

Zeitschrift: Bulletin de l'Association suisse des électriciens
Herausgeber: Association suisse des électriciens
Band: 12 (1921)
Heft: 12

Artikel: Über den räumlichen Verlauf von Erdschlussströmen [Fortsetzung und Schluss]
Autor: Rüdberg, Reinhold
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-1057124>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 18.01.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

SCHWEIZ. ELEKTROTECHNISCHER VEREIN

BULLETIN

ASSOCIATION SUISSE DES ÉLECTRICIENS

Erscheint monatlich,
im Januar dazu die Beilage „Jahresheft“.

Alle den Inhalt des „Bulletin“ betreffenden Zuschriften sind zu richten an das

Generalsekretariat
des Schweiz. Elektrotechnischen Vereins
Seefeldstrasse 301, Zürich 8 — Telephon: Hottingen 7320,
welches die Redaktion besorgt.

Alle Zuschriften betreffend **Abonnement, Expedition und Inserate** sind zu richten an den Verlag:

Fachschriften-Verlag & Buchdruckerei A.-G.
Stauffacherquai 36/38 Zürich 4 Telephon Selnau 7016

Abonnementspreis (für Mitglieder des S. E. V. gratis)
für Nichtmitglieder inklusive Jahresheft:
Schweiz Fr. 20.—, Ausland Fr. 25.—
Einzelne Nummern vom Verlage Fr. 2.— plus Porto.

Ce bulletin paraît mensuellement. — „L'Annuaire“ est distribué comme supplément dans le courant de janvier.

Prière d'adresser toutes les communications concernant la matière du „Bulletin“ au

Secrétariat général
de l'Association Suisse des Electriciens
Seefeldstrasse 301, Zurich 8 — Telephon: Hottingen 7320
qui s'occupe de la rédaction.

Toutes les correspondances concernant les abonnements, l'expédition et les annonces, doivent être adressées à l'éditeur

Fachschriften-Verlag & Buchdruckerei S. A.
Stauffacherquai 36/38 Zurich 4. Téléphone Selnau 7016

Prix de l'abonnement annuel (gratuit pour les membres de l'A. S. E.), y compris l'Annuaire Fr. 20.—
pour la Suisse, Fr. 25.— pour l'étranger.
L'éditeur fournit des numéros isolés à Fr. 2.—, port en plus.

XII. Jahrgang
XII^e Année

Bulletin No. 12

Dezember 1921
Décembre 1921

Ueber den räumlichen Verlauf von Erdschlussströmen.

Von *Reinhold Rüdenberg*, Charlottenburg.
(Fortsetzung und Schluss.)

II. Die Wirkung des Erdungsseiles bei Erd- und Kurzschlüssen.

Will man das Auftreten von gefährlichen Schrittspannungen in der Nähe des Erddurchschlages von Freileitungen vermeiden, so muss man dafür sorgen, dass die Ströme in der Umgebung des mit Erdschluss behafteten Mastes, in der hohe Stromkonzentration und daher gefährliche Spannungen auftreten, in metallischen Leitern fließen können und erst in grösseren Abständen vom geerdeten Maste ihren Weg durch die Erde nehmen müssen. Man pflegt dies entweder dadurch zu erreichen,

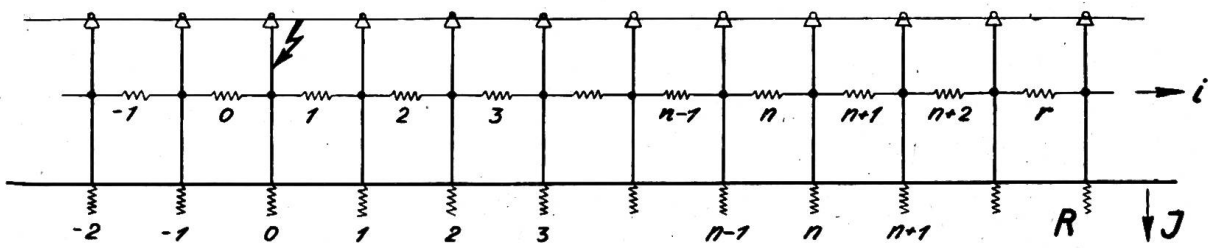


Fig. 5

dass man die Erdungsströme von jedem Mastfuss in ein unterirdisch möglichst ausgedehntes weitmaschiges Drahtnetz fließen lässt, das den Mast umgibt, oder *indem man die eisernen Masten der Leitungsstrecke durch ein besonderes Erdungsseil miteinander verbindet*, so dass den Erdschlussströmen nicht nur der mit Erdschluss behaftete Mast, sondern auch sämtliche andern Masten zum Uebertritt in die Erde zur Verfügung stehen. Da nun aber das Erdungsseil einen gewissen Leitungswiderstand besitzt, so wird durch weitentfernte Masten nicht so viel Strom in die Erde

fliessen als durch Masten, die dem Erdschluss nahe liegen. Der grösste Strom wird stets durch den Erdschlussmast selbst zur Erde übertreten.

Um die *Verteilung des Stromes zu finden*, können wir entsprechend Fig. 5 für den n^{ten} Mast, vom Erdungsmast aus gerechnet, aussagen, dass der in ihm zur Erde übertretende Strom J_n gleich sein muss der Differenz der Ströme i_n und i_{n+1} in den ihm benachbarten Teilen des Erdungsseiles

$$J_n = i_n - i_{n+1} \quad (27)$$

Wir wollen nun den Widerstand des Erdseilabschnittes zwischen zwei Masten r und den Erdungswiderstand jedes Mastes R nennen und dabei annehmen, dass alle Masten gleichen Erdwiderstand und einen Abstand besitzen, der gross genug gegenüber dem Mastfuss ist, so dass ihre Stromverteilungen sich in der Erde gegenseitig nicht merklich beeinflussen. Dann können wir die Umlaufspannung für den Stromkreis anschreiben, der aus dem n^{ten} Teil des Erdungsseiles und dem n^{ten} und $n-1^{\text{ten}}$ Mast der Strecke gebildet wird zu

$$J_n R - J_{n-1} R + i_n r = 0 \quad (28)$$

Diese beiden Gleichungen beherrschen das Gesetz der Stromverteilung auf alle Masten und Erdseilabschnitte vollständig, wenn man für n nacheinander die Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5 usw. einsetzt, die angeben, den wievielten Mast vom Erdschlussmast aus man betrachten will.

