même phase* en tous les points de la transmission ; elle s'abaisse *graduellement* et *linéairement* au taux de :

$$\frac{dV_x}{dx} = -\frac{V_0}{L} \text{ par unité de longueur.}$$

De son côté, l'intensité du courant a même valeur efficace et même phase en retard de  $\varphi$  sur celle de la tension. On peut donc écrire en *réintroduisant la variable t*

$$(69) \quad \begin{cases} v = V_0 \sqrt{2} \left[ 1 - \frac{x}{L} \right] \sin \omega t = f(x, t) \\ i = \frac{V_0}{Z} \sqrt{2} \sin (\omega t - \varphi) = \frac{V_0 \sqrt{2}}{L \sqrt{r^2 + \omega^2 l^2}} \sin \left( \omega t - \text{arctg} \frac{\omega l}{r} \right) = g(t) \end{cases}$$

On pourrait faire de même pour le cas général représenté par les équations (65) et (66). Il suffirait de remonter des quantités complexes aux quantités réelles et de réintroduire convenablement la variable  $t$ .

On verrait alors facilement que, dans ce cas, la tension  $v$  n'aurait pas la même *phase* en tous les points de la transmission, sauf pour le cas  $\varphi = \varphi'$ . On verrait de même que la *valeur efficace* de la tension ne varierait pas linéairement avec  $x$ , sauf, de nouveau, pour le cas  $\varphi = \varphi'$  et, enfin, on verrait que la *chute* de tension pourrait, pour certaines valeurs négatives de  $\varphi'$  (déphasage en avant dans le récepteur : moteurs synchrones surexcités, capacités) être négative dans les sens des  $x$  croissants  $\left( \frac{dV}{dx} \right)_{x>0} > 0$ . Il y aurait alors élévation de tension du point de départ  $x = 0$  au point d'arrivée  $x = L$ .

Ces résultats ressortent avec évidence de la figure 15 dans laquelle  $\varphi_x$  représente le déphasage de  $v$  par rapport à  $i$  en un point  $x$  de la ligne et  $\varphi_0$  la même grandeur pour  $x = 0$ .

Les équations ci-dessus, (65) à (68), ont même forme que les équations (13) à (16) que nous avons obtenues dans le cas d'un circuit à courant continu (fig. 4) semblable au circuit (fig. 14) que nous venons de considérer. La seule différence réside dans le fait que les quantités réelles  $r$  et  $R$  des secondes (résistances) sont remplacées par les quan-

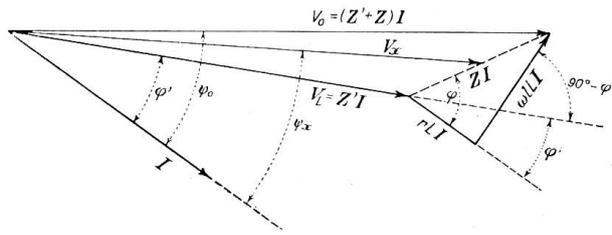


Fig. 15.

tités complexes  $z$  et  $Z$  (impédances complexes) dans les premières, ce qui leur donne le sens géométrique (composition) dont il a été parlé au début de ce chapitre.

2. — Passons au cas général, c'est-à-dire à celui dans lequel on tient compte des quatre constantes  $r, g, l$  et  $c$ .

En considérant attentivement l'équation (56), qui peut s'écrire :

$$-dV_x = r dx I_x + j\omega l dx I_x,$$

on voit que la variation de tension  $-dV_x$  doit être capable de faire surmonter au courant  $I_x$  une résistance  $rdx$ , d'où la présence du terme  $rdx I_x$  qui représente une tension de résistance en phase avec le courant, et, en outre, de lui faire surmonter une réactance de self-induction  $\omega l dx$ , d'où la présence du terme  $j\omega l dx I_x$  qui représente, à cause du facteur  $j = \sqrt{-1}$ , une tension de réactance en quadrature et en avance sur le courant au point  $x$  considéré (fig. 16).

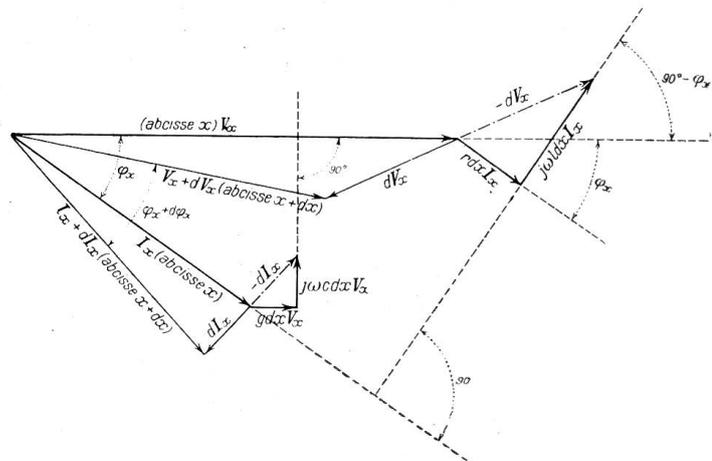


Fig. 16. (Pour  $x = 0$  en G, fig. 14).

De même, le long de l'élément  $dx$ , le courant subit une variation  $-dI_x$  égale à la somme géométrique du courant de conduction  $g dx V_x$ , en phase avec  $V_x$  et qui se ferme à travers l'isolant de conductance  $g dx$ , et du courant de déplacement (capacité)  $j\omega c dx V_x$ , en quadrature et en avance sur  $V_x$  et qui se ferme à travers la capacité  $c dx$  de l'isolant, d'où, ainsi que le montre (57):

$$-dI_x = g dx V_x + j\omega c dx V_x \text{ (voir figure 16).}$$

On voit ainsi clairement que tension  $v$  et intensité du courant  $i$  varient avec  $x$  et cela aussi bien en *grandeur* qu'en *phase*. La variation de  $v$ , en grandeur et en phase, est due aussi bien,  $i$  variant simultanément, aux effets de la conductance des pertes ou perditance et de la capacité qu'aux effets de la résistance et de la self-inductance. Il en sera de même pour  $i$ . Et comme la variation dans le *temps* est supposée être sinusoïdale [c'est, nous le rappelons, ce qui nous a permis d'écrire les équations sous la forme symbolique (56), (57), (58) et (59),  $i$  et  $v$ , et non pas seulement  $v$ , seront fonctions de  $x$ , la *distance*, et de  $t$ , le *temps*. Nous serons conduit aux solutions :

$$v = f(x, t) \\ i = \varphi(x, t), \text{ ainsi que cela a déjà été dit ci-haut.}$$

Si nous considérons l'équation (58) que l'on peut écrire, en effectuant le produit qui multiplie  $V_x$  :

$$\frac{d^2 V_x}{dx^2} = [rg - \omega^2 lc + j\omega (lg + rc)] V_x = \mathbf{z a} V_x \\ = (\beta + j\gamma)^2 V_x \\ = \mathbf{k^2} V_x,$$

nous voyons que nous retombons sur une équation dont la forme est la même que (18), à cela près que  $k$ , au lieu d'être égal à la quantité réelle  $\sqrt{rg}$  est égal à une quantité complexe fonction de  $r, g, l, c$  et  $\omega$ , et que  $V_x$ , grandeur complexe, remplace  $v$ , grandeur réelle.

Nous aurons donc comme solutions :

pour  $V_x$  :

$$V_x = A e^{(\beta + j\gamma)x} + B e^{-(\beta + j\gamma)x}$$

et pour  $I_x$ , en vertu de (56) :

$$I_x = - \frac{1}{r + j\omega l} \frac{dV_x}{dx} = \frac{\beta + j\gamma}{r + j\omega l} \left[ B e^{-(\beta + j\gamma)x} - A e^{(\beta + j\gamma)x} \right]$$

dans lesquelles  $A$  et  $B$  sont des grandeurs complexes, homogènes à une tension, dont les modules (valeurs efficaces) et les arguments (phases) se déterminent au moyen des conditions aux limites.

Nous pouvons donc poser :

$$A = V_1 e^{-j\alpha_1}$$

$$B = V_2 e^{-j\alpha_2}$$

et écrire :

$$(70) \quad \left\{ \begin{array}{l} V_x = V_1 e^{\beta x} e^{j(\gamma x - \alpha_1)} + V_2 e^{-\beta x} e^{-j(\gamma x + \alpha_2)} \\ \text{et} \quad I_x = \frac{V_2}{Z_0} e^{-\beta x} e^{-j(\gamma x + \alpha_2 + \delta)} - \frac{V_1}{Z_0} e^{\beta x} e^{j(\gamma x - \alpha_1 - \delta)} \end{array} \right.$$

en posant

$$(71) \quad \frac{r + j\omega l}{\beta + j\gamma} = Z_0 = Z_0 e^{j\delta}, \text{ grandeur homogène à une impédance.}$$

Posant enfin

$$\frac{V_2}{Z_0} = I_2 \text{ et } \frac{V_1}{Z_0} = I_1,$$

puis réintroduisant la variable  $t$  conformément à l'hypothèse faite [voir (54) et (55)], nous pourrions écrire

$$(72) \quad \left\{ \begin{array}{l} v = V_1 \sqrt{2} e^{\beta x} \sin(\omega t + \gamma x - \alpha_1) + V_2 \sqrt{2} e^{-\beta x} \sin(\omega t - \gamma x - \alpha_2) = f(x, t) \\ \text{et } i = I_2 \sqrt{2} e^{-\beta x} \sin(\omega t - \gamma x - \alpha_2 - \delta) - I_1 \sqrt{2} e^{\beta x} \sin(\omega t + \gamma x - \alpha_1 - \delta) = \varphi(x, t) \end{array} \right.$$

et il ne restera plus qu'à déterminer les constantes  $V_1$  et  $V_2$ , ainsi que les angles de phase  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ , en tenant compte des conditions aux limites.

Cette détermination de  $V_1, \alpha_1, V_2$  et  $\alpha_2$  peut se faire soit par voie analytique, ce qui n'offre aucune difficulté, soit par voie graphique, ainsi que l'a montré *M. A. Blondel* dans la série d'admirables travaux qu'il a consacrés à ce sujet (Bulletin de la Société Internationale des Electriciens, 1905; Eclairage Electrique, 1906; etc.).

*La signification physique des résultats (72) apparaît immédiatement.* Il suffit d'avoir quelque exercice en pareille matière pour s'apercevoir que les fonctions  $v$  et  $i$  apparaissent comme la somme ou la différence de 2 ondes **affaiblies** ou **amorties** qui se propagent en sens inverse l'une de l'autre avec la même vitesse.

Comme le but de ce travail est précisément de répandre un peu plus qu'elles ne le sont des notions dont il est assez difficile de se faire une image pour qui n'en fait pas emploi souvent, nous voulons sérier les difficultés et commencer par considérer un cas, celui de la ligne infiniment longue, qui se prête particulièrement bien à la mise en relief du caractère de la transmission par courants alternatifs.

