

Zeitschrift: Bulletin de l'Association suisse des électriciens
Herausgeber: Association suisse des électriciens
Band: 15 (1924)
Heft: 4

Artikel: Die Ungenauigkeit des Kreisdiagrammes des allgemeinen Transformators und ein Versuch zur Korrektur
Autor: Breitfeld, C.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-1057069>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 18.01.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

SCHWEIZ. ELEKTROTECHNISCHER VEREIN

BULLETIN

ASSOCIATION SUISSE DES ÉLECTRICIENS

Erscheint monatlich,
im Januar dazu die Beilage „Jahresheft“.

Alle den Inhalt des „Bulletin“ betreffenden Zuschriften
sind zu richten an das

Generalsekretariat
des Schweiz. Elektrotechnischen Vereins
Seefeldstrasse 301, Zürich 8 — Telephon: Hottingen 7320,
welches die Redaktion besorgt.

Alle Zuschriften betreffend **Abonnement, Expedition**
und **Inserate** sind zu richten an den Verlag:

Fachschriften-Verlag & Buchdruckerei A.-G.
Stauffacherquai 36/38 Zürich 4 Telephon Selnau 7016

Abonnementspreis (für Mitglieder des S. E. V. gratis)
für Nichtmitglieder inklusive Jahresheft:
Schweiz Fr. 20.—, Ausland Fr. 25.—
Einzelne Nummern vom Verlage Fr. 2.— plus Porto.

Ce bulletin paraît mensuellement. — „L'Annuaire“ est
distribué comme supplément dans le courant de janvier.

Prière d'adresser toutes les communications concernant
la matière du „Bulletin“ au

Secrétariat général
de l'Association Suisse des Electriciens
Seefeldstrasse 301, Zurich 8 — Telephon: Hottingen 7320
qui s'occupe de la rédaction.

Toutes les correspondances concernant les **abonnements**,
l'**expédition** et les **annonces**, doivent être adressées à l'éditeur

Fachschriften-Verlag & Buchdruckerei S. A.
Stauffacherquai 36/38 Zurich 4 Telephon Selnau 7016

Prix de l'abonnement annuel (gratuit pour les membres de
l'A. S. E.), y compris l'Annuaire Fr. 20.—
pour la Suisse, Fr. 25.— pour l'étranger.
L'éditeur fournit des numéros isolés à Fr. 2.—, port en plus.

XV. Jahrgang
XV^e Année

Bulletin No. 4

April 1924
Avril

Die Ungenauigkeiten des Kreisdiagrammes des allgemeinen Transformators und ein Versuch zu ihrer Korrektur.¹⁾

Von Dr. C. Breitfeld,
Professor an der Deutschen Technischen Hochschule in Prag.

*In der vorliegenden Arbeit berücksichtigt der
Autor die Zusatzverluste bereits in den Ausgangs-
Differentialgleichungen.*

*Die Entwicklung und Diskussion des Kreis-
diagrammes ergibt zunächst die Tatsache, dass
der „Leerlaufpunkt“ des Diagrammes bei verän-
deter Belastung selbst auf einem kleinen Kreise
wandert, dessen Mittelpunkt auf dem Heyland-
kreise liegt und dessen Radius leicht zu berechnen
ist, woraus die Veränderung des Magnetisierungs-
stromes folgt.*

*In einem zweiten Teil seines Aufsatzes wird
der Verfasser zeigen, dass die Bezugslinien für
die Zusatzverluste, die Nutzleistung und das Dreh-
moment in Wahrheit keine „Geraden“, sondern
Kurven sind, die angenähert durch neue Gerade
ersetzt werden können, deren Konstruktion an-
gegeben wird.*

*Zum Schlusse wird anhand dieser Theorie
die genaue Konstruktion des Diagrammes aus
Leerlauf-, Kurzschluss- und Widerstandsmessung
gegeben.*

*L'auteur démontre que le diagramme vectoriel
du transformateur n'est pas rigoureusement exact
et indique un moyen pour y remédier. Dans ce but
il tient compte des pertes additionnelles dans
les équations différentielles initiales.*

*Il résulte du développement et de la discussion
du diagramme que le point de marche à vide décrit
lui-même une circonférence avec la variation de
la charge. Le centre de cette circonférence se trouve
sur le cercle d'Heyland et le rayon de celle-ci peut
se calculer aisément, d'où se déduit la variation
du courant magnétisant.*