Um die Unbekannten i und J in Gleichung (27) und (28) zu trennen, kann man nach Gleichung (28) schreiben

$$i_n = \frac{R}{r} (J_{n-1} - J_n) \quad (29)$$

Diese Gleichung gilt für den n^{ten} Streckenabschnitt des Erdseiles. Wendet man sie auf den $n+1^{\text{ten}}$ Erdschlussabschnitt an, so muss man in ihr n durch $n+1$ ersetzen und erhält

$$i_{n+1} = \frac{R}{r} (J_n - J_{n+1}) \quad (30)$$

Durch Einsetzen von Gleichung (29) und (30) in Gleichung (27) entsteht alsdann

$$\frac{r}{R} J_n = J_{n+1} - 2J_n + J_{n-1} \quad (31)$$

eine Beziehung, die *eine lineare Differenzgleichung zweiter Ordnung für den Maststrom J darstellt*.

Eine ähnliche Beziehung erhält man für den Erdseilstrom i , wenn man die Gleichung (27) für den $n-1^{\text{ten}}$ Mast anschreibt zu

$$J_{n-1} = i_{n-1} - i_n \quad (32)$$

Wenn man Gleichung (27) und (32) in Gleichung (28) einsetzt, dann entsteht

$$\frac{r}{R} i_n = i_{n+1} - 2i_n + i_{n-1} \quad (33)$$

also dieselbe Differenzgleichung wie für J .

Zur Lösung dieser Differenzgleichungen müssen wir einen Ansatz machen, in welcher Weise der Strom von der Ordnungszahl n der Masten abhängt. Wir versuchen den Ansatz

$$J_n = A \varepsilon^{\alpha n} \quad (34)$$

in dem A eine willkürliche, noch zu bestimmende Konstante bedeutet, ε die Basis der natürlichen Logarithmen ist, und α ein Zahlenwert ist, dessen Grösse sich durch Einsetzen in die Differenzgleichung (31) ergibt.

Wir bilden zu dem Zweck durch Einsetzen von $n+1$ und $n-1$ anstelle von n in Gleichung (34)

$$J_{n+1} = A \varepsilon^{\alpha(n+1)} = A \varepsilon^{\alpha} \varepsilon^{\alpha n} \quad (35)$$

und

$$J_{n-1} = A \varepsilon^{\alpha(n-1)} = A \varepsilon^{-\alpha} \varepsilon^{\alpha n} \quad (36)$$

Damit wird aus Gleichung (31), wenn wir die gemeinsamen Faktoren aller Glieder streichen

$$\frac{r}{R} = \varepsilon^{\alpha} - 2 + \varepsilon^{-\alpha} = \left(\frac{\varepsilon^{\alpha}}{\varepsilon^{\frac{\alpha}{2}}} - \frac{\varepsilon^{\frac{\alpha}{2}}}{\varepsilon^{\alpha}} \right)^2 = \left(2 \sinh \frac{\alpha}{2} \right)^2 \quad (37)$$

und daraus erhält man für die Exponentialziffer α die Bestimmungsgleichung

$$\sinh \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{r}{R}} \quad (38)$$

Da die Widerstände r und R stets bekannt sind, so kann man α aus einer Tafel der hyperbolischen Funktion leicht berechnen und erkennt aus Gleichung (34), dass der von den Masten und in die Erde übertretende Strom J sich mit zunehmender Entfernung vom Erdschlussmaste nach einem *Exponentialgesetz* ändert. Da sowohl positive wie negative Werte von α der Bedingungsgleichung (37) genügen, so können wir als vollständige Lösung der Differenzgleichung in Erweiterung von Gleichung (34) schreiben

$$J_n = A \varepsilon^{\alpha n} + B \varepsilon^{-\alpha n} \quad (39)$$

Die beiden willkürlichen Konstanten A und B entsprechen der Tatsache, dass in der Differenzgleichung (31) rechts die *zweite Differenz* von J_n steht, nämlich

$$(J_{n+1} - J_n) - (J_n - J_{n-1}) = J_{n+1} - 2J_n + J_{n-1} \quad (40)$$

Häufig ist der Widerstand r des Erdseiles zwischen 2 Masten relativ klein gegenüber dem Erdungswiderstand R jedes Mastes. Dann ist der *sinh* der Gleichung (38) sehr klein, und man kann für ihn das Argument setzen. Man erhält damit die Näherungsformel für α

$$\alpha \cong \sqrt{\frac{r}{R}} \quad (41)$$

die bis zu Werten von etwa $\frac{r}{R} = 0,1$ anwendbar ist. Die Wurzel aus dem Verhältnis von Widerstand des Erdseiles zwischen zwei Masten zum Erdwiderstand jedes Mastes ist also charakteristisch für die Verteilung der Ströme in den gesamten Leitungen.

Da wir für den Erdseilstrom i_n in Gleichung (33) dieselbe Differenzgleichung erhalten haben wie für den Maststrom J_n in Gleichung (31), so erhalten wir in Analogie mit der Lösung für den letzteren nach Gleichung (37) für den Erdseilstrom

$$i_n = a \varepsilon^{\alpha n} + b \varepsilon^{-\alpha n} \quad (42)$$

in der nur a und b andere Konstanten bedeuten.

Da die Ströme durch die Beziehung (27) miteinander verknüpft sind, so sind die Konstanten A, B und a, b nicht unabhängig von einander. Man erhält vielmehr durch Einsetzen der Lösungen (39) und (42) in Gleichung (27)

$$A \varepsilon^{\alpha n} + B \varepsilon^{-\alpha n} = a \varepsilon^{\alpha n} (1 - \varepsilon^{\alpha}) + b \varepsilon^{-\alpha n} (1 - \varepsilon^{-\alpha}) \quad (43)$$

und daraus, weil diese Beziehung für jedes n gelten muss

$$A = a (1 - \varepsilon^{\alpha}) \quad B = b (1 - \varepsilon^{-\alpha}) \quad (44)$$

Für den Erdseilstrom wird damit nach Gleichung (42)

$$i_n = \frac{A \varepsilon^{\alpha n}}{1 - \varepsilon^\alpha} + \frac{B \varepsilon^{-\alpha n}}{1 - \varepsilon^{-\alpha}} \quad (45)$$

In den beiden Gleichungen (39) und (45) sind jetzt nur noch zwei Konstanten A und B enthalten, deren Grösse aus den *Grenzbedingungen des Problems* bestimmt werden muss.