Mais, auparavant, revenons sur quelques points.

Nous avons posé :

$$k^2 = (\beta + j\gamma)^2 = rg - \omega^2 lc + j\omega(lg + rc) = \mathbf{za}$$

d'où

$$\beta^2 - \gamma^2 = rg - \omega^2 lc = \mathbf{b}$$

$$\text{et} \quad 2\beta\gamma = \omega(lg + rc) = \mathbf{d}.$$

On en tire facilement :

$$(73) \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{b + \sqrt{d^2 + b^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{rg - \omega^2 lc + \sqrt{(r^2 + \omega^2 l^2)(g^2 + \omega^2 c^2)}}$$

$$(74) \quad \text{et } \gamma = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{-b + \sqrt{d^2 + b^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{-rg + \omega^2 lc + \sqrt{(r^2 + \omega^2 l^2)(g^2 + \omega^2 c^2)}}$$

ce qui détermine entièrement

$$\mathbf{k} = \beta + j\gamma = \sqrt{\mathbf{z} \cdot \mathbf{a}}$$

Dans le cas particulier où  $\omega = 0$ , c'est-à-dire dans le cas du *courant continu* en régime permanent (courant de fréquence nulle ou de période infiniment longue), on a :

$$(75) \quad \begin{cases} \beta = \sqrt{rg} \text{ (voir formule (20)).} \\ \gamma = 0 \\ \text{d'où } k = \beta_{\omega=0} = \sqrt{rg}, \text{ quantité réelle.} \end{cases}$$

Dans le cas où  $r$  et  $g$  sont *négligeables* (circuits ou lignes de très faible résistance et très bien isolées), on a :

$$\begin{aligned} \beta &= 0 \\ \gamma &= \omega \sqrt{lc} = 2\pi f \sqrt{lc} \\ \text{et } \mathbf{k} &= j\omega \sqrt{lc}, \text{ quantité imaginaire.} \end{aligned}$$

Dans le cas où  $g$  et  $l$  sont *négligeables* (câbles téléphoniques ordinaires) on a :

$$\begin{aligned} \beta &= \gamma = \sqrt{\frac{\omega cr}{2}} \\ \mathbf{k} &= \sqrt{\frac{\omega cr}{2}} + j \sqrt{\frac{\omega cr}{2}}, \text{ quantité complexe.} \end{aligned}$$

Si  $g = 0$ , ou *pratiquement négligeable* (cas des lignes de transmission d'énergie), il vient :

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\omega c(z - \omega l)} \\ \gamma &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\omega c(z + \omega l)} \\ \mathbf{k} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\omega c(z - \omega l)} + j \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\omega c(z + \omega l)}, \text{ quantité complexe.} \end{aligned}$$

Enfin, cas plutôt théorique, si les constantes de ligne satisfont à la relation :

$$r : l = g : c, \text{ on a :}$$

$$\beta = \sqrt{rg}; \quad \gamma = \omega \sqrt{lc}; \quad \mathbf{k} = \sqrt{rg} + j\omega \sqrt{lc}, \text{ quantité complexe.}$$

D'autre part, nous avons introduit une quantité  $\mathbf{Z}_0$ , soit une impédance complexe (71), que nous avons pris comme symbole de :

$$\frac{r + j\omega l}{\beta + j\gamma} = \frac{\mathbf{z}}{\sqrt{\mathbf{z} \cdot \mathbf{a}}} = \sqrt{\frac{\mathbf{z}}{\mathbf{a}}} = \sqrt{\frac{r + j\omega l}{g + j\omega c}} = Z_0 e^{j\delta} = Z_0 [\cos \delta + j \sin \delta]$$

On voit sans peine, après quelques calculs dont l'essence a été rappelée au commencement de ce chapitre, que son module est :

$$(80) \quad \begin{cases} Z_0 = \sqrt{\frac{r^2 + \omega^2 l^2}{\beta^2 + \gamma^2}} \\ \text{et son argument } \delta = \arctg \frac{\beta \omega l - \gamma r}{\beta r + \gamma \omega l} \end{cases}$$

Reprenant les plus intéressants des cas particuliers examinés ci-dessus, nous voyons que :

$$\text{pour } \omega = 0: \quad Z_0 = \sqrt{\frac{r}{g}} = R_0; \quad \delta = 0 \quad [\text{voir (21)}]$$

$$\text{pour } r = g = 0: \quad Z_0 = \sqrt{\frac{l}{c}}; \quad \delta = 0$$

$$\text{pour } l = g = 0: \quad Z_0 = \sqrt{\frac{r}{\omega c}}; \quad \delta = -45^\circ$$

$$\text{pour } g = 0: \quad Z_0 = \sqrt{\frac{z}{\omega c}}; \quad \delta, \text{ comme ci-haut (80) avec les valeurs particulières de } \beta \text{ et de } \gamma \text{ pour } g = 0$$

$$\text{pour } r : l = g : c; \quad Z_0 = \sqrt{\frac{l}{c}}; \quad \delta = 0.$$

Venons-en maintenant, en ne considérant d'ailleurs que l'essentiel, à l'examen d'un certain nombre de cas particuliers.

### I. Cas de la ligne infiniment longue.

Supposons qu'une telle ligne (fig. 14) soit maintenue sous la tension

$$v_0 = V_0 \sqrt{2} \sin(\omega t)$$

à son extrémité A,  $x = 0$ . Prenant la phase de cette tension  $v_0$  comme origine des phases, nous pouvons écrire :

$$V_x = V_0, \quad \text{pour } x = 0.$$

La ligne étant infiniment longue, nous aurons évidemment, quelles que soient les conditions à l'extrémité B,

$$V_x = I_x = 0, \quad \text{pour } x = \infty$$

En tenant compte de ces conditions aux limites dans la première des équations (70), nous voyons que

$$\begin{aligned} V_1 &= 0 \\ V_2 &= V_0; \quad \alpha_2 = 0 \end{aligned}$$

$$(81) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{d'où } V_x = V_0 e^{-\beta x} e^{-i\gamma x} = V_0 e^{-(\beta + i\gamma)x} = f(x) \\ \text{et } I_x = \frac{V_0}{Z_0} e^{-\beta x} e^{-i(\gamma x + \delta)} = \frac{V_x}{Z_0 e^{i\delta}} = \frac{V_x}{Z_0} = g(x) \end{array} \right.$$

ou bien, en réintroduisant le temps  $t$  et en faisant usage des fonctions hyperboliques :

$$(82) \quad \left\{ \begin{array}{l} v = V_0 \sqrt{2} [\cos h \cdot \beta x - \sin h \cdot \beta x] \sin(\omega t - \gamma x) = f(x, t) \\ \text{et } i = \frac{V_0}{Z_0} \sqrt{2} [\cos h \cdot \beta x - \sin h \cdot \beta x] \sin(\omega t - \gamma x - \delta) = g(x, t) \end{array} \right.$$

Voyons tout d'abord ce que ces résultats signifient.

On remarque en premier lieu, (81), que pour  $x = 0$ ,

$$(83) \quad I_x = \frac{V_0}{Z_0} = \frac{V_0}{Z_0} e^{-i\delta} = I_0$$

*c'est-à-dire que la ligne infiniment longue, quelles que soient d'ailleurs les conditions à l'extrémité B, appelle au départ un courant qui est le même, en valeur efficace et en phase, que celui que la source débiterait si on la fermait directement sur un circuit extérieur localisé (circuit-point) d'impédance  $Z_0$ , voir (80).*

Cette impédance  $Z_0$  porte le nom **d'impédance caractéristique** ou, tout court, de **caractéristique** de la ligne.

D'autre part, (81) montre que la tension passe de la valeur  $V_0$  à la valeur  $V_0 \varepsilon^{-(\beta + j\gamma)L}$  quand on passe du point  $A$  au point pour lequel  $x = 1$  et à la valeur  $V_0 \varepsilon^{-(\beta + j\gamma)L}$ , quand on passe du point  $A$  au point pour lequel  $x = L$  sur la ligne infiniment longue.

Le rapport 
$$\frac{V_0 \varepsilon^{-(\beta + j\gamma)L}}{V_0} = \varepsilon^{-\beta L} \varepsilon^{-j\gamma L}$$

qui, en vertu de relations qui ont été rappelées aux pages 41 et 50. peut s'écrire:

$$\varepsilon^{-\beta L} \varepsilon^{-j\gamma L} = [\cosh \beta L - \sinh \beta L] [\cos \gamma L - j \sin \gamma L]$$

exprime que quand on passe du point  $A$  au point pour lequel  $x = L$ , la **valeur efficace** de la tension passe de  $V_0$  à

$$V_0 \varepsilon^{-\beta L} = V_0 [\cosh \beta L - \sinh \beta L]$$

tandis que la **phase** de la tension en ce point  $x = L$  retarde sur celle de la tension en  $A$  d'un angle  $\gamma L$ .

Ce rapport s'appelle le **facteur d'affaiblissement normal** de la ligne pour la longueur  $L$ .

L'exposant  $(\beta + j\gamma)L$  est un **angle complexe** qui porte le nom d'**exposant d'affaiblissement** pour la longueur  $L$ .

La partie réelle de  $\varepsilon^{-(\beta + j\gamma)L}$ , soit  $\varepsilon^{-\beta L}$  est le **facteur d'affaiblissement-valeur** ou **d'amortissement réel**.  $\beta L$  de son côté, est l'**exposant d'affaiblissement réel**; il intéresse la **valeur efficace** de la tension. C'est un **angle hyperbolique**.

La partie imaginaire  $\varepsilon^{-j\gamma L}$  est le **facteur d'affaiblissement-phase**.  $\gamma L$  est l'**exposant d'affaiblissement-phase**; il intéresse la **phase** de la tension. C'est un **angle circulaire**. (Voir ce qui a été dit au commencement de ce chapitre, page 50.)

Quant à l'**intensité du courant**, la formule (81) montre qu'elle suit la **même loi** que la tension, mais avec une **différence de phase constante**  $\delta$ .

Ce **déphasage** (on le désigne souvent sous le nom d'angle de décalage-espace, parce qu'il résulte de l'effet des constantes distribuées) ou **décalage**  $\delta$  est **négatif et généralement compris entre  $-45^\circ$  et  $0^\circ$**  [voir formule (80)] de telle sorte que  $i$  précède  $v$  d'un angle  $\delta$ .

Mais ce n'est pas tout. Les formules (81) ou (82) montrent que  $v$  et  $i$  reprennent la même phase en tous les points de la ligne séparés les uns des autres par la distance:

$$(84) \quad \lambda = \frac{2\pi}{\gamma}$$

ce qui veut dire que si l'on considère un **instant** bien déterminé, par exemple l'instant  $t = \frac{T}{4}$  auquel la tension en  $A$  est maximum et égale à  $V_0 \sqrt{2}$ , la tension au point d'abscisse  $x = \lambda$ , c'est-à-dire au point situé à la distance  $\lambda$  du point  $A$ , est maximum **au même instant** avec la valeur  $V_0 \sqrt{2} \varepsilon^{-\beta \lambda}$ ; la tension est également maximum **au même instant** à la distance  $2\lambda$ , mais avec la valeur  $V_0 \sqrt{2} \varepsilon^{-2\beta \lambda}$ , et ainsi de suite.

