

Zeitschrift: Bulletin de l'Association suisse des électriciens
Herausgeber: Association suisse des électriciens
Band: 11 (1920)
Heft: 1

Artikel: Eine neue Methode zur Herleitung der Transformatoren-
Kreisdiagramme (Heyland- und Osanna-Kreise)
Autor: Goldstein, J.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-1056282>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 18.01.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

SCHWEIZ. ELEKTROTECHNISCHER VEREIN

BULLETIN

ASSOCIATION SUISSE DES ÉLECTRICIENS

Erscheint monatlich mit den Jahres-Beilagen „Statistik der Starkstromanlagen der Schweiz“ sowie „Jahresheft“ und wird unter Mitwirkung einer vom Vorstand des S. E. V. ernannten Redaktionskommission herausgegeben.

Alle den Inhalt des „Bulletin“ betreffenden Zuschriften sind zu richten an das

Generalsekretariat

des Schweiz. Elektrotechnischen Vereins,
Neumühlequai 12, Zürich 1 - Telefon: Hottingen 37.08

Alle Zuschriften betreffend Abonnement, Expedition und Inserate sind zu richten an den Verlag:

Fachschriften-Verlag & Buchdruckerei A.-G.,
Hirschengraben 80/82 Zürich 1 Telefon Hottingen 36.40

Publié sous la direction d'une Commission de Rédaction nommée par le Comité de l'A. S. E.

Ce bulletin paraît mensuellement et comporte comme annexes annuelles la „Statistique des installations électriques à fort courant de la Suisse“, ainsi que l'„Annuaire“.

Prière d'adresser toutes les communications concernant la matière du „Bulletin“ au

Secrétariat général

de l'Association Suisse des Electriciens
Neumühlequai 12, Zurich 1 - Telefon: Hottingen 37.08

Toutes les correspondances concernant les abonnements, l'expédition et les annonces, doivent être adressées à l'éditeur:

Fachschriften-Verlag & Buchdruckerei S. A.
Hirschengraben 80/82 Zurich 1 Téléphone Hottingen 36.40

Abonnementspreis
für Nichtmitglieder inklusive Jahresheft:
Schweiz Fr. 15.—, Ausland Fr. 25.—.
Einzelne Nummern vom Verlage Fr. 1.50 plus Porto.

Prix de l'abonnement annuel (gratuit pour les membres de l'A. S. E.), y compris l'Annuaire Fr. 15.—
pour la Suisse, Fr. 25.— pour l'étranger.
L'éditeur fournit des numéros isolés à Fr. 1.50, port en plus.

XI. Jahrgang
XI^e Année

Bulletin No. 1

Januar
janvier 1920

Eine neue Methode zur Herleitung der Transformator-Kreisdiagramme (Heyland- und Osanna-Kreise).

Von Dr. J. Goldstein, Dipl. Ing., Zürich.

Einleitung.

Das Transformatorproblem ist reichlich abgegrast, und wenn ich in dieser Abhandlung auf das Thema nochmals zurückkomme, so geschieht dies aus dem Grunde, weil ich zur Ueberzeugung gelangte, dass diese so grundlegenden Dinge, mit denen der Elektrotechniker vertraut sein muss (man denke nur an das Heyland'sche Diagramm bei Asynchronmotoren), in den vorhandenen Abhandlungen in einer unbefriedigenden Art hergeleitet werden.

Die folgende Abhandlung stellt einen Auszug aus einer im Jahre 1916 durchgeführten analytischen Lösung des Transformatorproblems dar. Ich habe in diesem Auszug die Herleitung der Diagramme wesentlich vereinfacht. Einige Gesichtspunkte, die von Prof. Dr. K. Kuhlmann vertreten werden, kamen dabei zur Geltung. Es liegt mir im folgenden besonders daran, die Streuung nicht durch besondere Ansätze der Herleitung der Diagramme vorauszuschicken, wie dies meistens getan wird, sondern umgekehrt zu zeigen, dass das Transformatorproblem naturgemäss auf das Streuungsproblem führt. Ich mache den Versuch, die Kreisdiagramme des allgemeinen Transformators aus den Differentialgleichungen für magnetisch gekoppelte Systeme zu gewinnen. Die Lösungen der Differentialgleichungen sind bereits von der Physik her bekannt.¹⁾ Es muss aber gesagt werden, dass die Physik, die für die Elektrotechnik wichtigen Gesichtspunkte nie klar hervorgehoben hat. So wurde die Verschiedenheit der Belastung im sekundären Stromkreis und das daraus resultierende Verhalten des Transformators keiner eingehenden Untersuchung unterzogen. Die magnetische Streuung, die mit dem Problem doch ganz verwachsen ist, wurde von der Physik kaum erwähnt. Für die Physik war die Aufgabe mit der Auflösung der Differentialgleichungen erledigt. Anders verhält sich die Sache für den Techniker, der neben der physikalischen

¹⁾ Drude-König, Physik des Aethers, S. 395, und Christiansen-Müller, Theoretische Physik S. 393.

Aufklärung sich mit dem Wirkungsgrade, der Phasenverschiebung und den Streuverhältnissen befassen muss. So kam es auch, dass die Elektrotechniker, ohne auf die Resultate aus der Physik zurückzugreifen, die Aufgabe gewissermassen neu und auf eine eigenartige Weise gelöst haben. Die Resultate, zu denen Heyland¹⁾ durch Aufstellung der Spannungsdiagramme und Osanna²⁾, ausgehend vom Amperwindungsdiagramm, gelangten, sind für die Theorie der Transformatoren und Induktionsmotoren grundlegend geworden. Die Methoden, derer sie sich bedienen, sind keineswegs einfach und für den in die spezifische Art solcher Betrachtungen nicht Eingeweihten schwer verständlich. Nachdem man jetzt in der Zurückführung auf physikalische Grundgesetze in der Elektrotechnik immer grösseren Wert beizmisst, war es für mich ein Bedürfnis, die Kreisdiagramme des allgemeinen Transformators ihrer Quelle — dem Faraday-Maxwellschen Induktionsgesetz — etwas näher zu bringen. Es hat sich ergeben, dass man von vorneherein die Streuinduktivität gar nicht einzuführen braucht, sondern lediglich mit den Induktionskoeffizienten rechnen kann. Der von Heyland eingeführte Streukoeffizient ergibt sich aus der Rechnung, ein Umstand, der die Bedeutung der Streuung ins richtige Licht bringt.