*Dans la seconde partie de cet article l'auteur
démontrera que les lignes de repair des pertes
additionnelles, la puissance utile et le couple ne
sont en réalité pas des droites, mais des courbes;
ces courbes peuvent avec quelque approximation
être remplacées par des droites, dont la construc-
tion est indiquée dans la suite.*

*En se basant sur cette théorie, l'auteur indique
pour terminer la construction exacte du diagramme
résultant des essais de marche à vide, de marche
en court-circuit et de la mesure des résistances.*

1. Einleitung.

Die Aufgabe, sämtliche technisch wichtigen Grössen des allgemeinen Luft-
transformators durch das Kreisdiagramm darzustellen und dieses aus den Leerlauf-,
Kurzschluss- und Widerstandsmessungen zu entwickeln, ist nur dann durchführbar,
wenn man die *Konstanz* sämtlicher „Daten“ des Transformators annimmt.

¹⁾ Das Manuskript zu dieser Arbeit ging am 29. Juni 1923 bei uns ein.

Die Redaktion.

Diese Daten sind: Der primäre und sekundäre Widerstand (r_1, r_2), die Koeffizienten der Selbst- (L_1, L_2) und der gegenseitigen Induktion (M) und die Streukoeffizienten (τ, τ_1, τ_2). Die Aenderung auch nur einer dieser Daten in dem möglichen Bereiche der Belastung ändert den Durchmesser und die Lage des Diagrammkreises und schliesst daher die weitem Folgerungen aus, die aus dem Diagramm gezogen werden können.

Diese Tatsache tritt in überzeugender Weise zutage, wenn man die Kreisgleichung aus den Differenzialgleichungen der beiden Stromkreise entwickelt und auf diese Art die Abhängigkeit des Durchmessers und der Mittelpunktskoordinaten von den „Daten“ analytisch ausdrückt.

E. Siegel ist in seiner vortrefflichen Arbeit „Der allgemeine Transformator“²⁾ diesen besten und besonders pädagogisch wertvollen Weg gegangen.

Die Resultate zeigen die Annahme der „Konstanz“ der Daten als zwingende, logische Notwendigkeit für die Benützung des Kreisdiagrammes.

Auch Siegel hat sich für die analytische Behandlung mit dem Lufttransformator begnügt und hat die Zusatzverluste (Eisen, Reibung) in der üblichen Weise durch Hinzufügen derselben an die sonstige Gesamtleistung berücksichtigt. Auch hat er die üblichen praktischen Vernachlässigungen gemacht, welche zum Gebrauche der bekannten „geraden“ Linien als Bezugslinien für die Nutzleistung und das Drehmoment führen.

Wenn es auch zweifellos ist, dass diese Behandlungsart bei grösseren und grossen Transformatoren zu „praktisch“ einwandfreien Resultaten führt, so schien es doch der Mühe Wert, nachzusehen, wie gross die Fehler dieser bewussten Vernachlässigungen sind, um sie bei „kleinen“ Motoren zu korrigieren.

Als erstes ist es somit notwendig, die Zusatzverluste schon in den Ausgangsdifferentialgleichungen zu berücksichtigen.

Die Schwierigkeit dieser Berücksichtigung ist so gross, dass eine einwandfreie mathematische und dabei doch lösungsmögliche Darstellung wohl ein „Ideal“ bleibt.

Trotzdem soll im folgenden versucht werden, die Lösung in exakt mathematischer Form zu geben, wobei ich mir wohl bewusst bin, welche Einwände gegen das Physikalische der Darstellung zu erheben sind.

Die Spannungsgleichung des einfachen, eisenumschlingenden Wechselstromkreises

lautet bekanntlich nicht $e = ir + L \frac{di}{dt}$ sondern

$$e = ir + \frac{d}{dt}(Li). \quad (a)$$

Versteht man unter L einen über die Periode konstanten Mittelwert und unter i nicht die „verzerrte“ Stromform, sondern die „äquivalente“ Sinusform, so kann man (a) in der Form schreiben³⁾

$$e = ir + L \frac{d|i|}{dt}. \quad (b)$$

D. h.: Soll die Spannungsgleichung die Grössen e und i zu einer Zeit t ausdrücken, so bedeutet $|i|$ den Stromwert zu einer Zeit $(t-t')$, wobei t' die Zeit, oder $\omega t' = \nu$ der Winkel der magnetischen Verzögerung ist.