Un quart de période plus tard, soit au temps  $t = \frac{T}{2}$ , la tension sera nulle en  $A$ .

Elle sera maximum **au même instant** et de valeur  $V_0 \varepsilon^{-\beta \frac{\lambda}{4}}$  au point d'abscisse  $x = \frac{\lambda}{4}$ .

De même au point d'abscisse  $x = \frac{5}{4} \lambda$  avec la valeur  $V_0 \varepsilon^{-\beta \frac{5\lambda}{4}}$ .

Le même phénomène se produira pour l'intensité  $i$ , mais avec un décalage-temps de valeur

$$\theta = \frac{\delta}{\omega} = T \frac{\delta}{2\pi}$$

dans le sens d'une avance de  $i$  sur  $v$ , ou bien, en un instant donné,  $v$  et  $i$  auront la même phase en des points distants de  $\frac{\delta}{\gamma}$  les uns des autres.

Les formules (81) ou (82) montrent donc que  $v$  et  $i$  se présentent sous la forme de deux ondes qui se propagent avec affaiblissement ou amortissement dans le sens positif, soit de  $A$  vers l'extrémité infiniment éloignée  $B$ . **L'onde unique  $i$  précède l'onde unique  $v$  d'une longueur**

$$\frac{\delta}{\gamma} = \lambda \cdot \frac{\delta}{2\pi}$$

Toutes deux avancent d'une quantité  $\lambda$  pendant la durée d'une période, soit pendant le temps  $T = \frac{1}{f}$ , de telle sorte que leur vitesse de propagation est:

$$(85) \quad v = \frac{\lambda}{T} = f \cdot \lambda = \frac{\omega}{2\pi} \lambda = \frac{2\pi f}{\gamma} = \frac{\omega}{\gamma}$$

La distance  $\lambda$  est appelée **la longueur d'onde** de la ligne ou de la transmission.

De son côté, la quantité  $v$  est appelée **vitesse de propagation des ondes électriques** ou, tout court, **vitesse de l'électricité** sur la ligne considérée.

Ces résultats sont clairement mis en évidence par les figures suivantes qui représentent la grandeur  $v$ .

Dans le mode de représentation par vecteurs fixes (quantités complexes), on pourra, ainsi que nous l'avons fait dans la figure 17, prendre comme origine des phases la direction verticale  $0y$ . La tension à l'origine de la ligne,  $x = 0$ , sera représentée par un vecteur  $0A = V_0 \sqrt{2}$  portée suivant  $0y$ , puisque la phase de  $v_0$  a été prise comme origine des phases. A la distance  $\frac{1}{12} \lambda$  règne

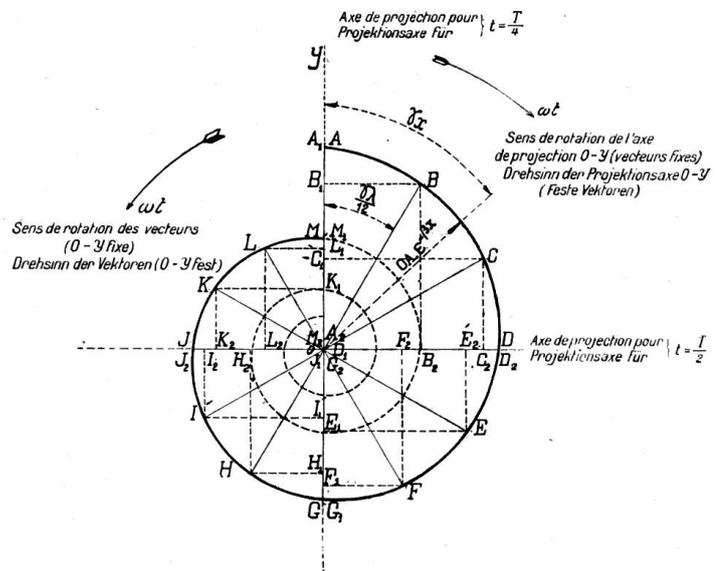


Fig. 17.  
Ligne infiniment longue  $V_x = f(x)$

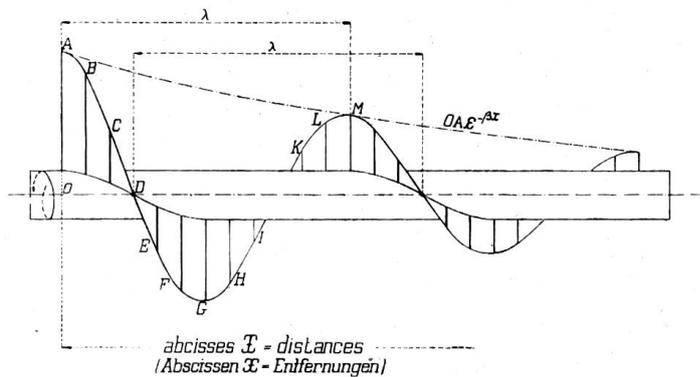


Fig. 18.  
Ligne infiniment longue  $V_x = f(x)$

une tension d'amplitude

$$V_0 \sqrt{2} \epsilon^{-\beta \frac{\lambda}{12}}$$

dont la phase retarde sur la phase de celle qui règne à l'origine

$x = 0$  d'un angle  $\gamma \frac{\lambda}{12} = 30^\circ$ . On

pourra donc la représenter par un vecteur

$$0B = 0A \epsilon^{-\beta \frac{\lambda}{12}}$$

porté dans une direction faisant l'angle  $30^\circ$  avec  $0y$ , en arrière.

En continuant de la même façon en avançant de quantités  $\frac{\lambda}{12}$  le long de la ligne, on obtient la figure 17. La courbe qui joint les extrémités des vecteurs  $0A, 0B, 0C$

etc. est une spirale logarithmique que nous avons tracée en trait fort pour la première distance  $\lambda$ , puis en traits-points pour deux autres longueurs  $\lambda$ . Cette figure représente l'extrémité des vecteurs tension vus de l'extrémité côté générateur de la ligne.

En situant ces vecteurs aux points correspondants de la ligne et en regardant cette dernière de côté, la spirale, tirée par son centre 0, devient l'hélice à pas constants, mais à rayons décroissants exponentiellement, de la figure 18. Cette hélice, qui s'enroule autour de l'axe de la ligne, représente l'équation (81) en  $V_x$ .

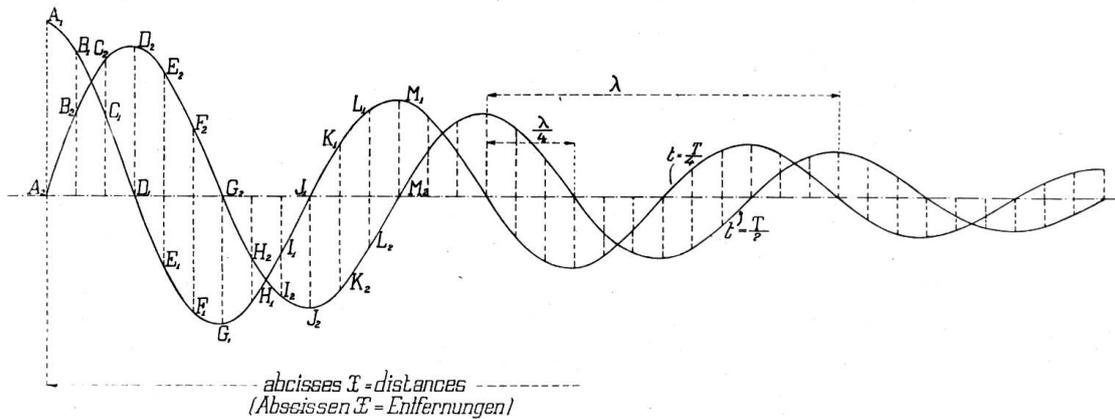


Fig. 19.

$$\text{Ligne infiniment longue } v = f(x, t) \text{ aux instants } \begin{cases} t = \frac{T}{4} \text{ indices 1} \\ t = \frac{T}{2} \text{ indices 2} \end{cases}$$

En projetant cette hélice sur le plan du tableau, on obtient, fig. 19, en  $A_1 B_1 C_1 D_1 \dots$ , l'onde de tension à l'instant  $t = \frac{T}{4}$ . Si on fait tourner l'hélice d'un quart de tour à gauche et que, dans cette position, on la projette de nouveau sur le plan du tableau, on obtient, fig. 19, en  $A_2 B_2 C_2 D_2 \dots$  l'onde de tension à l'instant  $t = \frac{T}{2}$ , soit un quart de période plus tard. On voit que dans l'intervalle  $t = \frac{T}{4}$  à  $\frac{T}{2}$ , l'onde de tension a progressé dans le sens positif d'une longueur  $\frac{\lambda}{4}$  c'est-à-dire d'un quart de longueur d'onde.

Si, par la pensée, on entraîne l'hélice à une vitesse uniforme telle que l'arbre qui la supporte fasse  $f$  (fréquence de la source) *tours par seconde* ou  $\omega$  (pulsation de la source) *radiants par seconde*, la projection de l'hélice sur le plan du tableau apparaîtra sous forme d'onde *amortie entretenue* en  $A$  et avançant sur la ligne à la vitesse donnée ci-haut (85).

On arriverait au même résultat pour l'onde  $i$  que nous n'avons pas représentée sur les figures 17, 18 et 19, afin de ne pas en altérer la clarté. La seule différence résiderait dans le décalage  $\delta$  dont il a été question ci-dessus.

D'une manière générale, les grandeurs  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $Z_0$ ,  $\delta$ ,  $\lambda$  et  $v$  sont fonctions de la fréquence  $f$  ou de la pulsation  $\omega$  et cela *d'une façon directe* parce que  $f$  ou  $\omega$  entrent comme facteurs dans les expressions (73), (74), (80), (84) et (85), et *d'une façon indirecte*, parce que les constantes  $r$ ,  $g$ ,  $I$  et  $c$  sont elles-mêmes, dans une certaine mesure, fonctions de  $\omega$  ou de  $f$ . Cependant, si l'on considère le cas d'une ligne aérienne pour transmission d'énergie, par exemple, on voit facilement, ce qui se comprend aisément, que  $\beta$ , même en tenant compte de l'effet pelliculaire qui se traduit par une augmentation de  $r$  quand  $\omega$  croît, tend très rapidement vers une limite et que cette dernière est atteinte pour des fréquences qui ne diffèrent pas beaucoup des fréquences en usage dans l'industrie.