Integration der Differentialgleichungen des Problems.

Bekanntlich lauten die Differentialgleichungen für ein magnetisch gekoppeltes System wie folgt:

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= i_1 R_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ 0 &= e_2 + i_2 R_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Dabei bedeuten: e_1 , e_2 die primäre bzw. sekundäre Klemmenspannung und i_1 , i_2 den primären bzw. sekundären Strom.

Alle elektrischen Grössen des Transformators sind durch die fünf Konstanten: primären und sekundären Widerstand R_1 und R_2 , primäre und sekundäre Selbstinduktivität L_1 und L_2 und die gegenseitige Induktivität M bestimmt, wenn die Belastung jeweilen gegeben ist.

Bezeichnen wir mit R_a , L_a und C_a die Konstanten der Belastung, so gilt folgende Beziehung:

$$e_2 = i_2 R_a + L_a \frac{di_2}{dt} - \frac{1}{\omega^2 C_a} \frac{di_2}{dt}$$

Setzen wir diesen Wert für e_2 in das obige Gleichungssystem ein, so erhalten wir das Gleichungssystem des belasteten Transformators

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= i_1 R_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ 0 &= i_2 (R_2 + R_a) + \left(L_2 + L_a - \frac{1}{\omega^2 C_a} \right) \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (1a)$$

Dieses System lässt sich in bekannter Weise auf eine einzige Differentialgleichung zweiter Ordnung zurückführen. Diese lautet:

$$\frac{d^2 i_1}{dt^2} - \frac{R_1 L'_2 + (R_a + R_2) L_1}{M - L_1 L'_2} \frac{di_1}{dt} - \frac{R_1 (R_a + R_2)}{M - L_1 L'_2} i_1 = - \frac{(R_2 + R_a) e_1}{M - L_1 L'_2} - \frac{L_1}{M - L_1 L'_2} \frac{de_1}{dt} \quad (2)$$

¹⁾ E. T. Z. 1894, S. 561.

²⁾ Zeitschrift für Elektrotechnik, Wien 1899, S. 223.

wobei $L'_2 = L_2 + L_a - \frac{1}{\omega^2 C_a}$ ist.

Für die aufgedrückte Klemmenspannung setzen wir eine Sinusfunktion voraus; man kann aber die Rechnung für jede Kurvenform durchführen, indem man von der Fourier'schen Reihenentwicklung Gebrauch macht. Wir setzen also zunächst voraus:

$$e_1 = E_1 \sin(\omega t) \text{ und folglich } \frac{de_1}{dt} = \omega E_1 \cdot \cos(\omega t)$$

Es lässt sich leicht ein partikuläres Integral der inhomogenen Differentialgleichung (2) finden. Nun kann man aber zeigen, dass durch das partikuläre Integral der stationäre Zustand des Transformators vollständig charakterisiert ist. Das allgemeine Integral der Differentialgleichung (2) besitzt nur noch additive Glieder, die mit der Zeit t abklingen und infolgedessen nur für Ausgleichsvorgänge in Betracht kommen können.

Wir gewinnen das partikuläre Integral der Gleichung (2) durch den Ansatz:

$$i_1 = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t) .$$

Bildet man nach diesem Ansatz $\frac{d^2 i_1}{dt^2}$ und $\frac{di_1}{dt}$ und setzt die gewonnenen Werte in die Differentialgleichung (2) ein, so erhält man durch Vergleichung der Koeffizienten von $\sin(\omega t)$ und $\cos(\omega t)$ folgende zwei Gleichungen für A und B :

$$\begin{aligned} A \{ \omega^2 (M - L_1 L'_2) + R_1 (R_a + R_2) \} - B \omega \{ R_1 L'_2 + (R_a + R_2) L_1 \} &= (R_a + R_2) E_1 \\ A \omega \{ R_1 L'_2 + (R_a + R_2) L_1 \} + B \{ \omega^2 (M - L_1 L'_2) + R_1 (R_a + R_2) \} &= L'_2 \omega E_1 \end{aligned}$$

Es wird: $A = \frac{\Delta A}{D}$ und $B = \frac{\Delta B}{D}$ wo

$$\begin{aligned} D &= \{ \omega^2 (M^2 - L_1 L'_2) + R_1 (R_a + R_2) \}^2 + \omega^2 \{ (R_a + R_2) L_1 + R_1 L'_2 \}^2 \\ \Delta A &= E_1 \{ R_1 [(R_a + R_2)^2 + L'_2{}^2 \omega^2] + (R_a + R_2)^2 \omega^2 M^2 \} \\ \Delta B &= - E_1 \omega \{ L_1 [(R_a + R_2)^2 + L'_2{}^2 \omega^2] - L'_2 \omega^2 M^2 \} . \end{aligned}$$

Es erweist sich als zweckmässig, folgende Abkürzungen einzuführen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{M^2 \omega^2}{(R_a + R_2)^2 + L'_2{}^2 \omega^2} &= \kappa^2 & R_1 + (R_a + R_2) \kappa^2 &= R \\ L_1 - L'_2 \kappa^2 &= L & R_a + R_2 &= R' \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Mittels dieser Abkürzungen lassen sich ΔA und ΔB wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} \Delta A &= E_1 (R'^2 + L'_2 \omega^2) (R_1 + R' \kappa^2) = E_1 R (R'^2 + \omega^2 L'_2{}^2) \\ \Delta B &= - E_1 \omega (R'^2 + L'_2 \omega^2) (L_1 - L'_2 \kappa^2) = - E_1 \omega L (R'^2 + \omega^2 L'_2{}^2) \end{aligned}$$

Es gelingt auch die Grössen R und L in den Ausdruck für D einzuführen.