Wir wollen drei verschiedene Fälle untersuchen:

a) Erdschluss am Ende einer langen Leitungsstrecke.

Der Erdschlussstrom J , der bei einphasigem Erdschluss im wesentlichen durch die Kapazität der Netzteile bedingt ist, gabelt sich nach Fig. 6 in den Mastflussstrom J_0 und den Erdseilstrom i_1 . Es ist also

$$J = J_0 + i_1 \quad (46)$$

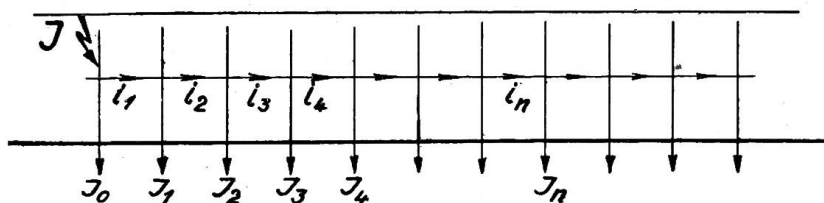


Fig. 6

Dies ist die Grenzbedingung am einen Ende der Strecke mit $n = 0$.

Für sehr grosse Abstände n vom Erdschlussmaste können die Ströme nicht über alle Massen gross werden; sie müssen vielmehr mit wachsendem n kleiner und kleiner werden. Für den Grenzfall sehr langer Leitungen muss daher in Gleichung (39) und (45)

$$A = 0 \quad (47)$$

werden. Es bleibt dann in beiden Gleichungen nur das zweite Glied mit B stehen. Es ist

$$J_n = B \varepsilon^{-\alpha n} \quad i_n = \frac{B \varepsilon^{-\alpha n}}{1 - \varepsilon^{-\alpha}} \quad (48)$$

Durch Einsetzen dieser Werte in Gleichung (46), wobei für J_n : $n = 0$ und für i_n : $n = 1$ zu setzen ist, erhält man den Ausdruck

$$J = B + \frac{B \varepsilon^{-\alpha}}{1 - \varepsilon^{-\alpha}} = \frac{B}{1 - \varepsilon^{-\alpha}} \quad (49)$$

Die Konstante B ist also im Verhältnis zum Erdschlussstrom J

$$\frac{B}{J} = 1 - \varepsilon^{-\alpha} = 1 - \frac{1 - \operatorname{tgh} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tgh} \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \operatorname{tgh} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tgh} \frac{\alpha}{2}} \quad (50)$$

Der grösste in die Erde fließende Strom herrscht natürlich am Erdschlussmast mit $n = 0$. Er ist nach Gleichung (48) mit B nach Gleichung (50)

$$J_0 = \frac{2 \operatorname{tgh} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tgh} \frac{\alpha}{2}} J \quad (51)$$

Der grösste Erdseilstrom ist in der am Erdschlussmast anliegenden Strecke vorhanden mit $n = 1$. Er ist aus Gleichung (46) oder (48) zu errechnen zu

$$i_1 = J - \frac{2 \operatorname{tgh} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tgh} \frac{\alpha}{2}} J = \frac{1 - \operatorname{tgh} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tgh} \frac{\alpha}{2}} J = \varepsilon^{-\alpha} J \quad (52)$$

Zur Zahlenrechnung ist es bequem, die transzendenten Funktionen zu vermeiden. Man kann dazu unter Berücksichtigung von Gleichung (38) schreiben

$$\operatorname{tgh} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sinh \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1 + \sinh^2 \frac{\alpha}{2}}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\frac{r}{R}}{1 + \frac{1}{4} \frac{r}{R}}} \quad (53)$$

und erhält dadurch für die am meisten interessierenden Ströme nach Gleichung (51) und (52) einfach zu berechnende Ausdrücke. In Tabelle I¹⁾ sind dieselben für verschiedene Werte von $\frac{r}{R}$ angeschrieben. Man erkennt, dass man durch Verbinden

der Masten durch ein Erdseil mit relativ kleinem Widerstande den vom Erdschlussmast in die Erde überfließenden Strom auf einen geringen Bruchteil vermindern

kann, dass man daher durch Anwendung von Erdseilen die Gefährdung durch Erdströme erheblich verkleinert.

Wesentlich ist dabei die richtige Wahl des Verhältnisses von Erdseilwiderstand zu Masterdungswiderstand. Nach unsern Berechnungen kommt die Wurzel dieses Verhältnisses als Masstab in Betracht.

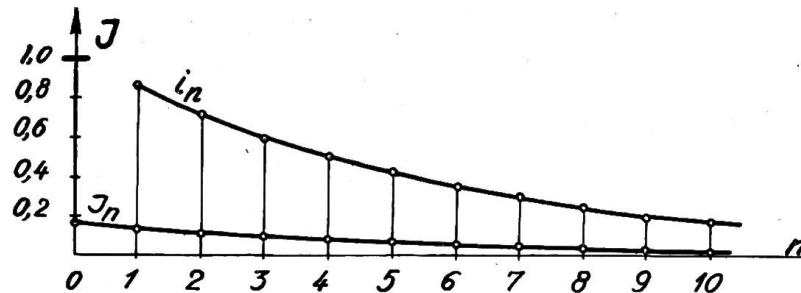


Fig. 7

Das Erdseil entlastet den Erdschlussmast und führt die Erdströme auch den anderen Masten zu. Wie sie sich auf die einzelnen Masten und die einzelnen Erdseilabschnitte verteilen, geht aus Formel (48) hervor und ist in Fig. 7 für den Fall $\frac{r}{R} = 0,03$ bildlich dargestellt.

Wir wollen den Mastabstand n bestimmen, in dem der Erdstrom auf 1% des Anfangswertes abgeklungen ist. Dafür ist

$$\varepsilon^{-\alpha n} = \frac{1}{100} \quad (54)$$

und demnach

$$n_{1\%} = \frac{\ln 100}{\alpha} \cong 4,6 \sqrt{\frac{R}{r}} \quad (55)$$

Darin ist der Näherungswert (41) für α eingesetzt. Man erkennt, dass der Ausbreitungsbereich der Erdströme auf die Masten sich nahezu umgekehrt wie die Wurzel aus dem Widerstand des Erdseiles ausdehnt. Für $\frac{r}{R} = 0,03$ erhält man demnach

am 26. Mast vom Streckenende nur noch einen Erdstrom von 1% des Erdstromes an der Erdschlussstelle. Hierdurch ist gleichzeitig ausgedrückt, wann man die Leitung als lang genug ansehen kann, um nach Gleichung (47) die ersten Glieder von Gleichung (39) und (45) zu streichen. Es muss, um keinen erheblichen Fehler in

¹⁾ Siehe Tabelle I, S. 369.

der Rechnung zu begeben, mindestens die durch Gleichung (55) gegebene Mastzahl vorhanden sein. Praktisch ist dies wohl stets der Fall. Tabelle II¹⁾ zeigt die zu verschiedenen Werten von $\frac{r}{R}$ gehörigen Zahlenwerte von a und n_{f0} .

b) Erdschluss auf der freien Leitungsstrecke.