Ainsi, la figure 20, qui donne les valeurs de  $\beta$  en fonction de la fréquence  $f$  et qui se rapporte à une ligne **aérienne** de constantes

$$\begin{aligned} r &= 0,35 \ \Omega \text{ par km} \\ g &= 1.10^{-7} \text{ mhos par km} \\ l &= 0,0014 \text{ henry par km} \\ c &= 0,008 \text{ m-farad par km} \end{aligned}$$

dont il sera question plus loin et qui fonctionne à une fréquence de 60 périodes par seconde, montre que  $\beta$  croît sensiblement jusqu'à 200 périodes par seconde pour rester ensuite pratiquement constant. Pour la dite ligne,  $\beta$  croît d'environ 4 % quand  $f$  passe de 60 à 200 périodes par seconde.

La grandeur  $\gamma$ , de son côté, tend très rapidement vers la valeur  $\omega\sqrt{lc}$ . Pour la ligne considérée (voir courbe  $\gamma$ , fig. 20), c'est également le cas à partir de 200 périodes par seconde. Il en résulte que dans une ligne aérienne, la vitesse  $v$  tend très vite vers la valeur

$$v = \frac{\omega}{\gamma} = \frac{\omega}{\omega\sqrt{lc}} = \frac{1}{\sqrt{lc}}$$

qui, comme on le sait, est numériquement égale à la *vitesse de la lumière*, c'est-à-dire 300 000 km par seconde. Pour la dite ligne, on trouve :

$$\sqrt{lc} = \sqrt{0,0014 \cdot 0,008 \cdot 10^{-6}} = 0,00000334$$

ce qui correspond bien à  $v = \frac{1}{0,00000334} = 300\ 000$  km par seconde.

Avec les vraies valeurs de  $\gamma$ , on trouve :

pour $f = 25$	$\gamma = 0,61742459 \cdot 10^{-3}$	$\lambda = 10412,8$ km	$v = 260320$ km par seconde
<b>60</b>	<b><math>1,31677354 \cdot 10^{-3}</math></b>	<b>4771,67</b> km	<b>286300</b> " "
75	$1,62305260 \cdot 10^{-3}$	3871,33 km	290349 " "
180	$3,80548406 \cdot 10^{-3}$	1651,07 km	297193 " "
300	$6,32071370 \cdot 10^{-3}$	994,05 km	298215 " "
420	$8,8404900 \cdot 10^{-3}$	710,73 km	298507 " "

On voit ainsi que dans un cas comme celui dont nous venons de nous occuper, les ondes, à partir d'une certaine valeur de  $\omega$ , se transmettent toutes *avec le même amortissement* et *avec une vitesse très voisine de celle de la lumière, soit 300 000 km par seconde*.

Si au lieu d'être placée *dans l'air*, comme cela était le cas ci-haut, la ligne, formée de conducteurs parallèles, traverse un milieu homogène de perméabilité magnétique  $\mu$  et de pouvoir inducteur spécifique  $K$ , le coefficient de self-inductance  $l$  sera  $\mu$  fois plus grand et la capacité  $K$  fois plus grande qu'auparavant, et alors la vitesse  $v$ , à partir du moment où elle pourra être considérée comme donnée par  $\frac{1}{\sqrt{lc}}$ , sera

$$(86) \quad \frac{1}{\sqrt{K\mu}} \text{ fois celle de la lumière, soit } \frac{300\ 000}{\sqrt{K\mu}} \text{ km par seconde.}$$

Quant à la caractéristique  $Z_0$ , on voit que dans le cas de la ligne qui nous occupe, son *module* tend très rapidement vers

$$Z_0 = \sqrt{\frac{l}{c}} = \sqrt{\frac{0,0014}{0,008}} 10^3 = 418 \text{ et son argument } \delta \text{ vers } 0,$$

ainsi que le montre le tableau suivant :

pour $f =$	25	$Z_0 = 572,6 \Omega$	$\delta = - 26^\circ 39' 20''$
	<b>60</b>	<b>458,1 <math>\Omega</math></b>	<b>- 15° 49' 30"</b>
	75	445 $\Omega$	- 13° 12' 53"
	180	423,3 $\Omega$	- 5° 54' 55"
	300	420,2 $\Omega$	- 3° 43' 40"
	420	419,2 $\Omega$	- 2° 34' 14"

On voit ainsi que dans le cas d'une ligne aérienne comme celle dont nous venons de nous occuper, la **caractéristique  $Z_0$** , à partir de valeurs de  $\omega$  ou de  $f$  qui ne sont pas très supérieures aux pulsations ou aux fréquences industrielles ordinaires, est assimilable à une résistance ohmique de valeur

$$(87) \quad Z_0 = R = \sqrt{\frac{l}{c}},$$

$l$  et  $c$  désignant la self-inductance et la capacité par km de ligne (puisque  $\delta = 0$ ,  $Z_0$  se réduit à une quantité réelle).

On en conclut immédiatement, mais seulement pour le cas de ligne indéfinie, du moins pour le moment, et pour une fréquence fondamentale suffisamment élevée, que si la tension initiale n'est pas sinusoidale, contrairement à ce qui a été admis ci-dessus, l'onde non sinusoidale, équivalente à une onde fondamentale et ses harmoniques sinusoidaux, se propage **pratiquement sans déformation**, car tous les mouvements sinusoidaux dont elle est composée se transmettent avec le **même amortissement  $\beta$** , avec la **même vitesse  $v$** , et retrouvent en tout point de la ligne leurs **phases respectives**, de façon à reproduire en ce point **en forme**, si ce n'est en valeur, l'onde déformée initiale.

Nous avons dit *pratiquement*, car cette absence de déformation ne se présente réellement que dans le cas théorique où les constantes satisfont à la relation :

$$r : l = g : c$$

On a en effet dans ce cas :  $\beta = \sqrt{rg}$ ,  $\gamma = \omega \sqrt{lc}$ ,  $Z_0 = \sqrt{\frac{l}{c}}$  et  $\delta = 0$  pour toute valeur de  $\omega$ , ainsi qu'on peut s'en convaincre facilement en introduisant la condition ci-dessus dans les formules (73), (74), et (80), et par conséquent

$$v = \frac{\omega}{\gamma} = \frac{1}{\sqrt{lc}}$$

et l'on peut alors écrire, d'après ce qui vient d'être dit et ce qui a déjà été dit plus haut, pour le cas de la ligne infiniment longue avec  $r : l = g : c$ .

$$(88) \quad \left\{ \begin{array}{l} v = V_0 \sqrt{2} \left[ \cos h \cdot \sqrt{rg} x - \sin h \cdot \sqrt{rg} x \right] \sin \omega \left[ t - \frac{x}{v} \right] = f(x, t) \\ \text{et } i = V_0 \sqrt{\frac{c}{l}} \sqrt{2} \left[ \cos h \cdot \sqrt{rg} x - \sin h \cdot \sqrt{rg} x \right] \sin \omega \left[ t - \frac{x}{v} \right] = \varphi(x, t) \end{array} \right.$$

Les ondes tension  $v$  et  $i$  ont la même phase au même point  $x$  de la ligne. Elles ne subissent aucune déformation le long de cette dernière, mais elles s'atténuent suivant la loi exponentielle  $e^{-\sqrt{rg} \cdot x}$ .

Dans le cas  $r = g = 0$ , on a  $\beta = 0$  et  $\gamma = \omega \sqrt{lc}$ ,  $Z_0 = \sqrt{\frac{l}{c}}$  et  $\delta = 0$ , d'où

$$(89) \quad \left\{ \begin{array}{l} v = V_0 \sqrt{2} \sin \left[ \omega t - \omega \sqrt{lc} x \right] = V_0 \sqrt{2} \sin \omega \left[ t - \frac{x}{v} \right] = f(x, t) \\ \text{et } i = V_0 \sqrt{\frac{c}{l}} \sqrt{2} \sin \left[ \omega t - \omega \sqrt{lc} x \right] = V_0 \sqrt{2} \sin \omega \left[ t - \frac{x}{v} \right] = \varphi(x, t) \end{array} \right.$$

*Les ondes tension et courant ont la même phase au même point  $x$  de la ligne. Elles ne subissent aucune déformation et aucune atténuation (amortissement) le long de cette dernière.*

Le premier de ces cas particuliers n'a pas grande signification pour les circuits industriels ordinaires (courants forts). Par contre, il est facile de comprendre qu'on ait intérêt à s'en rapprocher dans le cas des transmissions téléphoniques où les courants provoqués par les vibrations de la voix doivent autant que possible ne pas être déformés à leur arrivée au receveur. On y parvient, non toujours sans soulever d'autres difficultés (réflexions dues au changement de caractéristique) et d'une façon souvent imparfaite, par l'emploi de certains artifices sur lesquels nous ne saurions nous étendre ici.

## II. Cas d'une ligne de longueur finie $L$ .

Le cas précédent nous a permis de bien mettre en évidence la façon dont  $v$  et  $i$  varient le long d'une ligne homogène indéfinie. Dans l'hypothèse admise,  $v$  et  $i$  varient sinusoidalement dans le temps en chacun des points de la ligne et peuvent être considérés chacun comme dus au glissement d'une onde unique amortie, entretenue à l'origine et avançant à la vitesse  $\frac{\omega}{\gamma}$  (voir ce qui a été dit plus haut de cette vitesse).

Si nous nous reportons au cas général caractérisé par les équations (70) dans la forme symbolique ou par (72) dans la forme ordinaire, nous voyons que  $v$  et  $i$ , en un point  $x$  d'une ligne homogène de longueur finie, peuvent être considérés chacun comme dus à la superposition de deux ondes se propageant en sens inverse l'une de l'autre avec la même vitesse  $\frac{\omega}{\gamma}$ , l'une de ces ondes pouvant, en quelque sorte, être considérée comme l'onde réfléchie de l'autre. L'onde  $v$  est obtenue par l'addition d'une onde qui se propage du récepteur au générateur en s'amortissant dans ce sens (ou en s'amplifiant en sens inverse) et d'une onde qui se propage et s'amortit du générateur au récepteur. L'onde  $i$  est obtenue par la soustraction des deux mêmes ondes que ci-dessus, mais réduites dans le rapport  $\frac{1}{Z_0}$ , c'est-à-dire réduites en grandeur et en phase.

Pour trouver les grandeurs  $v$  et  $i$  correspondant à un régime permanent bien déterminé, nous pouvons nous servir soit de la forme symbolique (70), soit de la forme ordinaire (72). En y introduisant convenablement les conditions aux limites, nous pourrions déterminer les constantes  $V_1$  et  $V_2$ , ainsi que les angles de phase  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ .

Nous remarquons que les formules (70) donnant la solution des équations générales (58) et (56) pour le cas des grandeurs sinusoidales, ont exactement la même forme que les solutions (19) des équations (18) pour le cas du courant continu. La seule différence réside dans le fait que  $\beta x$ , angle hyperbolique réel dans (19) est remplacé par

$$Kx = (\beta + j\gamma)x,$$

angle hyperbolique complexe, et que  $A$ ,  $B$  et  $R_0$  grandeurs réelles dans (19) sont remplacées par  $A$ ,  $B$  et  $Z_0$ , grandeurs complexes.