Nach einer kleinen Umformung erhalten wir:

$$D = (R'^2 + \omega^2 L'_2{}^2) \{ (R_1 + R' \kappa^2)^2 + \omega^2 (L_1 - L'_2 \kappa^2)^2 \} = (R'^2 + \omega^2 L'_2{}^2) (R^2 + \omega^2 L^2) .$$

Es lassen sich jetzt A und B auf die folgende einfache Form bringen:

$$A = \frac{E_1 R}{R^2 + \omega^2 L^2} , \quad B = - \frac{E_1 \omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} .$$

Das partikuläre Integral der Differentialgleichung (2) lässt sich nun folgendermassen schreiben:

$$i_1 = \frac{E_1}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \left(\frac{R \sin(\omega t)}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} - \frac{\omega L \cos(\omega t)}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \right)$$

Setzen wir nun:

$$\frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} = \cos \varphi_1$$

so wird:

$$\frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} = \sin \varphi_1$$

und

$$i_1 = \frac{E_1}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t - \varphi_1), \text{ wo } \operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\omega L}{R} \quad (4)$$

Hierdurch ist der belastete Transformator auf eine Drosselspule mit dem Ohmschen Widerstand

$$R = R_1 + (R_a + R_2) \kappa^2$$

und mit einer Induktivität

$$L = L_1 - \left(L_2 + L_a - \frac{1}{\omega^2 C_a} \right) \kappa^2$$

zurückgeführt, wobei

$$\kappa^2 = \frac{M^2 \omega^2}{(R_a + R_2)^2 + \left(L_2 + L_a - \frac{1}{\omega^2 C_a} \right)^2 \omega^2} \text{ ist.}$$

Wir sind jetzt in der Lage, die zweite Differentialgleichung des Systems (1a) zu integrieren.

Setzen wir aus der Gleichung (4) den Wert für $\frac{di_1}{dt}$ ein, so ergibt sich folgende Differentialgleichung für den sekundären Strom:

$$\frac{di_2}{dt} + \frac{R'}{L'_2} i_2 + \frac{M}{L'_2} \frac{E_1 \omega}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos(\omega t - \varphi_1) = 0. \quad (5)$$

Das partikuläre Integral dieser Differentialgleichung erhält man wie früher durch den Ansatz:

$$i_2 = A_1 \sin(\omega t) + B_1 \cos(\omega t)$$

Für A_1 und B_1 ergeben sich folgende Werte:

$$A_1 = - \frac{\omega^2 M L'_2 \cos \varphi_1 + \omega M R' \sin \varphi_1}{\omega^2 L'^2_2 + R'^2} \cdot \frac{E_1}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

$$B_1 = \frac{\omega^2 M L'_2 \sin \varphi_1 - \omega M R' \cos \varphi_1}{\omega^2 L'^2_2 + R'^2} \cdot \frac{E_1}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

Setzen wir jetzt:

$$\frac{-\omega L'_2}{\sqrt{R'^2 + \omega L'^2_2}} = \cos \psi, \quad \left. \vphantom{\frac{-\omega L'_2}{\sqrt{R'^2 + \omega L'^2_2}}} \right\} \quad (6)$$

so wird:

$$\frac{R'}{\sqrt{R'^2 + \omega^2 L'^2_2}} = \sin \psi \text{ und } \operatorname{tg} \psi = - \frac{R'}{\omega L'_2}$$

Bei Beachtung der Substitution $\kappa = \frac{\omega M}{\sqrt{R'^2 + \omega^2 L'^2_2}}$ erhalten wir für i_2 folgenden Wert:

$$i_2 = \frac{\kappa E_1}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t - \varphi_1 - \psi). \quad (7)$$

Es erübrigt noch, die Bedeutung der einzelnen Grössen hervorzuheben. Der Winkel ψ ist die Phasenverschiebung des sekundären Stromes gegen den primären. κ ist das Verhältnis beider Ströme. Aus (4) und (6) ergibt sich nämlich

$$\kappa = \frac{J_2}{J_1} \tag{7a}$$

Alle elektrischen Grössen des Transformators sind nun durch die Konstanten R_1, R_2, L_1, L_2, M und durch die Belastung R_a, L_a und C_a bestimmt, und wir wären hiernach in der Lage das Diagramm der Transformatorvektoren für einen bestimmten Wert E_1 zu konstruieren.

Bevor wir aber zu den Kreisdiagrammen übergehen, muss noch nachgewiesen werden, dass die gewonnenen partikulären Integrale wirklich den stationären Zustand charakterisieren. Das allgemeine Integral der Gleichung (2) erhält man bekanntlich aus dem partikulären Integral, wie folgt:

$$i_1 + C_1 e^{\mu_1 t} + C_2 e^{\mu_2 t},$$

wo μ_1 und μ_2 als Wurzeln der „charakteristischen Gleichung“ der Differentialgleichung (2) folgende Werte haben:

$$\mu_{1,2} = -\frac{1}{2} \frac{R_1 L'_2 + R' L_1}{L_1 L'_2 - M^2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{R_1 L'_2 + R' L_1}{L_1 L'_2 - M^2} \right)^2 - \frac{R_1 R'}{L_1 L'_2 - M^2}}$$

Der Zähler des Radikanden kann auf die Form $(R_1 L'_2 - R' L_1)^2 + 4 R_1 R' M^2$ gebracht werden; dieser Ausdruck ist immer positiv.

Ist $L'_2 \geq L_2$, was einer ohmschen, induktiven und einer kapazitiven Belastung mit der Nebenbedingung $\frac{1}{\omega^2 C_a} \leq L_a$ entspricht, so ist $\frac{M^2}{L_1 L'_2} < 1$, da schon $\frac{M^2}{L_1 L_2}$ wegen der magnetischen Kopplung < 1 ist.

In diesem Falle ist der Radikand positiv und μ_1, μ_2 negativ. Der Ausdruck $C_1 e^{\mu_1 t} + C_2 e^{\mu_2 t}$ stellt eine aperiodisch mit der Zeit abklingende Funktion dar und kommt für den stationären Zustand nicht in Frage.

Ist $L'_2 < L_2$, was einer mehr kapazitiven Belastung entspricht, so kann $\frac{M^2}{L_1 L'_2} > 1$ werden. Die Werte μ_1 und μ_2 sind konjugiert komplex. Der Ausgleichstrom $C_1 e^{\mu_1 t} + C_2 e^{\mu_2 t}$ ist, wie man leicht sehen kann, eine oszillatorisch abklingende Funktion. Eine analoge Betrachtung der Gleichung (5) ergibt, dass das additive Glied für den Sekundärstrom jedenfalls eine mit der Zeit abklingende Funktion ist.

Wir wenden uns nun der Aufgabe zu, aus den gewonnenen Gleichungen für den stationären Zustand die Kreisdiagramme abzuleiten.

Das Heylandsche Kreisdiagramm.

Die Gleichungen (4) und (7) führen auf die Heylandschen Stromkreise, wenn man die Gleichungen für die Maximalwerte betrachtet.