Der Erdschlussstrom breitet sich hier im Erdseil zu beiden Seiten des gestörten Mastes aus, wie es Fig. 8 darstellt. Für jede Seite gilt Gleichung (39) und (45) für die Verteilung der Ströme, jedoch mit verschiedenen Konstanten A und B . Auch

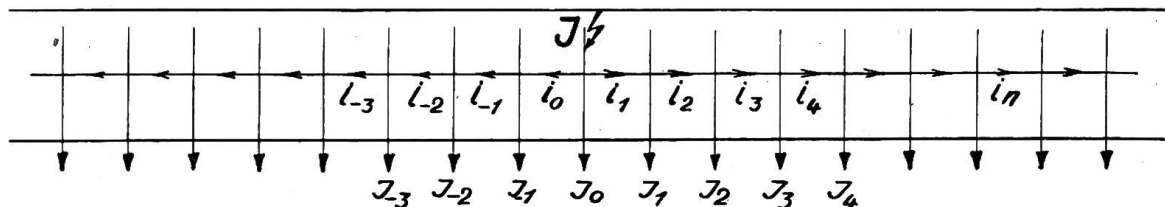


Fig. 8

hier sind die Erdungsströme in den Masten und Erdseilen für grosse Mastentfernungen n verschwindend klein, sofern die Leitung mindestens so lang ist, wie es Gleichung (55) angibt. Daher ist für die Strecke rechts vom Erdschlussmast wieder $A = 0$ zu setzen, denn sonst würde man mit n wachsende Ströme erhalten. Dagegen ist für die Strecke links vom Erdschlussmast $B = 0$ zu setzen, denn sonst würde man mit minus n ansteigende Ströme erhalten.

Man erhält daher

Links vom Erdschlussmast für negative n

Rechts vom Erdschlussmast für positive n

Für den Erdstrom der Masten:

$$J_n = A \varepsilon^{an} \tag{56}$$

$$J_n = B \varepsilon^{-an} \tag{57}$$

Für den Strom im Erdseil:

$$i_n = \frac{A \varepsilon^{an}}{1 - \varepsilon^a} \tag{58}$$

$$i_n = \frac{B \varepsilon^{-an}}{1 - \varepsilon^{-a}} \tag{59}$$

Der Strom im Erdschlussmast mit $n = 0$ ist daher:

$$J_0 = A \tag{60}$$

$$J_0 = B \tag{61}$$

Der Strom im Erdungsseil unmittelbar am Erdschlussmast wird nach Fig. 8

$$i_0 = \frac{A}{1 - \varepsilon^a} \tag{62}$$

$$i_1 = \frac{B \varepsilon^{-a}}{1 - \varepsilon^{-a}} = \frac{B}{\varepsilon^a - 1} \tag{63}$$

Der Strom J_0 im Erdschlussmast ist beiden Seiten gemeinsam. Daher wird nach Gleichung (60) und (61)

$$A = B = J_0 \tag{64}$$

Hierdurch werden die ersten Erdseilströme von Gleichung (62) und (63) einander entgegengesetzt gleich, wie es aus Symmetriegründen nach Fig. 8 auch sein muss.

Der gesamte Erdschlussstrom J gabelt sich nach Fig. 8 in drei Teile. Ein Teil fliesst durch den Erdschlussmast direkt zur Erde, zwei andere Teile fließen in die Erdseile nach rechts und links. Es ist also

$$J = J_0 + i_1 - i_0 \tag{65}$$

1) Siehe Tabelle II, S. 369.

worin beachtet werden muss, dass allein i_0 negativ anzusetzen ist, weil die Ströme i in der Richtung wachsender n als positiv gezählt werden. Setzt man Gleichung (62) und (63) unter Beachtung von Gleichung (64) in Gleichung (65) ein, so erhält man

$$J = J_0 \left(1 + \frac{2}{\varepsilon^\alpha - 1} \right) = J_0 \frac{\varepsilon^\alpha + 1}{\varepsilon^\alpha - 1} = J_0 \operatorname{ctgh} \frac{\alpha}{2} \tag{66}$$

und daher für den Erdstrom des Erdschlussmastes

$$J_0 = \operatorname{tgh} \frac{\alpha}{2} \cdot J \tag{67}$$

Den grössten Erdseilstrom erhält man am einfachsten aus Gleichung (65) zu

$$i_1 = -i_0 = \frac{J - J_0}{2} = \frac{1 - \operatorname{tgh} \frac{\alpha}{2}}{2} J \tag{68}$$

Durch Vergleich der beiden letzten Beziehungen mit Gleichung (51) und (52) erkennt man, dass die grössten auftretenden Erdströme und Erdseilstrome beim

Erdschluss auf der freien Strecke wesentlich kleiner sind als beim Erdschluss am letzten Streckenmast. *Sie sind nahezu, jedoch nicht ganz, halb so gross geworden*, da $\operatorname{tgh} \frac{\alpha}{2}$ im allgemeinen ein kleiner Bruch ist. Zur zahlenmässigen Berechnung der Ströme kann man auch hier die Gleichung (53) benutzen. In allen Fällen, in denen $\frac{r}{R}$ geringer als der oben bereits genannte Wert 0,1 ist, genügt es sogar, die Näherungsformel (71) anzuwenden und in Gleichung (53) den Nenner unter der Wurzel = 1 zu setzen. *Man erhält dann aus Gleichung (67) die Näherungsgleichung für den grössten Masterdstrom*