Nous pouvons donc, sans refaire tous les calculs qui ont été esquissés à la page 41, écrire :

$$(90) \quad \left\{ \begin{array}{l} V_x = V_0 \frac{Z' \cos h \cdot k [L - x] + Z_0 \sin h \cdot k [L - x]}{Z' \cos h \cdot k L + Z_0 \sin h \cdot k L} = f(x) \\ \text{et } I_x = \frac{V_0}{Z_0} \frac{Z' \sin h \cdot k [L - x] + Z_0 \cos h \cdot k [L - x]}{Z' \cos h \cdot k L + Z_0 \sin h \cdot k L} = \varphi(x) \end{array} \right. \quad [\text{voir (24)}]$$

expressions qui représentent, sous forme symbolique, les valeurs efficaces et les phases de  $v$  et de  $i$  en un point quelconque d'une ligne alimentée sous la tension

$v_0 = V_0 \sqrt{2} \sin(\omega t)$  à son origine et fermée à son autre extrémité,  $x = L$ , par un récepteur d'impédance donnée  $Z' = Z' e^{i\psi'}$ .

Nous retrouverons alors, *mais sous forme symbolique*, toutes les solutions établies pour divers cas particuliers dans le chapitre que nous avons consacré au cas des courants continus en régime permanent. Il n'y aura cependant plus d'intérêt à faire la distinction  $Z' \begin{cases} < \\ > \end{cases} Z_0$ , ainsi qu'on s'en rend facilement compte.

Reprenons, en raison de l'intérêt particulier qu'ils présentent mais sans en reproduire tous les calculs, quelques-uns de ces cas.

### IIa. Cas de la ligne ouverte à son extrémité B, soit $Z' = \infty$ .

En introduisant cette condition dans (90), on trouve immédiatement :

$$(91) \quad \left\{ \begin{array}{l} V_x = V_0 \frac{\cosh \cdot (\beta + j\gamma) (L - x)}{\cosh \cdot (\beta + j\gamma) L} \\ \text{et } I_x = \frac{V_0}{Z_0} \frac{\sinh \cdot (\beta + j\gamma) (L - x)}{\cosh \cdot (\beta + j\gamma) L} \end{array} \right. \quad [\text{voir (25)}]$$

et on en tire, après quelques transformations évidentes et en passant aux quantités réelles, les valeurs efficaces de  $v$  et de  $i$  en un point quelconque, soit :

$$(92) \quad \left\{ \begin{array}{l} V_x = V_0 \sqrt{\frac{\cosh \cdot 2\beta (L - x) + \cos 2\gamma (L - x)}{\cosh \cdot 2\beta L + \cos 2\gamma L}} \\ \text{et } I_x = \frac{V_0}{Z_0} \sqrt{\frac{\cosh \cdot 2\beta (L - x) - \cos 2\gamma (L - x)}{\cosh \cdot 2\beta L + \cos 2\gamma L}} \end{array} \right.$$

et, en particulier :

$$(93) \quad \left\{ \begin{array}{l} V_x = V_0 = V_0 \\ I_x = I_0 = \frac{V_0}{Z_0} \operatorname{tgh} \cdot (\beta + j\gamma) L = \frac{V_0}{Z_0} \operatorname{tgh} \cdot kL \\ \text{avec } I_0 = \frac{V_0}{Z_0} \sqrt{\frac{\cosh \cdot 2\beta L - \cos 2\gamma L}{\cosh \cdot 2\beta L + \cos 2\gamma L}} \end{array} \right. \quad [\text{voir (26)}]$$

pour  $x = 0$ , c'est-à-dire au départ de la ligne ouverte en B; puis :

$$(94) \quad \left\{ \begin{array}{l} V_x = V_L = V_0 \frac{1}{\cosh \cdot (\beta + j\gamma) L} = \frac{V_0}{\cosh \cdot kL} = V_0 \operatorname{sech} \cdot kL \\ I_x = I_L = 0 \\ \text{avec } V_L = V_0 \sqrt{\frac{2}{\cosh \cdot 2\beta L + \cos 2\gamma L}} \end{array} \right. \quad [\text{voir (27)}]$$

pour  $x = L$ , c'est-à-dire à l'arrivée de la ligne en B.

On voit ainsi qu'une ligne de caractéristiques  $Z_0$  et  $k = \beta + j\gamma$  et de longueur  $L$ , soit d'angle hyperbolique complexe  $kL$ , ouverte à son extrémité A, accuse en B une tension

$$(95) \quad V_L = \frac{V_0}{\cosh \cdot kL} = V_0 \operatorname{sech} \cdot kL = V_0 \operatorname{sech} \cdot \sqrt{Z \cdot A} \quad [\text{voir (28)}]$$

et qu'elle absorbe à son origine A un courant dont l'intensité est la même que celle du courant que la source de potentiel  $v_0 = V_0 \sqrt{2} \sin \omega t$  produirait dans une impédance

$$(96) \quad Z_A = Z_0 \operatorname{cotg} h \cdot kL = \sqrt{\frac{Z}{A}} \operatorname{cotg} h \cdot \sqrt{Z \cdot A} \quad [\text{voir (29)}]$$

localisée en  $A$ . ( $Z$  impédance complexe totale et  $A$ , admittance complexe totale (latérale) de la ligne).

Mais il y a plus. En considérant d'un peu près les expressions (92), on s'aperçoit, comme  $\cos h \cdot 2\beta[L-x]$  décroît constamment avec  $x$  croissant et que  $\cos 2\gamma[L-x]$  oscille entre  $+$  et  $-1$ , que :

1<sup>o</sup> lorsque  $L$  est très grand, électriquement parlant,  $V_x$  et  $I_x$  oscillent périodiquement (variable  $x$ ), tout au moins vers l'extrémité  $B$  de la ligne, les minima de l'un correspondant aux maxima de l'autre et vice-versa

2<sup>o</sup> l'extrémité  $B$  est toujours un point de tension efficace maximum, mais qu'il peut y avoir, au fur et à mesure que l'on se rapproche du générateur, des points de tension efficace minimum supérieure à la tension efficace régnant en  $B$ .

3<sup>o</sup> tant que  $L$  est inférieur au quart de la longueur d'onde de la ligne,  $\lambda$ , ce qui pratiquement est toujours le cas, du moins pour les transmissions industrielles ordinaires (courants forts), la tension au départ est toujours inférieure à la tension à l'arrivée et cela avec une différence d'autant plus marquée que  $L$  se rapproche davantage du quart de la longueur d'onde  $\lambda$ .

Il y a donc, à circuit ouvert, **surtension permanente** au point d'arrivée. Cette surtension peut être assez marquée lorsque la transmission, bien que de longueur inférieure à  $\frac{\lambda}{4}$ , est longue, au sens ordinaire.

4<sup>o</sup> Si l'on détermine, en chacun des points de la ligne, l'angle de déphasage  $\varphi_x$  entre tension  $V_x$  et courant  $I_x$ , ce qui peut se faire par simple division des expressions complexes correspondantes, on voit que cet angle oscille autour de la valeur  $\delta$  (argument de la caractéristique  $Z_0$ ), les écarts de part et d'autre de  $\delta$  étant d'autant moins grands que l'on se rapproche davantage du générateur.

Comme  $\delta$  tend vers 0 quand la fréquence augmente, ou en conclut que les harmoniques, s'il y en a dans la courbe de tension du générateur, sont en phase avec leurs tensions respectives dans ce dernier et cela d'autant plus que la ligne est longue, de telle sorte qu'une longue ligne agit comme un étouffeur d'harmoniques vis-à-vis du générateur.

Si la ligne est quart d'onde pour un harmonique de rang quelconque  $n$  et de tension efficace  $V_{0n}$  dans le générateur, c'est-à-dire si

$$(97) \quad L = \frac{\lambda_n}{4} = \frac{2\pi}{4\gamma_n} \cong \frac{2\pi}{4n\omega\sqrt{Lc}} = \frac{1}{4fn\sqrt{Lc}}$$

puisque  $\gamma$  se rapproche très vite de  $\omega\sqrt{Lc}$ , alors le dit harmonique de tension est amplifié à l'arrivée où il prend la valeur donnée par (94) soit

$$V_{L,n} = V_{0,n} \sqrt{\frac{2}{\cos h \cdot 2\beta_n L + \cos 2\gamma_n L}}$$

$\beta_n$  et  $\gamma_n$  étant les valeurs de  $\beta$  et  $\gamma$  pour  $f_n = nf$ .

Comme dans ce cas

$$2\gamma_n L = \pi, \text{ d'où } \cos 2\gamma_n L = -1,$$

le facteur de surtension permanente de l'harmonique considéré sera :

$$\sqrt{\frac{2}{\cos h \cdot 2\beta_n L - 1}} = \frac{2}{\sqrt{\varepsilon^{2\beta_n L} + \varepsilon^{-2\beta_n L} - 2}} = \frac{2}{\varepsilon^{\beta_n L} - \varepsilon^{-\beta_n L}}.$$

Et puisque :

$$\varepsilon^{\pm\beta_n L} = 1 \pm \beta_n L + \frac{1}{2} \beta_n^2 L^2 \pm \dots$$

ou aura :

(98) 
$$V_{L,n} = \frac{2 V_{0,n}}{2 \beta_n L} = \frac{V_{0,n}}{\beta_n L},$$

en arrêtant le développement ci-dessus au second terme, ce qui est suffisamment exact tant que  $\beta_n L$  est petit.

Dans une ligne que nous prendrons plus loin comme exemple nous avons, pour  $L = 400$  km et  $f = 60$  périodes par seconde :

de (97) 
$$n = \frac{1}{4.400.60 \sqrt{Ic}} = 3,1 (3), \beta_n = 0,437.10^{-3}$$

$$V_{L,n} = V_{0,n} \cdot 5,72$$

et pour  $L = 200$  km :

$$n = 6,2 (5 \text{ ou } 7), \beta_n = 0,439 \cdot 10^{-3}$$

$$V_{L,n} = V_{0,n} \cdot 11,4$$

On voit ainsi, comme ce sont surtout les harmoniques de rang inférieur qui sont marqués dans les générateurs, que dans le cas de longues lignes (le mot long étant près au sens ordinaire) et lorsque la fréquence de l'onde fondamentale est relativement élevée (60 périodes) de telle façon que la ligne devienne quart d'onde pour un harmonique de rang inférieur (3, 5 ou 7), une *surtension permanente appréciable peut s'ajouter de ce fait à celle de l'onde fondamentale*. Ainsi dans le premier cas cité ci-dessus, en admettant que

$$V_{0,3} = 0,15 V_{0,1},$$

ce qui implique une courbe assez déformée, on arriverait à

$$V_L = V_0 1,40$$

environ, à ligne ouverte en  $B$  (facteur du surtension pour l'onde fondamentale: 1,135; pour l'harmonique de rang 3: 5,72).