Das im vorigen Abschnitt gewonnene Gleichungssystem [Gleichungen (3) und (4)], welches wir der Uebersicht wegen noch einmal hier zusammenstellen, lautete:

$$\begin{aligned} L &= L_1 - \kappa^2 L'_2 & J_1 &= \frac{E_1}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \\ R &= R_1 + \kappa^2 (R_a + R_2) & \text{tg } \varphi_1 &= \frac{\omega L}{R} \\ L'_2 &= L_2 + L_a - \frac{1}{\omega^2 C_a} & \kappa^2 &= \frac{M^2 \omega^2}{(R_a + R_2)^2 + \omega^2 L'_2{}^2} \end{aligned}$$

Dieses System von Gleichungen umschreibt den Betriebszustand des Transformators vollständig. Von den Eisenverlusten wird, wie in allen theoretischen Ableitungen, zunächst ja abgesehen; sie werden hinterher als Korrekturen in die Diagramme eingeführt. Es muss möglich sein, aus dem obigen Gleichungssystem eine Gleichung für J_1 zu gewinnen, wo J_1 allein als Funktion von φ_1 auftritt. Der Ohmsche Widerstand R_a wird im Betriebszustand als veränderlich angenommen, alle anderen Grössen sind konstant. Zur speziellen Voraussetzung für das Heyland-Diagramm gehört noch die Annahme $R_1 = 0$.

In der Tat gelingt die Umformung der Gleichung

$$J_1 = \frac{E_1}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

durch folgende einfache Rechnung. Es ist ersichtlich, dass:

$$J_1 = \frac{E_1}{\sqrt{\text{tg}^2 \varphi_1 + 1}} \cdot \frac{1}{R} \quad (8)$$

ist, wo R noch als Funktion von φ_1 auszudrücken wäre. Diesem Zwecke dienen die Gleichungen (3)

$$R = R_1 + \kappa^2 (R_a + R_2) \quad \text{und} \quad L = L_1 - \kappa^2 L'_2.$$

Der Wert für κ^2 liefert die Gleichung:

$$\frac{L_1 - L}{L'_2} = \frac{R - R_1}{R_2 + R_a}.$$

Hieraus folgt:

$$L = L_1 + L'_2 \frac{R_1}{R_a + R_2} - R \frac{L'_2}{R_a + R_2}$$

Diesen Wert für L setzen wir in die Gleichung

$$\text{tg} \varphi_1 = \frac{\omega L}{R}$$

ein und erhalten:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\omega} \left(\text{tg} \varphi_1 + \frac{\omega L'_2}{R_a + R_2} \right) \frac{R_a + R_2}{L'_2 R_1 + L_1 (R_a + R_2)} \quad (9)$$

Die Gleichung (8) ergibt, wenn für $\frac{1}{R}$ der Ausdruck (9) eingesetzt wird, folgende Relation:

$$J_1 = \frac{E_1}{\omega} \cos \varphi_1 \left(\text{tg} \varphi_1 + \frac{\omega L'_2}{R_a + R_2} \right) \cdot \frac{R_a + R_2}{(R_a + R_2) L_1 + R_1 L'_2} \quad (10)$$

Hier ist J_1 noch eine Funktion von φ_1 und R_2 , die anderen noch auftretenden Grössen E_1 , ω , R_2 und L'_2 werden ja als Konstante den Diagrammen zugrunde gelegt. In L'_2 sind die sekundäre Induktivität, die Kapazität und Induktivität der Belastung L_a und C_a enthalten gemäss der Gleichung $L'_2 = L_2 + L_a - \frac{1}{\omega^2 C_a}$. Wie wir sehen werden, erhalten wir das

Kreisdiagramm auch wenn im Belastungskreise Induktivität und Kapazität vorhanden sind; es muss nur für jeden Belastungszustand L'_2 konstant sein, während der ohmsche Widerstand R_2 variabel ist. Es gelingt in Gleichung (10) $(R_a + R_2)$ durch φ_1 mittelst der Gleichung $\text{tg} \varphi_1 = \frac{\omega L}{R}$ auszudrücken.

Setzen wir hier für L und R die Werte aus Gleichung (3) ein, so ergibt sich folgende Relation:

$$(\omega L_1 - \text{tg} \varphi_1 R_1) (R_a + R_2)^2 - \text{tg} \varphi_1 \omega^2 M^2 (R_a + R_2) - \omega^3 L'_2 (M^2 - L_1 L'_2) - \text{tg} \varphi_1 R_1 \omega^2 L'_2{}^2 = 0. \quad (11)$$

In dieser Gleichung lässt sich $(R_a + R_2)$ durch φ_1 ausdrücken. Setzen wir den so substituierten Wert für $(R_a + R_2)$ in die Gleichung (10) ein und machen wir noch die Voraussetzung dass $R_1 = 0$ sei, so ergibt sich folgende Gleichung für den *Heylandschen Kreis*:

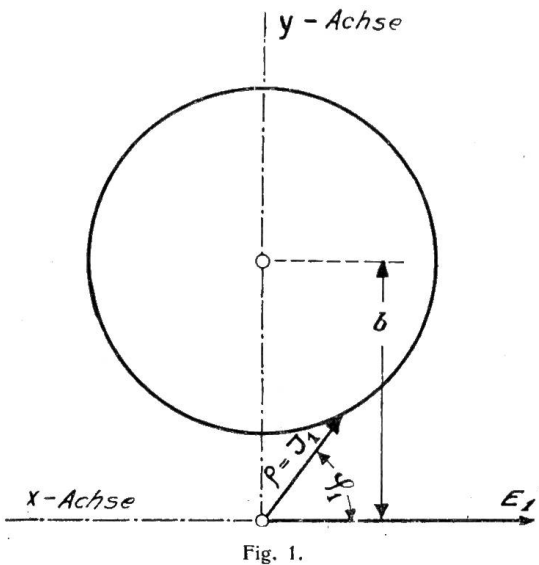
$$J_1 = \frac{E_1}{\omega L_1} \sin \varphi_1 + \frac{E_1 \cos \varphi_1 \frac{L'_2}{L_1}}{\operatorname{tg} \varphi_1 \frac{\omega M^2}{2 L_1} \pm \sqrt{\operatorname{tg}^2 \varphi_1 \left(\frac{\omega M^2}{2 L_1}\right)^2 - \frac{L'_2}{L_1} \omega^2 (L_1 L'_2 - M^2)}}$$