$$J_0 \cong \frac{1}{2} \sqrt{\frac{r}{R}} J \tag{69}$$

und für den grössten Erdseilstrom

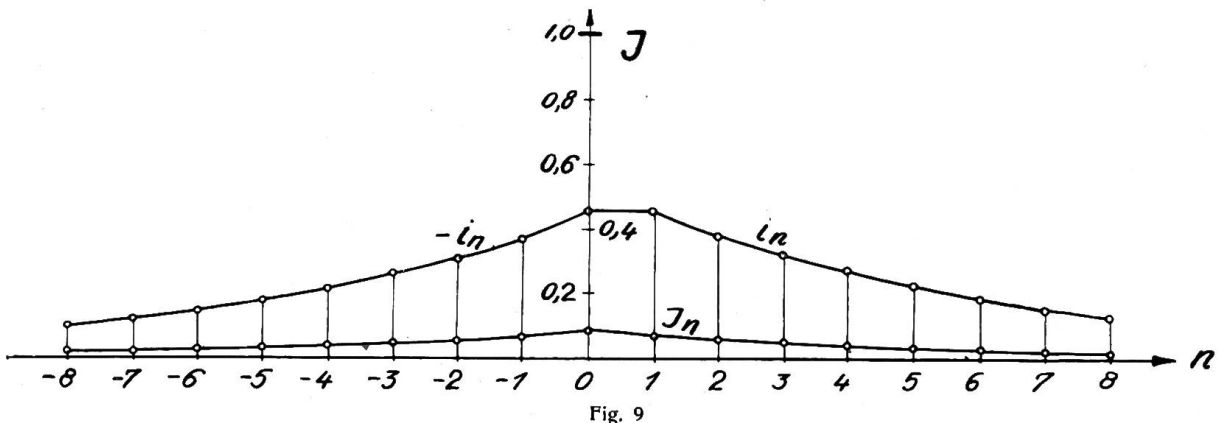
$$i_1 \cong \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{r}{R}} \right) J \tag{70}$$

In Tabelle III sind die genauen Werte für verschiedene $\frac{r}{R}$ eingetragen.

Tabelle I			Tabelle II			Tabelle III		
$\frac{r}{R}$	$\frac{J_0}{J}$	$\frac{i_1}{J}$	$\frac{r}{R}$	α	$n f_0$	$\frac{r}{R}$	$\frac{J_0}{J}$	$\frac{i_1}{J}$
0	0	1	0	0	∞	0	0	0,5
0,01	0,096	0,904	0,01	0,100	46	0,01	0,050	0,475
0,03	0,159	0,841	0,03	0,173	26,5	0,03	0,086	0,456
0,1	0,271	0,729	0,1	0,316	14,5	0,1	0,156	0,421
0,3	0,416	0,584	0,3	0,547	8,5	0,3	0,264	0,368
1	0,618	0,382	1	0,980	4,7	1	0,446	0,276

Die Verteilung der Mastströme und Erdseilströme längs der Leitung auf beiden Seiten des Erdschlussmastes ist in Fig. 9 bildlich für $\frac{r}{R} = 0,03$ dargestellt. Auch hier gilt das gleiche Abklingungsgesetz der Gleichung (55).

Im allgemeinen ist bei Erdschluss einer Phase eines grösseren Leitungsnetzes der Erdstrom im wesentlichen durch die Erdkapazität der andern Phasen bestimmt, durch die er in das Netz zurückfliesst. Der Widerstand der Erde und der Ausbreitungswiderstand der Masten ist meistens so gering, dass er gegenüber dem



Blindwiderstand der Kapazität keine erhebliche Rolle spielt. Dennoch kann es Interesse haben, den Widerstand der hier betrachteten Anordnungen, bei dem zahlreiche Masten parallel geschaltet sind, zu kennen, da von seiner Grösse die Höhe der Spannung im Erdschlussmaste selbst abhängt. Da der Strom im Erdschlussmast durch die Wirkung des Erdseiles geringer wird als der gesamte Erdschlussstrom, und zwar je nachdem um das Mass der Gleichung (51) oder (67), so wird auch die Spannung im Erdschlussmaste und daher der Widerstand der Gesamtanordnung um das gleiche Mass geringer. Im hier behandelten Falle des Erdschlusses auf der freien Strecke ist demnach der gesamte Widerstand der verketteten Stromleitung nach Fig. 8

$$\Sigma R, r = R \cdot \operatorname{tgh} \frac{a}{2} \cong \frac{1}{2} \sqrt{Rr} \quad (71)$$

Er lässt sich also näherungsweise durch das halbe geometrische Mittel des Mastwiderstandes und der Erdseilwiderstände bestimmen.

Nimmt man als Zahlenbeispiel einen Mastwiderstand von $R = 50$ Ohm und einen Erdseilwiderstand zwischen zwei Masten von $r = 0,5$ Ohm an, so erhält man nach Gleichung (67) oder (69) durch Anwendung des Erdseiles eine Reduktion des Erdstromes im gestörten Mast auf $\frac{1}{20}$ des Stromes ohne Erdseil und ebenso sinkt auch der Widerstand der gesamten Leitungskette auf $\frac{1}{20}$ des Uebergangswiderstandes eines Mastfusses.

c) Kurzschluss durch Erdschluss zweier Phasen.

Wenn in einem Leitungsnetze zwei verschiedenpolige Leitungen gleichzeitig Erdschluss besitzen, so stellt dieser doppelte Erdschluss einen mehr oder weniger vollständigen Kurzschluss der beiden Leitungen dar. Der Strom fliesst, wie es in Fig. 10 dargestellt ist, aus der einen Leitung durch den einen Erdschlussmast an der Stelle $n = 0$ in die Erde hinein und durch den andern Erdschlussmast an der

Stelle $n = a$ wieder aus der Erde heraus in die zweite Leitung. Ist kein Erdseil vorhanden, so hat er auf seinem Lauf durch die Erde nur den doppelten Ausbreitungswiderstand $2R$ der beiden Erdschlussmasten zu überwinden, der unabhängig von der Mastentfernung a ist. Sind die Masten jedoch durch ein Erdungsseil verbunden, so fließen zahlreiche parallele Ströme durch das Erdseil und die andern Masten in die Erde hinein und aus ihr heraus, so dass der Widerstand der gesamten Leitungsverkettung wesentlich kleiner ist. Bei grossem Abstand a der