**II b. Cas de la ligne court-circuitée en  $B$ , soit  $Z' = 0$ .**

Les formules (90) dans lesquelles on fait  $Z' = 0$ , donnent immédiatement :

(99) 
$$\left\{ \begin{array}{l} V_x = V_0 \frac{\sinh \cdot (\beta + j\gamma) (L - x)}{\sinh \cdot (\beta + j\gamma) L} \\ \text{et } I_x = \frac{V_0}{Z_0} \frac{\cosh \cdot (\beta + j\gamma) (L - x)}{\sinh \cdot (\beta + j\gamma) L} \end{array} \right. \quad [\text{voir (30)}]$$

d'où, pour les valeurs efficaces de  $v$  et  $i$  en un point quelconque :

(100) 
$$\left\{ \begin{array}{l} V_x = V_0 \sqrt{\frac{\cosh \cdot 2\beta [L - x] - \cos 2\gamma (L - x)}{\cosh \cdot 2\beta L - \cos 2\gamma L}} \\ \text{et } I_x = \frac{V_0}{Z_0} \sqrt{\frac{\cosh \cdot 2\beta (L - x) + \cos 2\gamma (L - x)}{\cosh \cdot 2\beta L - \cos 2\gamma L}} \end{array} \right.$$

et, en particulier :

$$(101) \quad \left\{ \begin{array}{l} V_x = V_0 = V_0 \\ I_x = I_0 = \frac{V_0}{Z_0} \cotg h \cdot k L \\ \text{avec } I_0 = \frac{V_0}{Z_0} \sqrt{\frac{\cos h \cdot 2 \beta L + \cos 2 \gamma L}{\cos h \cdot 2 \beta L - \cos 2 \gamma L}} \end{array} \right. \quad [\text{voir (31)}]$$

pour  $x = 0$ , c'est-à-dire au départ de la ligne court-circuitée à l'autre extrémité, en B.

D'autre part:  $V_x = V_L = 0$

$$(102) \quad \left\{ \begin{array}{l} I_x = I_L = \frac{V_0}{Z_0} \operatorname{cosec} h \cdot k L \\ \text{avec } I_L = \frac{V_0}{Z_0} \sqrt{\frac{2}{\cos h \cdot 2 \beta L - \cos 2 \gamma L}} \end{array} \right. \quad [\text{voir (32)}]$$

pour  $x = L$ , c'est-à-dire à l'extrémité en court-circuit, B.

On voit ainsi qu'une ligne de caractéristiques  $Z_0$  et  $k = \beta + j\gamma$  et de longueur  $L$ , soit d'angle hyperbolique complexe  $kL$ , court-circuitée à son extrémité B ( $Z' = 0$ ) tandis qu'elle est maintenue sous une tension  $v_0 = V_0 \sqrt{2} \sin \omega t$  à son autre extrémité, A, absorbe à son origine, A, un courant de même intensité que celui qui serait produit dans une impédance

$$(103) \quad Z_A = Z_0 \operatorname{tg} h \cdot k L = \sqrt{\frac{Z}{A}} \operatorname{tg} h \cdot \sqrt{Z A}. \quad [\text{voir (33)}]$$

localisée en A,

tandis qu'elle débite en B, soit à l'endroit du court-circuit, un courant de même intensité que celui qui serait produit dans une impédance

$$(104) \quad Z_{BA} = Z_0 \sin h \cdot k L = \sqrt{\frac{Z}{A}} \sin h \cdot \sqrt{Z A} \quad [\text{voir (34)}]$$

localisée en A également.

On pourrait, également dans ce cas, montrer que les valeurs de  $V_x$ ,  $I_x$  et  $\varphi_x$  oscillent du récepteur vers le générateur, le courant commençant par diminuer, la tension par s'élever.

### II c. Cas de la ligne fermée en B sur une impédance de valeur finie différente de 0, soit $Z'$ .

Ce cas pourrait être traité de la même façon que celui qui lui correspond pour le courant continu. Mais il n'y a pas le même intérêt à le faire ici, car les résultats que l'on obtient ne sont pas susceptibles de la même généralisation, l'influence du récepteur tenant non seulement de la valeur de  $Z'$ , mais aussi de sa phase (nature de la charge).

Nous nous bornerons donc à observer que dans le cas particulier où  $Z' = Z_0$  (en grandeur et en phase), c'est-à-dire que dans le cas où l'impédance du récepteur est égale à la caractéristique de la ligne, cette dernière se comporte, ainsi qu'on le voit facilement sur les équations (90) (voir les calculs pages 44 et 45, Bulletin N° 2), exactement de la même façon que si elle était infiniment longue et dans des conditions quelconques à son extrémité B. En un point qui se trouverait à la distance  $x$  du point de départ, la tension  $v$  et l'intensité du courant  $i$  auraient mêmes valeurs et mêmes phases (déphasage  $\delta$  de  $i$  sur  $v$ ) que celles qui régneraient au même point d'une ligne de mêmes caractéristiques s'étendant de A à l'infini.

Nous n'aurions donc plus qu'une seule onde  $v$  et une seule onde  $i$ ; il n'y aurait plus, ni dans  $v$ , ni dans  $i$ , d'ondes pouvant être considérées comme le résultat de réflexions en  $B$ , tandis qu'il y a toujours réflexions, à taux d'ailleurs variable, dans tous les autres cas.

Tous les résultats obtenus sous N° 1 s'appliquent donc sans autre à ce cas particulier.

Nous n'entrerons pas dans beaucoup de détails à cette place sur le cas général où  $Z'$  est différent de  $Z_0$ . Le sens général de ce que nous avons dit ci-dessus resterait le même. Nous nous contenterons simplement, afin d'éviter ce qui pourrait être considéré comme une lacune si nous ne le faisons pas, d'indiquer comment le problème peut être traité graphiquement et nous suivrons en cela la solution indiquée par A. Blondel, déjà en 1905. Comme le plus souvent, du moins dans la technique industrielle, les conditions de fonctionnement sont imposées à l'arrivée, nous compterons les distances à partir du point  $B$ , ce qui revient à changer  $x$  en  $-x$  dans les équations fondamentales (4) et (5). Les solutions données sous (72) peuvent alors s'écrire:

$$(105) \left\{ \begin{array}{l} v = V_1 \sqrt{2} \varepsilon^{\beta x} \sin(\omega t + \gamma x - \alpha_1) + V_2 \sqrt{2} \varepsilon^{-\beta x} \sin(\omega t - \gamma x - \alpha_2) \\ \text{et } i = \frac{V_1}{Z_0} \sqrt{2} \varepsilon^{\beta x} \sin(\omega t + \gamma x - \alpha_1 - \delta) - \frac{V_2}{Z_0} \sqrt{2} \varepsilon^{-\beta x} \sin(\omega t - \gamma x - \alpha_2 - \delta). \end{array} \right.$$

Supposons alors que la ligne  $m$ -phasée doive fournir à l'arrivée ( $x = 0$  et non plus  $x = L$ ) une puissance  $P'$  sous une tension  $V'$  entre fils et que le facteur de puissance des récepteurs soit  $\cos \varphi'$ . Chacun des fils de ligne débitera à l'arrivée un courant d'intensité efficace:

$$I' = \frac{P' 2 \sin \frac{\pi}{m}}{m V' \cos \varphi'}$$

et comme la phase de  $i'$  retarde de l'angle  $\varphi'$  sur la tension simple du système, soit sur la tension dont la valeur efficace est

$$V'_s = \frac{V'}{2 \sin \frac{\pi}{m}}$$

nous pourrons, en prenant par exemple la phase de  $v'_s$  comme origine des phases et en faisant passer  $Z_0$  dans le premier membre de  $i$  (105), écrire que pour  $x = 0$ ,  $v = v'_s$  et  $i = i'$ , ce qui donne:

$$(106) \quad V'_s \sqrt{2} \sin(\omega t) = V_1 \sqrt{2} \sin(\omega t - \alpha_1) + V_2 \sqrt{2} \sin(\omega t - \alpha_2)$$

$$\text{et (107)} \quad Z_0 I' \sqrt{2} \sin(\omega t - \varphi' + \delta) = V_1 \sqrt{2} \sin(\omega t - \alpha_1) - V_2 \sqrt{2} \sin(\omega t - \alpha_2)$$

Faisant la somme de (106) et (107), puis la différence, on obtient deux équations de condition dont il est facile de tirer  $V_1$ ,  $\alpha_1$  et  $V_2$ ,  $\alpha_2$ , soit analytiquement, soit graphiquement.

La première opération donne, en laissant de côté le facteur  $\sqrt{2}$ ,

$$V_1 \sin(\omega t - \alpha_1) = \frac{V'_s}{2} \sin(\omega t) + Z_0 \frac{I'}{2} \sin(\omega t - \varphi' + \delta),$$

$$\text{la seconde,} \quad V_2 \sin(\omega t - \alpha_2) = \frac{V'_s}{2} \sin(\omega t) - Z_0 \frac{I'}{2} \sin(\omega t - \varphi' + \delta).$$

Dès lors, figure 20, portant  $V'_s$  en  $0A$ ,  $I'$  en  $0B$  décalé de  $\varphi'$  sur  $0A$ ,  $\frac{V'_s}{2}$  en  $0A_1$  et  $\frac{Z_0 I'}{2}$  en  $0B_1$  décalé de  $\varphi' - \delta$  sur  $0A$ , le vecteur  $0C$  détermine  $V_1$  et  $\alpha_1$  et le vecteur  $0D$ , de son côté, détermine  $V_2$  et  $\alpha_2$ . Dans la figure, nous avons tenu compte de ce que  $\delta < 0$  et nous avons porté par conséquent  $0B_1$  en arrière de  $0B$ .