Wir wollen diese für die weiteren Betrachtungen sehr wichtige Gleichung auf eine bequeme Form bringen. Dazu bezeichnen wir den oft wiederkehrenden und für die magnetische Streuung des Transformators sehr wichtigen Ausdruck $L_1 L'_2 - M^2$ mit λ^2 . Die obige Gleichung vereinfacht sich dann zu:

$$J_1 = \frac{E_1}{\omega L_1} \sin \varphi_1 + \frac{E_1 \cos \varphi_1 \left(\operatorname{tg} \varphi_1 \frac{\omega M^2}{2 L_1} \mp \sqrt{\operatorname{tg}^2 \varphi_1 \left(\frac{\omega M^2}{2 L_1}\right)^2 - \frac{L'_2}{L_1} \omega^2 \lambda^2} \right)}{\omega^2 \lambda^2}$$

und eine weitere Umrechnung ergibt:

$$J_1 = \left(\frac{E_1}{\omega L_1} + \frac{E_1 M^2}{2 \omega L_1 \lambda^2} \right) \sin \varphi_1 \pm \sqrt{\frac{E_1^2 \left(L'_2 - \frac{M^2}{2 L_1} \right)^2 \sin^2 \varphi_1 - E_1^2 \frac{L'_2}{L_1} \lambda^2}{\omega^2 \lambda^4}} \quad (12)$$



Es lässt sich leicht zeigen, dass diese Gleichung einen Kreis in Polarkoordinaten darstellt, und zwar hat derselbe die in nebenstehender Figur angegebene Lage.

Die Gleichung eines Kreises in dieser Lage in kartesischen Koordinaten lautet nämlich:

$$x^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Führen wir Polarkoordinaten ein, so ist: $x = \rho \cos \varphi_1$ und $y = \rho \sin \varphi_1$ und wir erhalten für die Gleichung des Kreises:

$$\rho = b \sin \varphi_1 \pm \sqrt{b^2 \sin^2 \varphi_1 - (b^2 - r^2)}$$

Unsere Gleichung (12) hat dieselbe Form. Der Koeffizient von $\sin^2 \varphi$ unter der Wurzel ist dem Quadrate des Koeffizienten von $\sin \varphi$ gleich. In der Tat besteht folgende Identität:

$$\frac{E_1}{\omega L_1} + \frac{E_1 M^2}{2 \omega L_1 (L_1 L'_2 - M^2)} \equiv \frac{\left(L'_2 - \frac{M^2}{2 L_1} \right) E_1}{\omega (L_1 L'_2 - M^2)}$$

Die Gleichung (12) charakterisiert jeden Betriebszustand des „allgemeinen Transformators“. Die Zweideutigkeit der Funktion J entspricht dem bekannten Verhalten eines Transformators, indem zu einem bestimmten Wert φ_1 zwei Betriebszustände gehören. Das positive Vorzeichen in der Formel (12) gilt für den überlasteten Transformator. Hervorzuheben ist noch, dass die Formel (12) auch auf das Verhalten von Induktionsmotoren Anwendung finden kann, indem die abgegebene mechanische Leistung durch eine äquivalente elektrische

Belastung des ruhenden Transformators ersetzt wird. Es waren auch die asynchronen Drehstrommotoren, die Heyland¹⁾ und später Osanna²⁾ auf die Kreisdiagramme geführt haben.

Der Durchmesser des *Heyland'schen Kreises* lässt sich aus der Gleichung (12) leicht bestimmen. Wir berechnen die Werte J_1 für $\varphi_1 = 90^\circ$ und erhalten, wenn wir den Ausdruck unter der Wurzel entwickeln:

$$J_1 = \frac{E_1}{\omega L_1} + \frac{E_1 M^2}{2 L_1 \omega \lambda^2} \pm \frac{E_1 M^2}{2 L_1 \omega \lambda^2}$$

Das positive Vorzeichen entspricht dem Zustande des *ideellen Leerlaufes*, das negative Vorzeichen demjenigen des *ideellen Kurzschlusses*.

Für den *ideellen Leerlauf* haben wir:

$$J_{10} = \frac{E_1}{\omega L_1} \quad (13)$$

und für den *ideellen Kurzschluss*:

$$J_{1K} = \frac{E_1}{\omega L_1} + \frac{E_1 M^2}{\omega L_1 \lambda^2} \quad (14)$$

Der Durchmesser des Kreises wird hiernach:

$$D = J_{1K} - J_{10} = \frac{E_1}{\omega L_1} \cdot \frac{M^2}{L_1 L'_2 - M^2} \quad (15)$$

Die Gleichung (12) lässt auch den Wert für die *minimale Phasenverschiebung* φ_1 , resp. für $\cos(\varphi_{1 \min})$, der für den praktischen Betrieb von Motoren und Transformatoren von grosser Bedeutung ist, berechnen. Diesen Zustand charakterisiert der Punkt, wo J_1 den Kreis tangiert. Für diesen Punkt muss der Ausdruck unter der Wurzel in Gleichung (12) null werden. Wir erhalten für $\sin(\varphi_{1 \min})$ folgende wichtige Beziehung:

$$\sin^2(\varphi_{1 \min}) \left(\omega L'_2 - \frac{\omega M^2}{2 L_1} \right)^2 - \frac{L'_2}{L_1} \omega^2 (L_1 L'_2 - M^2) = 0$$

Hieraus ergibt sich:

$$\cos(\varphi_{1 \min}) = \frac{M^2}{2 L_1 L'_2 - M^2} \quad (16)$$

Wir haben bis jetzt immer mit Induktivitätskoeffizienten gerechnet. Es zeigt sich aber nun als sehr nützlich, die Streuungskoeffizienten in unsere Formeln einzuführen. Bekanntlich lassen sich die totalen *Streuungskoeffizienten* eines Zweispulensystems σ und τ auf folgende Weise durch Induktionskoeffizienten ausdrücken:

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= 1 - \frac{M^2}{L_1 L_2} = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 L_2} \\ \tau &= \frac{L_1 L_2}{M^2} - 1 = \frac{L_1 L_2 - M^2}{M^2} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

und

wobei zwischen σ und τ folgende Relation besteht:

$$\sigma = \frac{\tau}{1 + \tau} \quad (18)$$

Hätten wir in der Belastung nur Ohmschen Widerstand vorausgesetzt und $L_a = 0$, $C_a = 0$ gesetzt, so wäre unser $L'_2 = L_2$ geworden und die Formeln (15) und (16) liessen sich auf die bekannten, für die Diagramme der Induktionsmotoren sehr wichtigen Relationen zurückführen. Es wird nämlich in diesem Falle der Durchmesser des Heylandschen Kreises:

¹⁾ E. T. Z. 1894, S. 561.