Ist also

$$e = \mathcal{E} \sin(\omega t), \quad i = J \sin(\omega t - \varphi), \quad \text{so ist } |i| = J \sin(\omega t - \varphi - \nu).$$

Geht man von der Gleichung (b) durch Multiplikation mit i und Integration über die Zeiteinheit zum Effekt P über, so ergibt sich:

$$P = I^2 r + I^2 \omega L \sin \nu.$$

²⁾ Elektrotechnik und Maschinenbau 1922, Heft 1 und 2.

³⁾ Siehe Verfasser, Elektrotechnik und Maschinenbau 1910, Heft 6.

Da das erste Glied rechts der Kupferverlust ist, so muss das zweite Glied alle andern Verluste bedeuten.

Hätten wir es „nur“ mit Hysteresisverlusten zu tun, so würde das zweite Glied der Fläche der Hysteresisschleife proportional sein, die in dieser Darstellung bekanntlich zur Ellipse geworden ist. Sind noch Wirbelstrom- und mechanische Reibungsverluste vorhanden, so müssen wir diese mit in dem zweiten Gliede zusammenfassen. Wir setzen auf diese Art die gesamten Zusatzverluste proportional dem Quadrate der magnetisierenden Stromstärke.

Natürlich ist durch diese Darstellung der physikalisch klare Begriff des Verzögerungswinkels getrübt worden und das bleibt die unvermeidliche Schwäche der Darstellung.

Das Problem hat sich nun gegenüber demjenigen des Lufttransformators nur insofern geändert, als zu den alten Daten desselben eine neue – der Winkel ν – hinzugekommen ist, den wir daher logischerweise auch wieder als Konstante ansehen müssen. Der Hinzutritt dieser neuen Grösse, die natürlich schon in den Ausgangs-Differenzialgleichungen berücksichtigt werden muss, erschwert die analytische Behandlung des Problems ganz ausserordentlich; da aber die ganze Rechnung nur elementare algebraische Operationen erfordert, sind im folgenden aus Raum- und Zeitersparnis meist nur die Rechnungsergebnisse gegeben.

Der Uebergang zum Lufttransformator ist in jedem Momente der Rechnung und in jeder Schlussformel möglich, wenn man dort $\nu = 0$ setzt.

Ich möchte noch bemerken, dass die folgenden Grundgleichungen für den ruhenden Transformator in genau derselben Form schon vor 30 Jahren von Prof. *H. F. Weber* in seinen Züricher Vorlesungen gebraucht, aber von ihm nie veröffentlicht wurden. Weber verzichtete nur auf die graphische Darstellung im Kreisdiagramm. Die Idee aber, auch sämtliche elektrotechnischen Probleme „nur“ aus den grundlegenden Differenzialgleichungen zu entwickeln, war der Leitstern *seiner* Arbeiten.

Seine gewiss noch in grosser Zahl lebenden Schüler mögen sich mit dieser Arbeit an den verehrten verewigten Meister erinnern fühlen!

1. Entwicklung des Diagrammkreises.

Mit Rücksicht auf die Bezeichnungweise der Fig. 1 gehen die Grundgleichungen in die *Weberschen* Formen über:

$$i_1 r_1 + L_1 \frac{d}{dt} |i_1| + M \frac{d}{dt} |i_2| = e_1 \tag{1}$$

$$i_2 r_x + \lambda \frac{d}{dt} |i_2| + M \frac{d}{dt} |i_1| = 0 \tag{2}$$

wobei

$$r_x = r_2 + r_b, \quad \lambda = L_2 + L_b,$$

und r_b und L_b die Daten des Belastungskreises sind. Denn es ist:

$$i_1 r_1 + z_1 \frac{d \Phi_1}{dt} = e_1$$

$$i_2 r_x + z_2 \frac{d \Phi_2}{dt} + L_b \frac{d |i_2|}{dt} = 0$$

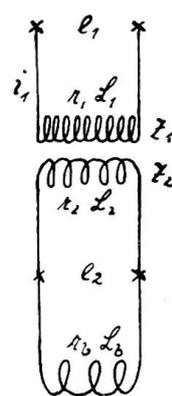


Fig. 1.

wobei z_1 und z_2 die primären und sekundären Windungszahlen, Φ_1 und Φ_2 die gesamten primären und sekundären Flüsse sind.