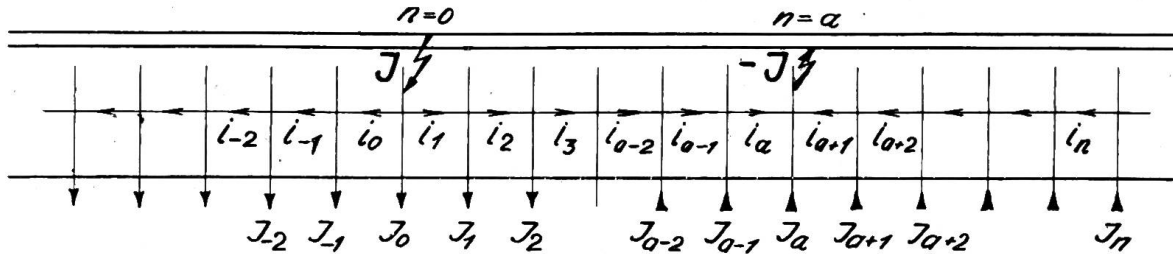


Fig. 10

gleichzeitig geerdeten Maste, der grösser ist als der doppelte Wert nach Gleichung (55), stören sich die beiden Stromausbreitungssysteme nicht. Man kann sie daher nach den Gesetzen des vorigen Abschnittes behandeln und erhält nach Gleichung (71) als gesamten Erdwiderstand des Doppelerdschlusses näherungsweise das geometrische Mittel aus Erdwiderstand des Mastes und Widerstand des Erdseilabschnittes zwischen 2 Masten. Liegt der Mastabstand a nur über dieser Grenze, so ist seine wirkliche Grösse gleichgültig. Der Strom breitet sich in den Erdschichten zwischen den Erdschlussmasten auf so grosse Querschnitte aus, dass deren Widerstand keinen Beitrag liefert.

Ist die Mastentfernung a jedoch nur klein, so beeinflussen sich die Stromsysteme beider Erdschlussmasten erheblich, so dass man die Stromverteilung von neuem bestimmen muss. Wir müssen dann drei verschiedene Leitungsabschnitte unterscheiden: links von einem Erdschlussmast, in der Mitte zwischen den beiden Erdschlussmasten und rechts vom andern Erdschlussmast. In jedem Abschnitt gelten dieselben prinzipiellen Gleichungen für die Stromverteilung und daher auch die gleichen Lösungen für Maststrom und Erdseilstrom nach Gleichung (39) und (45); jedoch sind die Konstanten A und B der Lösungen in den drei Abschnitten verschieden.

Wir wollen annehmen, dass die Leitung sich links und rechts von den beiden Erdschlussmasten auf grössere Längen als nach Gleichung (55) erstreckt. Dann ist ebenso wie im letzten Abschnitte links von beiden Masten $B = 0$ und rechts von beiden Masten $A = 0$ zu setzen. Im Mittelabschnitt treten beide Konstanten auf. Man erhält daher, wenn man die Ströme und die Konstanten in den drei Abschnitten durch die Zahl der Striche unterscheidet:

Links:	Mitte:	Rechts:
	für den Maststrom:	
$J'_n = A' \varepsilon^{an}$ (72)	$J_n = A \varepsilon^{an} + B \varepsilon^{-an}$ (73)	$J''_n = B'' \varepsilon^{-an}$ (74)
	für den Erdseilstrom:	
$i'_n = \frac{A' \varepsilon^{an}}{1 - \varepsilon^a}$ (75)	$i_n = \frac{A \varepsilon^{an}}{1 - \varepsilon^a} + \frac{B \varepsilon^{-an}}{1 - \varepsilon^{-a}}$ (76)	$i''_n = \frac{B'' \varepsilon^{-an}}{1 - \varepsilon^{-a}}$ (77)

Damit wird der Strom im Erdschlussmast $n = 0$:

$J'_0 = A'$ (78)	$J_0 = A + B$ (79)
------------------	--------------------

Links:

Mitte:

Rechts:

und im Erdschlussmast $n = a$:

$$- \quad J_a = A \varepsilon^{\alpha a} + B \varepsilon^{-\alpha a} \quad (80) \quad J''_a = B'' \varepsilon^{-\alpha a} \quad (81)$$

Der dem Erdschlussmast $n = 0$ benachbarte Erdseilstrom ist:

$$i'_0 = \frac{A'}{1 - \varepsilon^\alpha} \quad (82) \quad i_1 = \frac{A \varepsilon^\alpha}{1 - \varepsilon^\alpha} + \frac{B \varepsilon^{-\alpha}}{1 - \varepsilon^{-\alpha}} \quad (83)$$

und der dem Erdschlussmast $n = a$ benachbarte Erdseilstrom ist:

$$- \quad i_a = \frac{A \varepsilon^{\alpha a}}{1 - \varepsilon^\alpha} + \frac{B \varepsilon^{-\alpha a}}{1 - \varepsilon^{-\alpha}} \quad (84) \quad i''_{a+1} = \frac{B'' \varepsilon^{-\alpha(a+1)}}{1 - \varepsilon^{-\alpha}} \quad (85)$$

Da die beiden Formel­ausdrücke für die Ströme in den Erdschlussmasten den gleichen Wert ergeben müssen, so ist für den linken Erdschlussmast nach Gleichung (78) und (79):

$$A' = A + B \quad (86)$$

und für den rechten Erdschlussmast nach Gleichung (80) und (81):

$$B'' = B + A \varepsilon^{2\alpha a} \quad (87)$$

Ferner ergibt die Aufteilung des gesamten Kurzschlussstromes J in Maststrom und die beiden Erdseilstrome beim linken Erdschlussmast:

$$J = J_0 - i'_0 + i_1 \quad (88)$$

und beim rechten Erdschlussmast:

$$- J = J_a + i''_{a+1} - i_a \quad (89)$$

Diese vier Gleichungen (86) bis (89) sind ausreichend zur Bestimmung der noch unbekannt­en Konstanten A und B , A' und B'' . Setzt man in Gleichung (88) die Teilströme nach Gleichung (78), (82) und (83) ein, so erhält man:

$$J = A' \left(1 - \frac{1}{1 - \varepsilon^\alpha} \right) + \frac{A \varepsilon^\alpha}{1 - \varepsilon^\alpha} + \frac{B}{\varepsilon^\alpha - 1} = \frac{-\varepsilon^\alpha}{1 - \varepsilon^\alpha} (A' - A + B \varepsilon^{-\alpha}) \quad (90)$$

und wenn man Gleichung (86) beachtet:

$$J = \frac{1}{1 - \varepsilon^{-\alpha}} (B + B \varepsilon^{-\alpha}) = \frac{1 + \varepsilon^{-\alpha}}{1 - \varepsilon^{-\alpha}} B = \operatorname{ctgh} \frac{\alpha}{2} \cdot B \quad (91)$$