²⁾ Zeitschrift für Elektrotechnik 1899, S. 223.

$$D = \frac{E_1}{\omega L_1} \cdot \frac{1}{\tau} = \frac{J_{10}}{\tau} \tag{19}$$

wo J_{10} den Magnetisierungsstrom im Leerlauf bedeutet. Für $\cos(\varphi_{1\min})$ erhalten wir dann folgenden Ausdruck:

$$\cos(\varphi_{1\min}) = \frac{M^2}{2L_1L_2 - M^2} = \frac{1}{1 + \frac{2L_1L_2 - 2M^2}{M^2}} = \frac{1}{1 + 2\tau} \tag{20}$$

Es erweist sich als sehr zweckmässig auch im allgemeineren Belastungsfall, wo weder L_a noch C_a gleich null sind, den in unseren Formeln auftretenden Ausdruck $\frac{L_1L'_2 - M^2}{M^2}$ als Streuungskoeffizienten zu deuten. Wir schreiben also:

$$\left. \begin{aligned} \tau' &= \frac{L_1L'_2 - M^2}{M^2} \\ \sigma' &= \frac{L_1L'_2 - M^2}{L_1L'_2} \end{aligned} \right\} \tag{17a}$$

wobei wieder

$$\sigma' = \frac{\tau'}{1 + \tau'} \tag{18a} \text{ und } L'_2 = L_2 + L_a - \frac{1}{\omega^2 C_a}.$$

Diese Betrachtung zeigt deutlich, dass die Kapazität im sekundären Stromkreis die Streuung kompensieren kann. Je nachdem $\tau' \gtrless 0$ ist, lassen sich drei Fälle unterscheiden:

1. $L_1L'_2 > M^2$ Streuung
2. $L_1L'_2 = M^2$ kompensierte Streuung.
3. $L_1L'_2 < M^2$ überkompensierte Streuung.

Die allgemeineren Formeln für $\cos(\varphi_{1\min})$ und D lauten:

$$\cos(\varphi_{1\min}) = \frac{1}{1 + 2\tau'} \tag{20a}$$

$$D = \frac{J_{10}}{\tau'} \tag{19a}$$

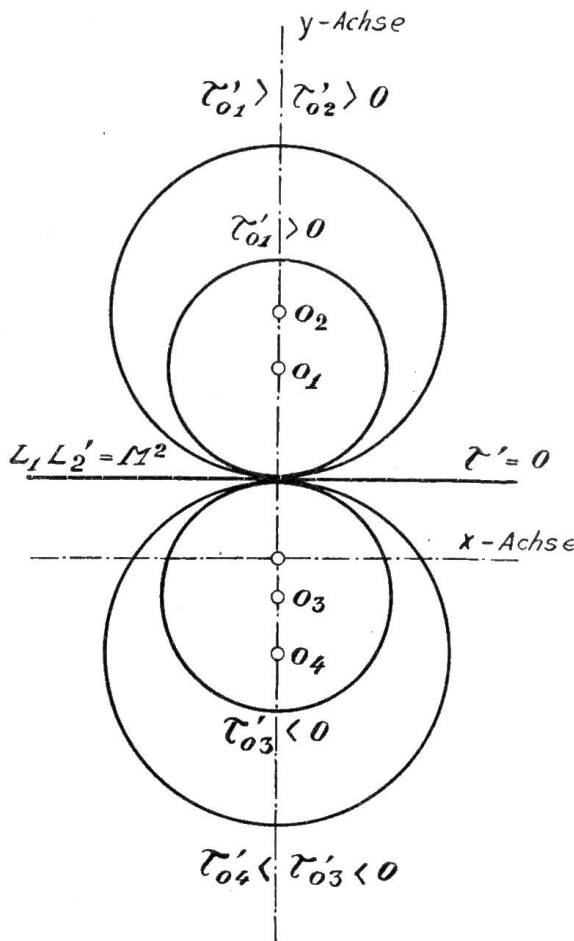


Fig. 2.

Wie aus der letzten Formel hervorgeht, ist der Durchmesser des Heylandschen Kreises für den Transformator mit kompensierter Streuung unendlich, d. h. der Kreis wird zur Geraden. Für den Transformator mit überkompensierter Streuung ist der Durchmesser negativ, der Mittelpunkt des Kreises liegt unterhalb der x -Achse (siehe Fig. 1). Alle Kreise gehen durch den Punkt $J_0 = \frac{E_1}{\omega L_1}$.

Graphisch dargestellt ergibt sich, wie Fig. 2 zeigt, eine Kreisschar, wobei jedem Kreis eine bestimmte Streuung entspricht.¹⁾

¹⁾ Auf Grund der Heylandschen Formel findet man diese Ableitungen in der Abhandlung „Magnetische Streuung“ von Kuhlmann, Bulletin des S. E. V. 1915, S. 114 ff.

Das Kreisdiagramm von Osanna.

Das Diagramm von *Osanna* ist bekanntlich genauer als dasjenige von Heyland. *Osanna*¹⁾ berücksichtigt in seiner Ableitung auch die primären Kupferverluste. Die Gleichungen (10) und (11)

$$J_1 = \frac{E_1}{\omega} \cos \varphi_1 \left(\operatorname{tg} \varphi_1 + \frac{\omega L'_2}{R_a + R_2} \right) \frac{R_a + R_2}{(R_a + R_2) L_1 + R_1 L'_2} \quad (10)$$

$$\text{und } (\omega L_1 - \operatorname{tg} \varphi_1 R_1) (R_a + R_2)^2 - \operatorname{tg} \varphi_1 \omega^2 M^2 (R_a + R_2) + \omega^3 L'_2 \lambda^2 - \operatorname{tg} \varphi_1 R_1 \omega^2 L'_2{}^2 = 0, \quad (11)$$

die wir aus den allgemeinen Differentialgleichungen des Problems gewonnen haben, führten im Spezialfall $R_1 = 0$ zum Heylandschen Diagramm. Machen wir diese Vernachlässigung $R_1 = 0$ nicht, so erhalten wir das Diagramm von *Osanna*.