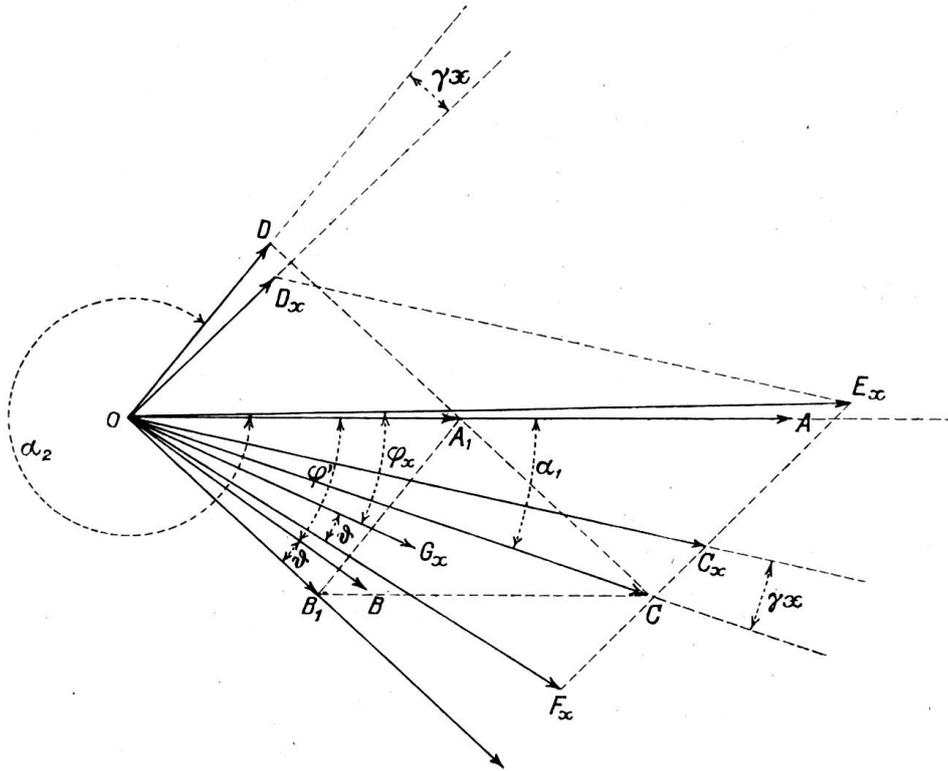


Fig. 20.

(Le point F'x sur OFx, tel que OF'x = OGx, a été omis dans la figur ci-dessus.)

Ayant ainsi déterminé  $V_1, V_2, a_1$  et  $a_2$ , le premier terme du second membre de  $v$  (105), pour un point quelconque situé à la distance  $x$  de l'arrivée, sera représenté par  $OC_x$  obtenu en décalant  $OC$  de l'angle  $\gamma x$  en avant et en l'allongeant dans le rapport

$$\frac{\varepsilon^{\beta x}}{1} = \cos h \cdot \beta x + \sin h \cdot \beta x$$

Le second terme du second membre de  $v$  (105), à son tour, sera représenté par  $OD_x$  obtenu en décalant  $OD$  de l'angle  $\gamma x$  en arrière et en le raccourcissant dans le rapport

$$\frac{\varepsilon^{-\beta x}}{1} = \cos h \cdot \beta x - \sin h \cdot \beta x$$

La somme géométrique de  $OC_x$  et de  $OD_x$ , soit  $OE_x$ , représente alors en grandeur et en phase la tension simple  $V_{sx}$  au point  $x$  et la différence géométrique, soit  $OF_x$ , des mêmes vecteurs représente le produit  $Z_0 I_x$ . Pour avoir  $I_x$ , c'est-à-dire le courant au point  $x$ , en grandeur et en phase, il suffit de diviser  $OF_x$  par  $Z_0$  (on revient ainsi de l'échelle des volts à celle des ampères) ce qui donne  $OF'_x$ , puis de décaler  $OF'_x$  en  $OG_x$  de l'angle  $\delta$  dans le sens convenable. L'angle  $G_x OE_x$  représente l'angle de décalage de  $I_x$  sur  $V_x$  au point considéré, soit l'angle  $\varphi_x$ .

Il va sans dire que ce qui précède est aussi l'interprétation graphique (pour  $x=0$  en  $B$ ) des équations symboliques (70) desquelles (72) ont été déduites en réintroduisant convenablement la variable  $t$ .

En appliquant ce procédé, ou tout autre équivalent, à différents régimes à l'arrivée, on verra qu'en cas de charge inductive ( $\varphi' > 0$ ), la tension  $V_x$  commencera par croître et l'intensité  $I_x$  par décroître, en allant du récepteur au générateur, tandis que l'angle de phase  $\varphi_x$  diminuera. Ces grandeurs subissent des oscillations (en distance  $x$ ) pour de grandes longueurs de ligne  $L$ . Le même phénomène se produira, mais avec inversion du sens de variation, dans le cas d'une charge anti-inductive (équivalente à une charge par capacité), soit dans le cas  $\varphi' < 0$ . Et dans le cas de charge non-inductive, les oscillations des valeurs  $I_x, V_x$  et  $\varphi_x$  disparaîtraient ou à peu près.

Dans le premier et le troisième cas, il y aura, tout au moins à partir de certaines valeurs de la charge  $P'$  et de certaines valeurs de  $\varphi'$ , *sous-tension à l'arrivée*, tandis que dans le deuxième cas, il y aura *surtension* et cela d'une manière d'autant plus marquée que la charge anti-inductive sera grande.

Enfin, ajoutons encore, pour n'avoir rien oublié, que dans le cas où la transmission serait hétérogène (combinaison de câbles souterrains et de lignes aériennes), tout problème pourra être résolu ainsi qu'il a été dit ci-haut. Il suffira, en partant des récepteurs, de remonter vers le générateur en appliquant les résultats précédents à chacun des tronçons homogènes, les conditions à l'arrivée de l'un de ces derniers étant celles de départ du suivant, côté récepteurs.

Nous sortirions par trop du cadre de cette notice si nous voulions nous étendre davantage sur le cas, cependant bien intéressant, de la ligne en charge.

Mais, afin de donner une consécration à ce qui précède, nous indiquons ci-dessous, à titre d'exemple, les chiffres que nous avons obtenus pour la ligne de transport à 140 000 volts et 60 périodes par seconde qui s'étend actuellement de *Au Sable-Vert* à *Flint* (Michigan, États-Unis d'Amérique). Nous avons utilisé pour cela les données que nous avons recueillies nous-même sur place, en 1912. Et pour bien mettre en évidence l'effet des constantes distribuées, nous avons, pour divers régimes à l'arrivée, calculé les régimes correspondants au départ et cela, une première fois, en négligeant capacité et conductance des pertes ( $c = g = 0$ ); une deuxième fois, en tenant compte de  $c$  et de  $g$ , mais en les identifiant à des capacités et conductances équivalentes placées tous les 100 kilomètres, et, enfin, une troisième fois, en tenant compte des constantes distribuées  $r, g, l$ , et  $c$  et des indications reçues pour  $g$ .

**Exemple.** La ligne en question, construite pour une puissance de 25 000 kW à 140 000 volts et 60 périodes par seconde, a une étendue d'environ 200 km et sera prolongée d'autant dans la suite. Triphasée, elle se compose de trois conducteurs de 9 mm de diamètre (câble de 50 mm<sup>2</sup> de section) placés à une distance moyenne d'environ 4<sup>m</sup> 60 les uns des autres. Il résulte de ces données et des mesures, il est vrai assez peu précises, qui ont été faites lors de la mise en service, que

$$\begin{aligned} r &= 0,35 \Omega \text{ par km} \\ g &= 1.10^{-7} \text{ mhos par km} \\ l &= 0,0014 \text{ henry par km} \\ c &= 0,008 \text{ microfarad par km.} \end{aligned}$$

Les constantes  $\beta, \gamma, Z_0, \delta, \lambda$  et  $v$  s'en déduisent sans difficulté. Nous les avons calculées pour des fréquences variant de 0 à 1200 périodes par seconde et les avons portées sous forme de courbes dans la figure 21. Leurs valeurs à 60 périodes par seconde sont:

$$\begin{aligned} \beta &= 0,4208597.10^{-3}; \gamma = 1,31677354.10^{-3}; \lambda = 4771,67 \text{ km} \\ v &= 286300 \text{ km par seconde}; Z_0 = 458,1 \Omega; \delta = -15^\circ 49'30'' \end{aligned}$$

Nous résumons, sous forme de tableaux, les résultats obtenus pour  $V' = 140\,000$  volts entre conducteurs à l'arrivée, soit  $V'_s = 80\,800$  volts, en considérant différentes charges aux distances de 200 et 400 km.

Nous avons également, afin de montrer l'effet de la fréquence, fait quelques calculs dont nous donnons aussi les résultats ci-dessous, pour 25 périodes par seconde. A cette fréquence, les grandeurs ci-dessus prennent les valeurs:

$$\begin{aligned} \beta &= 0,37398489.10^{-3}; \gamma = 0,61742459.10^{-3}; \lambda = 10\,412,8 \text{ km} \\ v &= 260\,320 \text{ km par seconde}; Z_0 = 572,6 \Omega; \delta = -26^\circ 39' 20'' \end{aligned}$$

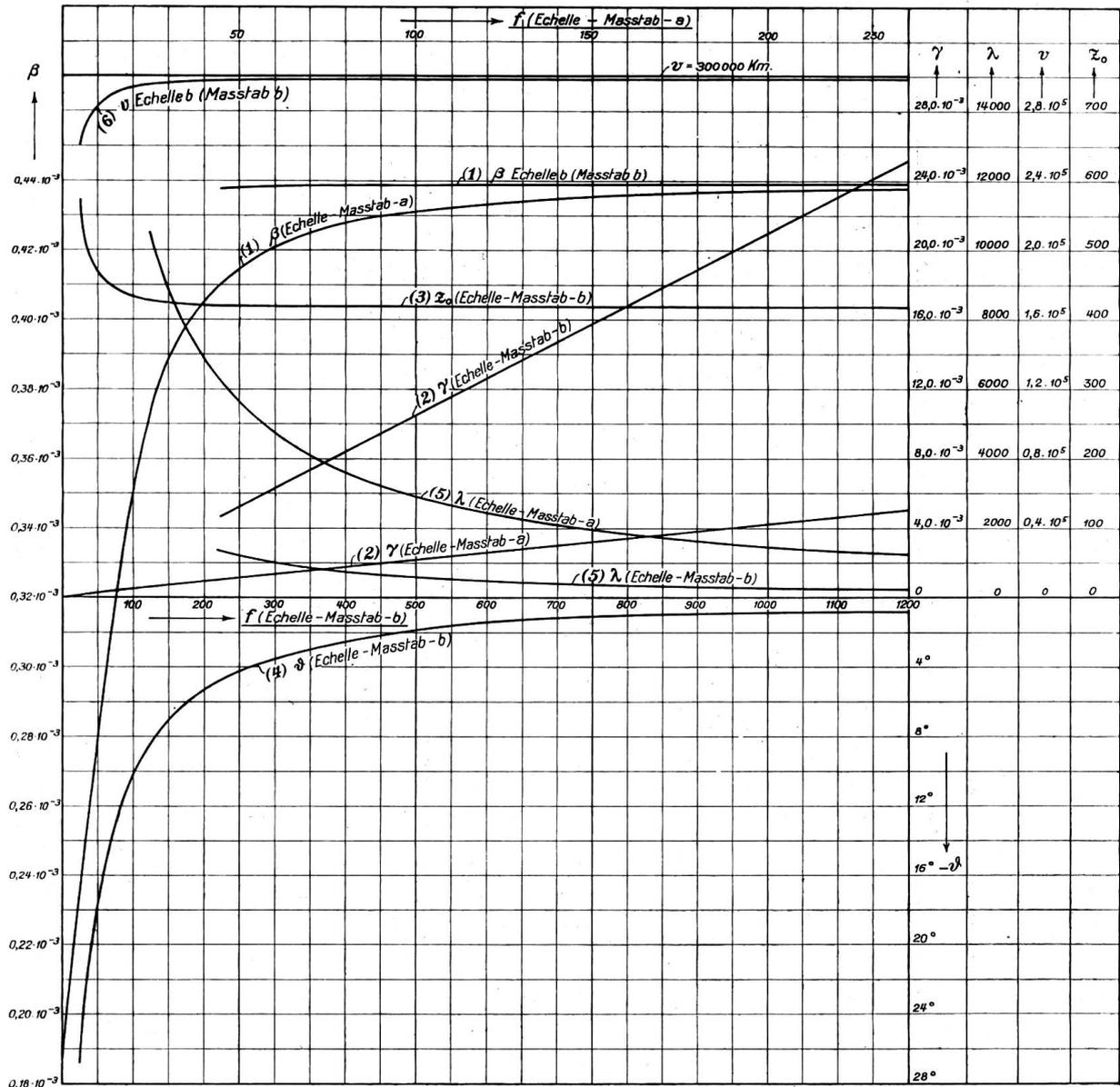


Fig. 21.