Daher wird die erste Konstante:

$$B = \operatorname{tgh} \frac{\alpha}{2} \cdot J \quad (92)$$

Setzt man andererseits in Gleichung (89) die Teilströme nach Gleichung (81), (85) und (84) ein, so erhält man:

$$- J = B'' \varepsilon^{-\alpha a} \left(1 + \frac{\varepsilon^{-\alpha}}{1 - \varepsilon^{-\alpha}} \right) - \frac{A \varepsilon^{\alpha a}}{1 - \varepsilon^\alpha} - \frac{B \varepsilon^{-\alpha a}}{1 - \varepsilon^{-\alpha}} = \frac{\varepsilon^{-\alpha a}}{1 - \varepsilon^{-\alpha}} (B'' - B) - \frac{A \varepsilon^{\alpha a}}{1 - \varepsilon^\alpha} \quad (93)$$

und wenn man Gleichung (87) beachtet:

$$- J = \frac{\varepsilon^{\alpha a}}{1 - \varepsilon^{-\alpha}} (A + A \varepsilon^{-\alpha}) = \varepsilon^{\alpha a} \frac{1 + \varepsilon^{-\alpha}}{1 - \varepsilon^{-\alpha}} A = \varepsilon^{\alpha a} \operatorname{ctgh} \frac{\alpha}{2} A \quad (94)$$

Daraus folgt für die zweite Konstante:

$$A = -\varepsilon^{-\alpha a} \operatorname{tgh} \frac{\alpha}{2} J \tag{95}$$

Aus Gleichung (86) folgt nunmehr mit Gleichung (92) und (95) die dritte Konstante zu

$$A' = (1 - \varepsilon^{-\alpha a}) \operatorname{tgh} \frac{\alpha}{2} J \tag{96}$$

und aus Gleichung (87) die vierte Konstante zu

$$B'' = (1 - \varepsilon^{\alpha a}) \operatorname{tgh} \frac{\alpha}{2} J \tag{97}$$

Um das Verhältnis der Konstanten zueinander besser zu überblicken, bezieht man A' und B am besten auf den Mast $n=0$, dagegen A und B'' auf den Mast $n=a$ und schreibt

$$\left. \begin{aligned} B &= J \operatorname{tgh} \frac{\alpha}{2} = -A \varepsilon^{\alpha a} \\ A' &= J (1 + \varepsilon^{-\alpha a}) \operatorname{tgh} \frac{\alpha}{2} = -B'' \varepsilon^{-\alpha a} \end{aligned} \right\} \tag{98}$$

Wie der Vergleich mit Formel (67) zeigt, werden also die Erdströme vom linken Erdschlussmast durch den Einfluss des zweiten Erdschlusses etwas verringert, sofern man die Mastströme auf einen gegebenen Erdschlussstrom J bezieht. Da dieser beim

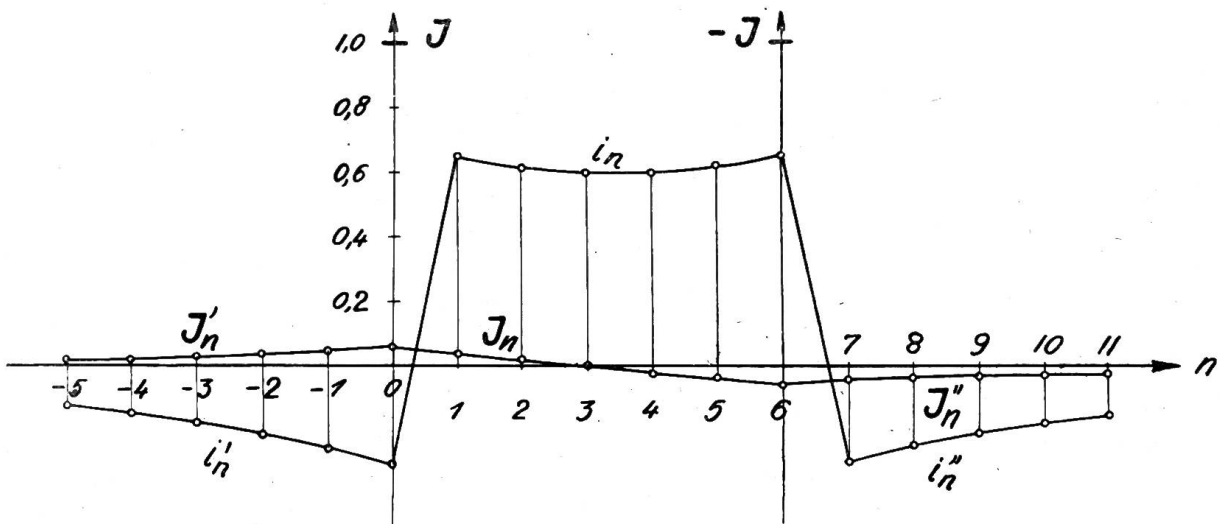


Fig. 11

zweiphasigen Erdschluss, der stets einen Kurzschluss darstellt, viel grösser ist als beim einphasigen Schluss, so ist der *wirkliche Wert* der Erdströme in diesem Falle natürlich *sehr viel grösser* als beim Einzelerdschluss. Fig. 11 stellt den Verlauf der Ströme für $\frac{r}{R} = 0,03$ und einen Abstand von $a = 6$ Masten der beiden Erdschlüsse dar.

Die Erdströme in den beiden Erdschlussmasten sind nach Gleichung (78), (79) und (80) (81):

$$J_0 = -J_a = A' = -B'' \varepsilon^{-\alpha a} = (1 - \varepsilon^{-\alpha a}) \operatorname{tgh} \frac{\alpha}{2} J \tag{99}$$

Für grossen Mastabstand a ist das Exponentialglied in der Klammer sehr klein, und man erhält den Wert der Formel (67). Für geringeren Mastabstand wirkt es vermindern auf den Erdstrom.

Beim Mastabstand $a=1$, also beim Erdschluss zweier Phasen auf benachbarten Masten, kann man den Maststrom unter Berücksichtigung der Umformung nach Gleichung (50) ausdrücken zu

$$J_0^{a=1} = \frac{2 \operatorname{tgh}^2 \frac{a}{2}}{1 + \operatorname{tgh} \frac{a}{2}} J \quad (100)$$

und für $a=0$, also Kurzschluss auf dem gleichen Mast wird der Erdstrom zu null.