In der Tat, eliminieren wir von $R_a + R_2$ aus (10) mittels der Gleichung (11)

$$R_a + R_2 = \frac{\operatorname{tg} \varphi_1 \omega^2 M^2 \pm \sqrt{\operatorname{tg}^2 \varphi_1 \omega^4 M^4 - 4 (\omega^3 L'_2 \lambda^2 - \operatorname{tg} \varphi_1 R_1 \omega^2 L'_2{}^2) (\omega L_1 - \operatorname{tg} \varphi_1 R_1)}}{2 (\omega L_1 - \operatorname{tg} \varphi_1 R_1)}$$

so erhalten wir folgende Gleichung:

$$J_1 = \frac{E_1 \cos \varphi_1}{\omega} \frac{\operatorname{tg}^2 \varphi_1 \omega^2 M^2 \pm \operatorname{tg} \varphi_1 \kappa + 2 \omega L'_2 (\omega L_1 - \operatorname{tg} \varphi_1 R_1)}{\operatorname{tg} \varphi_1 \omega^2 L_1 M^2 \pm L_1 \kappa + 2 R_1 L'_2 (\omega L_1 - \operatorname{tg} \varphi_1 R_1)}, \quad (21)$$

$$\text{wo } \kappa = \sqrt{\operatorname{tg}^2 \varphi_1 \omega^4 M^4 - 4 (\omega^3 L'_2 \lambda^2 - \operatorname{tg} \varphi_1 R_1 \omega^2 L'_2{}^2) (\omega L_1 - \operatorname{tg} \varphi_1 R_1)} \quad \text{ist.}$$

Die Gleichung (21) stellt den *Osanna-Kreis* dar. Derselbe hat die in Figur 3 angegebene Lage. Das erkennen wir, wenn wir den Nenner der Gleichung (21) rational machen. Durch eine etwas mühsame Rechnung lässt sich der Ausdruck (21) auf folgende Form bringen:

$$J_1 = \frac{E_1 \cos \varphi_1}{\omega} \frac{\operatorname{tg} \varphi_1 \omega^2 (2 L_1 L'_2 - M^2) + 2 R_1 \omega L'_2 \pm \kappa}{2 (R_1^2 L'_2 + \omega^2 L_1 \lambda^2)}. \quad (21a)$$

Die Gleichung des in Fig. 3 abgebildeten Kreises in Polarkoordinaten lautet:

$$\rho = a \cos \varphi_1 + b \sin \varphi_1 \pm \sqrt{(a \cos \varphi_1 + b \sin \varphi_1)^2 - (a^2 + b^2 - r^2)}$$

Auf diese Form lässt sich auch die Gleichung (21a) durch eine Umformung bringen. Wir erhalten so folgende Gleichung:

$$J_1 = \frac{E_1 R_1 L'_2}{R_1^2 L'_2 + \omega^2 L_1 \lambda^2} \cos \varphi_1 + \frac{E_1 \omega (2 L_1 L'_2 - M^2)}{2 (R_1^2 L'_2 + \omega^2 L_1 \lambda^2)} \sin \varphi_1$$

$$\pm \sqrt{\left(\frac{E_1 R_1 L'_2}{R_1^2 L'_2 + \omega^2 L_1 \lambda^2} \cos \varphi_1 + \frac{E_1 \omega (2 L_1 L'_2 - M^2)}{2 (R_1^2 L'_2 + \omega^2 L_1 \lambda^2)} \sin \varphi_1 \right)^2 - \frac{R_1 L'_2 + \omega^2 L_1 L'_2 \lambda^2}{(R_1^2 L'_2 + \omega^2 L_1 \lambda^2)^2} E_1^2} \quad (21b)$$

Wir erhalten somit für die Koordinaten des Mittelpunktes des *Osanna-Kreises* folgende Werte:

$$a = \frac{E_1 R_1 L'_2}{R_1^2 L'_2 + \omega^2 L_1 \lambda^2}, \quad b = \frac{E_1 \omega (2 L_1 L'_2 - M^2)}{2 (R_1^2 L'_2 + \omega^2 L_1 \lambda^2)} \quad (22)$$

Den *Radius* des *Osanna-Kreises* finden wir leicht aus der Beziehung:

$$a^2 + b^2 - r^2 = \frac{R_1^2 L'_2 + \omega^2 L_1 L'_2 \lambda^2}{(R_1^2 L'_2 + \omega^2 L_1 \lambda^2)^2} E_1^2.$$

¹⁾ Zeitschrift für Elektrotechnik, 1899, S. 223.

Setzen wir die obigen Werte für a und b ein, so ergibt sich der Durchmesser D zu:

$$D = \frac{E_1 \omega M^2}{R_1^2 L'_2 + \omega^2 L_1 \lambda^2} \tag{23}$$

Die Gleichung (21b) liefert für den Spezialfall $R_1 = 0$ die Gleichung des Heyland'schen Kreises. In der Tat ist:

$$\lim_{R_1=0} J_1 = \frac{E_1 (2 L_1 L'_2 - M^2)}{2 \omega L_1 \lambda^2} \sin \varphi_1 \pm \sqrt{\frac{E_1^2 (2 L_1 L'_2 - M^2)^2}{4 \omega^2 L_1^2 \lambda^4} \sin^2 \varphi_1 - \frac{E_1^2 L'_2}{\omega^2 \lambda^2 L_1}},$$

wie wir bereits in Gleichung (12) gefunden haben.

Wir können auch aus den allgemeinen Formeln (22) und (23) für die Koordinaten des Mittelpunktes und den Durchmesser die entsprechenden Formeln für das Heyland'sche Diagramm finden, indem wir den Grenzübergang $R_1 = 0$ machen.

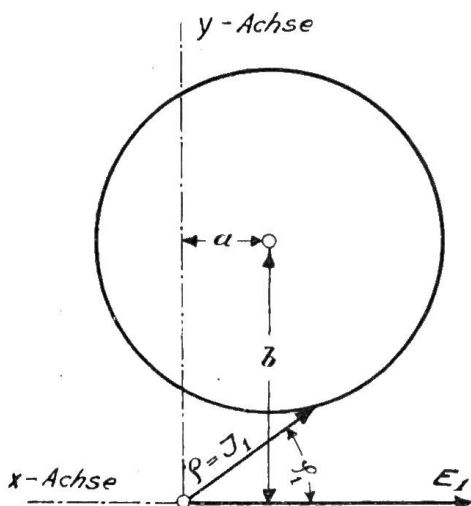


Fig. 3.