Courbes caractéristiques d'une ligne aérienne dont les constantes sont:

$r = 0,35 \Omega$  par km.

$g = 1.10^{-7}$  mhos par km.

$l = 0,0014$  henry par km.

$c = 0,008$  m. f. par km.

Courbe (1)  $\beta$  en fonction de la fréquence  $f$

(2)  $\gamma$  " " " " "  $f$

(3)  $Z_0$  " " " " "  $f$

(4)  $\delta$  " " " " "  $f$

(5)  $\lambda$  " " " " "  $f$

(6)  $\nu$  " " " " "  $f$

Tableau No. I.

Régimes à l'arrivée pour 200 et 400 km 25 et 60 périodes par seconde.				
Tension entre conducteurs $V'$	140 000.—	140 000.—	140 000.—	140 000.—
" simple $V_s'$	80 800.—	80 800.—	80 800.—	80 800.—
Puissance apparente kVA $P_a'$	0.—	31 300.—	25 000.—	31 300.—
" réelle kW $P'$	0.—	25 000.—	25 000.—	25 000.—
Facteur de puissance $\cos \phi'$	—	0.80	1,00	0,80
Angle de déphasage $\phi - \phi'$	—	+36° 50'	0	-36° 50'
Sens du " $\phi - \phi'$	—	retard	—	avance
Intensité du courant $I'$	0.—	129.—	103,3	129.—

Tableau No. II

Régimes au départ.

60 périodes par seconde. I<sup>ère</sup> méthode  $c = g = 0$ 

		Distance: 200 km.				Distance: 400 km.			
		Tension entre conducteurs	$V_0$	140 000.—	166 700.—	153 600.—	144 300.—	140 000.—	194 100.—
" simple	$V_{so}$	80 800.—	96 200.—	88 700.—	83 300.—	80 800.—	112 100.—	97 750.—	85 400.—
Intensité du courant	$I_0$	0.—	129.—	103,3	129.—	0.—	129.—	103,3	129.—
Puissance apparente	kVA $P_{0a}$	0.—	37 200.—	27 800.—	32 250.—	0.—	43 350.—	30 300.—	33 050.—
" réelle	kW $P_0$	0.—	28 500.—	27 500.—	28 500.—	0.—	32 000.—	29 500.—	32 000.—
Facteur de puissance	cos $\varphi_0$	—	0,765	0,992	0,902	—	0,738	0,975	0,970.—
Angle de déphasage	$\varphi_0$	—	+40° 7'	+7° 3'	-25° 33'	—	+42° 27'	+12° 53'	-22° 20'
Sens du "	$\varphi_0$	—	retard	retard	avance	—	retard	retard	avance
Variation de tension en	$\%_0$	0.—	+19,05	+9,80	+3,10	0.—	+38,7	+21,0	+5,7
Rendement de ligne en	$\%_0$	0.—	87,8	91,0	87,8	0.—	78,2	84,8	78,2

60 périodes par seconde. II<sup>ème</sup> méthode soit Capacité et conductances tous les 100 km.

		Distance: 200 km.				Distance: 400 km.			
		Tension entre conducteurs	$V_0$	133 700.—	160 400.—	147 800.—	135 700.—	119 100.—	172 400.—
" simple	$V_{so}$	77 200.—	92 550.—	85 250.—	78 400.—	68 820.—	99 600.—	87 000.—	76 800.—
Intensité du courant	$I_0$	48,4	107,3	114,2	162.—	93,7	103,5	137,6	192,8
Puissance apparente	kVA $P_{0a}$	11 200.—	29 800.—	29 270.—	38 150.—	19 330.—	30 850.—	35 950.—	44 300.—
" réelle	kW $P_0$	705.—	28 100.—	27 960.—	30 500.—	2515.—	30 750.—	32 030.—	38 000.—
Facteur de puissance	cos $\varphi_0$	0,063	0,9424	0,9584	0,7986	0,1299	0,9962	0,8907	0,855
Angle de déphasage	$\varphi_0$	-86° 24'	+19° 32'	-16° 34'	-37°	-82° 32'	-5°	-27° 1'	-31° 8'
Sens du "	$\varphi_0$	avance	retard	avance	avance	avance	avance	avance	avance
Variation de tension en	$\%_0$	-4,5	+14,5	+5,5	-3,0	-14,8	+23,2	+7,7	-4,8
Rendement de ligne en	$\%_0$	0.—	89,0	89,4	82,0	0—	81,3	78,2	65,8

Suite Tableau No. II

60 périodes par seconde. III<sup>me</sup> méthode. Constantes uniformément réparties.

		Distance : 200 km.				Distance : 400 km.			
		Tension entre conducteurs	$V_0$	135 700.—	162 700.—	149 700.—	137 000.—	123 700.—	177 100.—
" simple	$V_{s0}$	78 400.—	93 880.—	86 400.—	79 080.—	71 400.—	102 280.—	90 740.—	78 000.—
Intensité du courant	$I_0$	47,8	105,9	112,8	160,6	94,5	104.—	134,1	190,7
Puissance apparente	kVA $P_{0a}$	11250.—	29 850.—	29 250.—	38 080.—	20 250.—	31 970.—	36 500.—	44 650.—
" réelle	kW $P_0$	556.—	28 400.—	27 800.—	29 500.—	1 707.—	31 620.—	32 850.—	36 870.—
Facteur de puissance	cos $\varphi_0$	0,04943	0,951	0,950	0,775	0,08426	0,989	0,900	0,8257
Angle de déphasage	$\varphi_0$	— 87° 10'	+18°	— 18° 10'	— 39° 10'	— 85° 10'	— 8° 30'	— 25° 50'	— 34° 20'
Sens du "	$\varphi_0$	avance	retard	avance	avance	avance	avance	avance	avance
Variation de tension en	$\frac{\%}{0}$	— 2,97	+16,20	+6,92	— 2,13	— 11,60	+26,6	+12,3	— 3,46
Rendement de ligne en	$\frac{\%}{0}$	0.—	88,1	89,9	84,8	0.—	79,1	76,2	67,8

25 périodes par seconde. III<sup>me</sup> méthode. Constantes uniformément réparties.

		Distance : 200 km.				Distance : 400 km.			
		Tension entre conducteurs	$V_0$	139 200.—	157 400.—	152 300.—	146 900.—	137 500.—	173 900.—
" simple	$V_{s0}$	80 340.—	90 900.—	87 860.—	84 760.—	79 340.—	100 320.—	94 280.—	89 200.—
Intensité du courant	$I_0$	20,15	119,1	107.—	143.—	40,3	112.—	113,3	156,75
Puissance apparente	kAV $P_{0a}$	4850.—	32 480.—	28 200.—	36 400.—	9 600.—	33 700.—	32 070.—	41 900.—
" réelle	kW $P_0$	444.—	28 780.—	26 750.—	29 120.—	960.—	32 070.—	30 930.—	34 080.—
Facteur de puissance	cos $\varphi_0$	0,0915	0,885	0,9478	0,80	0,100	0,951	0,965	0,814
Angle de déphasage	$\varphi_0$	— 84° 45'	+27° 40'	— 18° 35'	— 36° 55'	— 84° 15'	+18°	— 15° 10'	— 35° 30'
Sens du "	$\varphi_0$	avance	retard	avance	avance	avance	retard	avance	avance
Variation de tension en	$\frac{\%}{0}$	— 0,70	+12,5	+8,75	+4,90	— 1,93	+24,2	+16,7	+10,4
Rendement de ligne en	$\frac{\%}{0}$	0.—	86,9	93,5	85,9	0.—	78,0	80,8	73,4

Les tableaux qui précèdent, dont tous les chiffres ont été déterminés par voie graphique, mettent nettement en évidence l'effet des constantes uniformément réparties. Ils se prêteraient à de nombreuses remarques intéressantes, mais nous devons nous borner et nous ne releverons que le fait suivant.

Lors de la mise en service de l'installation, des tensions atteignant 190 000 volts auraient été observées à Flint (200 km; ligne ouverte) tandis que les instruments de mesure indiquaient 140 000 volts à l'usine génératrice. Il en résulterait un *facteur de surtension permanente* à circuit ouvert de 1,35 environ contre 1,03 qu'indique le tableau N° II, qui, nous le rappelons, se rapporte à une tension *alternative sinusoïdale*. Cette grande différence ne peut être expliquée que par la présence d'harmoniques de rang 5 ou 7 dans la courbe de tension des alternateurs. La présence d'un harmonique de denture de rang 6 n'est d'ailleurs pas exclue. Ainsi que nous l'avons vu plus haut, le facteur de surtension de ce dernier est 11,4 et il est facile de voir que le facteur de surtension observé (1,35) est atteint pour un harmonique 6 ayant une amplitude d'environ 7,5 % de celle de l'onde fondamentale.

Ces surtensions à l'arrivée peuvent donc être importantes ainsi que le montre l'exemple ci-dessus. Elles sont annihilées très rapidement par une charge inductive, même faible, mais il n'en reste pas moins qu'en cas de décharge brusque, la tension à l'extrémité ouverte peut s'élever beaucoup, voire même dangereusement, par effet de ligne et par l'effet de la surexcitation produite sur les générateurs par le courant à vide de la ligne, sans compter les effets des réflexions d'ondes pendant le changement de régime.

(La fin au prochain numéro.)



#### Mitteilung der Redaktion.

Das für die vorliegende Nummer angekündigte

**Referat von Herrn Prof. Dr. Kuhlmann über Ueberspannungen**

(gehalten in der Kommission des S. E. V. und V. S. E. für Ueberspannungsschutz),

kann erst in der nächsten Nummer erscheinen.