Umgekehrtes Verhalten zeigt der Strom im Erdungsseil in den Nachbarabschnitten der Erdschlussmasten und zwischen diesen. Der grösste Strom dort ist nach Gleichung (76) für $n=1$:

$$i_1 = \frac{A \varepsilon^a}{1 - \varepsilon^a} + \frac{B \varepsilon^{-a}}{1 - \varepsilon^{-a}} = J \cdot \operatorname{tgh} \frac{a}{2} \left(\frac{\varepsilon^{-aa}}{1 - \varepsilon^{-a}} + \frac{\varepsilon^{-a}}{1 - \varepsilon^{-a}} \right) \quad (101)$$

Dies lässt sich umformen zu

$$i_1 = \frac{1}{2} (1 + \varepsilon^{-a(a-1)}) \left(1 - \operatorname{tgh} \frac{a}{2} \right) J \quad (102)$$

für $a=\infty$ verschwindet das Exponentialglied und man erhält denselben Ausdruck wie in Gleichung (68).

Für $a=1$ dagegen wird das Exponentialglied gleich 1 und daher:

$$i_1^{a=1} = \left(1 - \operatorname{tgh} \frac{a}{2} \right) J \quad (103)$$

so dass man für den Erdschluss zweier Phasen auf benachbarten Masten gerade die doppelte Strombelastung des Erdseiles erhält wie für grosse Entfernung der Erdschlussmasten, immer vorausgesetzt, dass der Doppelerdschlussstrom J gegeben ist.

Während dieser Teilstrom (103) direkt durch das Erdseil von einem Erdschlussmast zum andern fliesst, fliesst der Reststrom:

$$J - i_1^{a=1} = \operatorname{tgh} \frac{a}{2} J \quad (104)$$

unter Vermittlung der ausserhalb der Erdschlusszone liegenden Erdseile *durch die ganze linke Mastenreihe zur Erde und durch die rechte Reihe wieder heraus*. Dieser totale Erdstrom aller Masten ist in diesem Falle, $a=1$, nur ebenso gross wie der Erdstrom des Erdschlussmastes selbst, nach Gleichung (67), im Falle sehr grosser Entfernung der Erdschlussstellen.

Entsprechend der Formel (102) für den Erdseilstrom zwischen den Erdschlussmasten kann man für den grössten äusseren Erdseilstrom ausserhalb der Erdschlussmasten aus Gleichung (82) die Beziehung herleiten

$$- i'_0 = \frac{1}{2} (1 - \varepsilon^{-aa}) \left(1 - \operatorname{tgh} \frac{a}{2} \right) J \quad (105)$$

Für grosse Mastabstände a geht auch dieses in die frühere Formel (68) über. Für kleine a und vor allem für $a=1$ führt der äussere Erddraht weniger, der innere entsprechend mehr Strom.

Im Falle des mehrfachen Erdschlusses ist die Grösse des *Widerstandes* für den Erdschlussstrom von besonderem Interesse, *da die sich entwickelnden starken Kurzschlussströme in gewissem Grade von diesem Widerstand abhängen*. Der gesamte Widerstand zwischen den beiden Erdschlusspunkten der Fig. 10 verhält sich zum Widerstand $2R$ der beiden Erdschlussmasten allein wie der Strom in diesen Masten mit und ohne Erdseil. Er ist also nach Formel (99)

$$\Sigma R, r = 2R(1 - \varepsilon^{-aa}) \operatorname{tgh} \frac{a}{2} \quad (106)$$

Das ergibt für den Mastabstand $a = \infty$ das Doppelte der früheren Formel (71), wie es auch sein muss.

Für den Mastabstand $a = 0$, also für mehrfachen Erdschluss auf einem Mast wird der Widerstand natürlich zu null, und für $a = 1$ erhält man

$$\Sigma R, r = 2R(1 - \varepsilon^{-a}) \operatorname{tgh} \frac{a}{2} = r \left(1 - \operatorname{tgh} \frac{a}{2} \right) \quad (107)$$

Der letztere einfache Ausdruck ist dabei durch Umformung der Exponentialfunktion in eine hyperbolische Funktion unter Verwendung von Gleichung (38) gewonnen. Er zeigt, *dass der Widerstand im wesentlichen durch die einfache Erdseilstrecke zwischen den beiden Masten bestimmt ist* und noch durch den parallel geschalteten Erdstrom der ganzen Mastenreihe nach Gleichung (104) um ein gewisses Mass verkleinert wird.

Wir haben in allen Ueberlegungen nur den Widerstand des Stromkreises als massgebend für die Stromverteilung angesehen. Das entspricht natürlich der Wirklichkeit nicht genau, da auch *die Induktanz der Leitungen eine gewisse Rolle spielt*. Dieselbe ist jedoch in starkem Masse abhängig von der Art, wie die Fernleitung über die Erde geführt ist und zwar nicht nur bezüglich des Abstandes von der Erdoberfläche, sondern auch hinsichtlich der Streckenführung. Es wäre wohl möglich, die Induktanz der Leitungen unter gewissen Annahmen in die Rechnung einzubeziehen. Für den ersten Ueberblick über die Verteilung der Erdschlussströme auf die Masten und Erdseile und die Abschätzung der Gefährdung durch die Erdschlussströme dürften die vorstehenden Rechnungen jedoch ausreichen.

Zusammenfassung.

Es wird die Ausbreitung des Erdschlussstromes in der Umgebung des mit Erdschluss behafteten Mastes untersucht, und es werden Formeln entwickelt, aus denen sich der höchstmögliche Strom berechnen lässt, der unter der Wirkung des Erdschlusses in Lebewesen fliesst, die in der Umgebung des Mastfusses schreiten. Dieser Strom ist unabhängig vom spezifischen Widerstand der Erde. Er beträgt wenige Prozent des Erdschlussstromes, wenn die Erde gleichmässig leitet; dagegen liegt er in der Grössenordnung von 15%, wenn die sonst trockene Erde an der Oberfläche stark durchfeuchtet ist.

Es wird weiter berechnet, in welchem Masse die Konzentration der Erdströme durch ein die Masten verbindendes Erdungsseil vermindert werden kann, und es werden Formeln für den höchsten noch bestehenden Maststrom hergeleitet für die verschiedenen Fälle eines einphasigen Erdschlusses am Ende und in der Mitte der Strecke und für gleichzeitigen Erdschluss auf verschiedenen Phasen. Durch niedrigen Widerstand des Erdungsseiles lässt sich der Masterdstrom auf einige Prozent des früheren Wertes erniedrigen.