Es werden:

$$\lim_{R_1=0} a = 0 \qquad \lim_{R_1=0} b = \frac{E_1 (2 L_1 L'_2 - M^2)}{2 \omega L_1 \lambda^2}$$

$$\lim_{R_1=0} D = \frac{E_1 M^2}{\omega L_1 \lambda^2} = \frac{J_{10}}{\tau'}$$

Formeln, die mit unseren früheren Ergebnissen übereinstimmen. Es erübrigt noch, den Streukoeffizienten in die Formel für den Durchmesser einzuführen. Dies gelingt durch folgende Rechnung:

$$D = \frac{E_1 \omega M^2}{R_1^2 L'_2 + \omega^2 L_1 \lambda^2}, \text{ oder auch:}$$

$$D = \frac{E_1 \omega M^2}{R_1^2 L'_2 + \omega^2 L_1 \lambda^2} = \frac{E_1 M^2}{\omega L_1 L_1 L'_2} \frac{\omega^2 L_1^2 L'_2}{R_1^2 L'_2 + \omega^2 L_1 \lambda^2} = \frac{E_1 M^2}{\omega L_1 L_1 L'_2} \frac{1}{\frac{R_1^2}{\omega^2 L_1^2} + \frac{\lambda^2}{L_1 L'_2}}$$

Beachtet man jetzt, dass nach (17a)

$$\sigma' = \frac{\lambda^2}{L_1 L'_2} \quad \text{und} \quad 1 - \sigma' = \frac{M^2}{L_1 L'_2} \text{ ist,}$$

so schreibt sich der Durchmesser des Osanna-Kreises

$$D_0 = \frac{E_1}{\omega L_1} (1 - \sigma') \frac{1}{\sigma' + \frac{R_1^2}{\omega^2 L_1^2}}, \tag{24}$$

und derjenige des Heyland'schen-Kreises ($R_1 = 0$)

$$D_h = \frac{E_1}{\omega L_1} \frac{1 - \sigma'}{\sigma'}. \tag{25}$$

Das Verhältnis beider Durchmesser ist dann durch folgende Potenzreihe gegeben:

$$\frac{D_0}{D_h} = \frac{1}{1 + \frac{R_1^2}{\omega^2 L_1^2 \sigma'}} = 1 - a + a^2 - a^3 + a^4 - \dots, \quad \text{wo } a = \frac{R_1^2}{\omega^2 L_1^2 \sigma'} \text{ ist.}$$

Die Abweichungen zwischen den Grössen in beiden Diagrammen ist desto grösser, je grösser der primäre Widerstand R_1 und je kleiner die primäre Induktivität und die *Streuung* sind.

Mit dieser Abhandlung glaube ich nochmals dargetan zu haben, dass die Streuung aufs innigste mit dem Transformatoren- resp. Induktionsmotorenproblem verwachsen ist. Wenn man auch von vorneherein nur mit Induktionskoeffizienten rechnet, die Rechnung selbst führt auf die *Streuinduktivität*.

Zur Frage der Erhöhung der Detailtarife.

Von Dr. K. Sachs, Baden.

An der letzten Generalversammlung des V. S. E. in Montreux hat Herr Ing. *N. Cagianut* vom Generalsekretariat in einem ausführlichen Referat¹⁾ auf die durch die allgemeine Teuerung hervorgerufene prekäre Lage der Schweizerischen Elektrizitätswerke hingewiesen und zur Wiederherstellung des finanziellen Gleichgewichtes die Erhöhung sowohl der in der Regel nur kurzfristig vereinbarten Detailtarife als der meist durch langfristige Tarifverträge zwischen den Werken und den Grossabnehmern festgesetzten Grosstarife, die ohne erst ad hoc zu schaffende gesetzliche Massnahmen, vorzeitig nicht gekündigt werden können, empfohlen. Es besteht kein Zweifel, dass, ebenso wie die menschliche Arbeitsleistung heute eine wesentlich höhere Bewertung erfahren hat, auch für die maschinelle Arbeitsleistung ein höherer Preis gefordert werden kann und muss; fraglich ist nur, ob die zu erzielenden Mehreinnahmen der Werke, denn hierum handelt es sich ja nur, nicht durch eine, ich möchte sagen volkswirtschaftlich edlere Massnahme als durch das lapidare Mittel der Erhöhung der Detailtarife erzielt werden können.

Die Gestehungskosten der elektrischen Arbeitseinheit der kWh nehmen bekanntlich mit der Zahl der total erzeugten kWh zuerst rapid ab, um erst mit dem idealen Fall des konstant vollbelasteten Werkes asymptotisch einem Grenzwert zuzustreben. Viel naheliegender wäre es also, noch mehr als dies bisher bei manchen Werken der Fall war, durch Erhöhung des Ausnutzungsfaktors der Werke, d. h. durch Erhöhung der Produktion, den finanziellen Ausgleich zu schaffen oder, mit andern Worten, einem alten kaufmännischen Erfahrungssatz folgend, seinen Nutzen nicht am Stück sondern im Umsatz zu suchen und zu finden. Die Mittel und Wege hierzu sind ja längst bekannt, und es ist nicht einzusehen, warum wir heute eine rückläufige Entwicklung durchmachen sollen.

An der im Juli 1917 in Langenthal abgehaltenen Diskussionsversammlung hat Herr Prof. Dr. *Wyssling* in ausserordentlich übersichtlicher Weise auf die Vorteile der elektrischen Küche hingewiesen und diese vom hauswirtschaftlichen Standpunkt gegenüber der Gasküche dann als rentabel bezeichnet, wenn der Preis pro m³ Gas das 1,5 ÷ 2,7 fache des kWh-Preises beträgt. Infolge des stetig parallel mit den Kohlenpreisen anwachsenden Gaspreises wurde dieses Aequivalenzverhältnis in vielen Schweizer Städten, wenn auch nicht überall gleichzeitig, erreicht und die elektrische Küche fand in vielen Haushaltungen Eingang, teilweise allerdings infolge des hohen Anschaffungspreises der Kochherde und -Platten vorerst noch als Notküche. Die Bemühungen des Generalsekretariates, dem elektrischen Nacht-Backbetrieb Freunde zuzuführen, waren vielfach von Erfolg begleitet und vielversprechend sind die Anfänge für die Verwendung der elektrischen Speicheröfen für Raumheizung und Warmwasserbereitung. *Wenn daher heute, wo die Gaspreiskurve ihr Maximum jeden-*

¹⁾ Bulletin 1919, Seite 303 ff.