Ist $\Phi = \Phi'_1 + \Phi'_2$ das gemeinsame Feld im Eisen, wobei Φ'_1 und Φ'_2 die im Eisen verlaufenden Teilfelder sind, und sind Φ_{s1} und Φ_{s2} die primären und sekundären Streufelder, so ist:

$$\Phi_1 = \Phi + \Phi_{s1} = \Phi'_1 + \Phi'_2 + \Phi_{s1}; \quad \Phi_2 = \Phi + \Phi_{s2} = \Phi'_1 + \Phi'_2 + \Phi_{s2}.$$

Nun ist, wenn w der magnetische Widerstand ist:

$$\Phi_1' w = \Phi_1' \frac{l}{\mu q} = 4 \pi z_1 |i_1|; \text{ also:}$$

$$z_1 \Phi_1' = \left(4 \pi \frac{q}{l} \mu\right) z_1^2 |i_1|; \quad z_2 \Phi_1' = \left(4 \pi \frac{q}{l} \mu\right) z_1 z_2 |i_1|$$

und wenn wir dem Streufelde dieselbe magnetische Verzögerung zusprechen wie dem Nutzfelde, was natürlich nur angenähert der Fall ist:

$$\Phi_{s1} w_{s1} = \Phi_{s1} \frac{l_{s1}}{q_{s1}}; \text{ also: } z_1 \Phi_{s1} = \left(4 \pi \frac{q_{s1}}{l_{s1}}\right) z_1^2 |i_1|.$$

Ebenso ist:

$$\Phi_2' w = \Phi_2' \frac{l}{\mu q} = 4 \pi z_2 |i_2| \text{ also:}$$

$$z_1 \Phi_2' = \left(4 \pi \frac{q}{l} \mu\right) z_1 z_2 |i_2|; \quad z_2 \Phi_2' = \left(4 \pi \frac{q}{l} \mu\right) z_2^2 |i_2|$$

und $\Phi_{s2} w_{s2} = \Phi_{s2} \frac{l_{s2}}{q_{s2}}; \text{ also: } z_2 \Phi_{s2} = \left(4 \pi \frac{q_{s2}}{l_{s2}}\right) z_2^2 |i_2|.$

Wir setzen nun:

$$\left. \begin{aligned} L_1' &= \left(4 \pi \frac{q}{l} \mu\right) z_1^2; & L_2' &= \left(4 \pi \frac{q}{l} \mu\right) z_2^2; & M &= \left(4 \pi \frac{q}{l} \mu\right) z_1 z_2 \text{ oder } M^2 = L_1' L_2' \\ L_{s1} &= \left(4 \pi \frac{q_{s1}}{l_{s1}}\right) z_1^2, & & & L_{s2} &= \left(4 \pi \frac{q_{s2}}{l_{s2}}\right) z_2^2 \end{aligned} \right\} (3)$$

$$\text{ferner: } \tau_1 = \frac{L_{s1}}{L_1'}; \quad \tau_2 = \frac{L_{s2}}{L_2'}$$

$$L_1 = L_1' + L_{s1} = L_1' (1 + \tau_1); \quad L_2 = L_2' + L_{s2} = L_2' (1 + \tau_2) \quad (4)$$

$$\text{Somit: } L_1' L_2' = L_1 L_2 - (L_2 L_{s1} + L_1 L_{s2} + L_{s1} L_{s2}) = L_1 L_2 \{1 - (\tau_1 + \tau_2 + \tau_1 \tau_2)\}$$

$$\text{Endlich: } \tau = \tau_1 + \tau_2 + \tau_1 \tau_2.$$

$$\text{Daher: } L_1' L_2' = L_1 L_2 (1 - \tau) = M^2$$

$$\text{woraus: } \tau = \text{Strefaktor} = 1 - \frac{M^2}{L_1 L_2} \quad (5)$$

und der Kopplungsfaktor κ aus:

$$\kappa^2 = \frac{M^2}{L_1 L_2} = 1 - \tau.$$

Aus diesen Beziehungen, die den weiteren Entwicklungen zugrunde liegen, ergeben sich die Gleichungen (1) und (2).

Mit Einführung der Symbole für die Wechselstromgrößen d. h. mit:

$$e_1 = \mathcal{E}_1 \varepsilon^{j\omega t} = \dot{E}_1; \quad i_1 = J_1 \varepsilon^{j(\omega t - \varphi_1)} = \dot{I}_1; \quad i_2 = J_2 \varepsilon^{j(\omega t - \varphi_2)} = \dot{I}_2$$

$$\text{somit: } |i_1| = \dot{I}_1 \varepsilon^{-j2\pi n t'} = \dot{I}_1 \varepsilon^{-j\nu}; \quad |i_2| = \dot{I}_2 \varepsilon^{-j\nu}$$

$$\text{wobei: } \nu = 2 \pi n t' = \text{Verzögerungswinkel}$$

übergehen (1) und (2) in:

$$\dot{I}_1 r_1 + j \omega L_1 \dot{I}_1 \varepsilon^{-j\nu} + j \omega M \dot{I}_2 \varepsilon^{-j\nu} = \dot{E}_1 \quad (6)$$

$$\dot{I}_2 r_x + j \omega \lambda \dot{I}_2 \varepsilon^{-j\nu} + j \omega M \dot{I}_1 \varepsilon^{-j\nu} = 0. \quad (7)$$

Aus (7) folgt:
$$I_L \varepsilon^{-j\varphi_2} = - I_1 \varepsilon^{-j\varphi_1} \frac{j \omega M \varepsilon^{-j\nu}}{r_x + j \omega \lambda \varepsilon^{-j\nu}} . \tag{8}$$

Dies in (6) ergibt:

$$E_1 = I_1 \varepsilon^{-j\varphi_1} \left\{ \frac{(r_1 + j \omega L_1 \varepsilon^{-j\nu})(r_x + j \omega \lambda \varepsilon^{-j\nu}) + \omega^2 M^2 \varepsilon^{-j2\nu}}{r_x + j \omega \lambda \varepsilon^{-j\nu}} \right\} \tag{9a}$$

oder:
$$E_1 = I_1 \varepsilon^{-j\varphi_1} \frac{A + j B}{r_x + j \omega \lambda \varepsilon^{-j\nu}} \tag{9}$$

mit

$$\left. \begin{aligned} A &= r_1 r_x + \omega (r_x L_1 + r_1 \lambda) \sin \nu - \omega^2 L_1 L_2 \left(\tau + \frac{L_b}{L_2} \right) \cos 2 \nu \\ B &= \omega (r_x L_1 + r_1 \lambda) \cos \nu + \omega^2 L_1 L_2 \left(\tau + \frac{L_b}{L_2} \right) \sin 2 \nu . \end{aligned} \right\} \tag{10}$$

Aus (9) ergibt sich die primäre Stromstärke I_1 . i_1 ist ein Vektor, also im allgemeinen eine schräge Linie in der komplexen Ebene.

$$i_1 = I_1 \varepsilon^{-j\varphi_1} = I_1 \cos \varphi_1 - j I_1 \sin \varphi_1 = y - j x$$

Dies in (9) ergibt:

$$E_1 (r_x + j \omega \lambda \varepsilon^{-j\nu}) = (y - j x) (A + j B) .$$

Somit:
$$E_1 (r_x + \omega \lambda \sin \nu) = y A + x B \tag{11}$$

$$E_1 \omega \lambda \cos \nu = y B - x A . \tag{12}$$

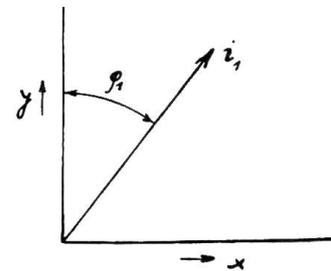


Fig. 2.

Hebt man in A und B [Gleichung (10)] $\omega^2 L_1 L_2$ zum Faktor heraus, so wird

$$A = \omega^2 L_1 L_2 \left\{ \frac{r_1}{\omega L_1} \frac{r_x}{\omega L_2} + \sin \nu \left(\frac{r_x}{\omega L_2} + \frac{r_1}{\omega L_1} \frac{\lambda}{L_2} \right) - \left(\tau + \frac{L_b}{L_2} \right) \cos 2 \nu \right\}$$

$$B = \omega^2 L_1 L_2 \left\{ \left(\frac{r_x}{\omega L_2} + \frac{r_1}{\omega L_1} \frac{\lambda}{L_2} \right) \cos \nu + \left(\tau + \frac{L_b}{L_2} \right) \sin 2 \nu \right\} .$$

Dabei ist:
$$\frac{r_1}{\omega L_1} \frac{\lambda}{L_2} = \frac{r_1}{\omega L_1} \frac{L_2 + L_b}{L_2} = \frac{r_1}{\omega L_1} \left(1 + \frac{L_b}{L_2} \right) .$$

Es wird daher:

$$\left. \begin{aligned} \frac{E_1}{\omega^2 L_1 L_2} (r_x + \omega \lambda \sin \nu) &= y \left\{ \frac{r_1}{\omega L_1} \frac{r_x}{\omega L_2} + \left[\frac{r_x}{\omega L_2} + \frac{r_1}{\omega L_1} \left(1 + \frac{L_b}{L_2} \right) \right] \sin \nu - \right. \\ &\quad \left. - \left(\tau + \frac{L_b}{L_2} \right) \cos 2 \nu \right\} + \\ &\quad + x \left\{ \left[\frac{r_x}{\omega L_2} + \frac{r_1}{\omega L_1} \left(1 + \frac{L_b}{L_2} \right) \right] \cos \nu + \left(\tau + \frac{L_b}{L_2} \right) \sin 2 \nu \right\} \end{aligned} \right\} \tag{11a}$$

$$\begin{aligned} \frac{E_1}{\omega^2 L_1 L_2} \omega \lambda \cos \nu &= y \left\{ \left[\frac{r_x}{\omega L_2} + \frac{r_1}{\omega L_1} \left(1 + \frac{L_b}{L_2} \right) \right] \cos \nu + \left(\tau + \frac{L_b}{L_2} \right) \sin 2 \nu \right\} - \\ &\quad - x \left\{ \frac{r_1}{\omega L_1} \frac{r_x}{\omega L_2} + \left[\frac{r_x}{\omega L_2} + \frac{r_1}{\omega L_1} \left(1 + \frac{L_b}{L_2} \right) \right] \sin \nu - \left(\tau + \frac{L_b}{L_2} \right) \cos 2 \nu \right\} \end{aligned} \tag{12a}$$

Setzen wir die Verhältniszahlen:

$$\frac{r_1}{\omega L_1} = \zeta_1; \quad \frac{r_x}{\omega L_2} = \zeta_x; \quad \frac{r_2}{\omega L_2} = \zeta_2. \quad (13)$$

Dann ist
$$\zeta_x = \frac{r_2 + r_b}{\omega L_2} = \zeta_2 + \frac{r_b}{\omega L_2} \frac{\omega L_b}{\omega L_b} = \zeta_2 + \frac{r_b}{\omega L_b} \frac{L_b}{L_2}.$$

Die Tangente des Phasenwinkels φ im äusseren Stromkreis, der die Belastung charakterisiert, ist:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L_b}{r_b} \quad \text{somit} \quad \frac{r_b}{\omega L_b} = \operatorname{cotg} \varphi,$$

und setzen wir:
$$\frac{L_b}{L_2} = \sigma \quad (14)$$

so gehen die Gleichungen (11a) und (12a) über in:

$$\left. \begin{aligned} \frac{E_1}{\omega L_1} \{ \zeta_2 + \sigma \operatorname{cotg} \varphi + (1 + \sigma) \sin \nu \} &= y \{ \zeta_1 (\zeta_2 + \sigma \operatorname{cotg} \varphi) + \\ &+ [\zeta_2 + \sigma \operatorname{cotg} \varphi + \zeta_1 (1 + \sigma)] \sin \nu - (\tau + \sigma) \cos 2 \nu \} + \\ &+ x \{ [\zeta_2 + \sigma \operatorname{cotg} \varphi + \zeta_1 (1 + \sigma)] \cos \nu + (\tau + \sigma) \sin 2 \nu \}. \end{aligned} \right\} \quad (11b)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{E_1}{\omega L_1} (1 + \sigma) \cos \nu &= y \{ [\zeta_2 + \sigma \operatorname{cotg} \varphi + \zeta_1 (1 + \sigma)] \cos \nu + (\tau + \sigma) \sin 2 \nu \} - \\ &- x \{ \zeta_1 (\zeta_2 + \sigma \operatorname{cotg} \varphi) + [\zeta_2 + \sigma \operatorname{cotg} \varphi + \zeta_1 (1 + \sigma)] \sin \nu - (\tau + \sigma) \cos 2 \nu \}. \end{aligned} \right\} \quad (12b)$$

Setzt man einen bestimmten unveränderlichen Phasenwinkel φ voraus, so sind in diesen Gleichungen y und x die Koordinaten des Endpunktes des Vektors der primären Stromstärke, nur von einer einzigen Variablen, nämlich $\sigma = \frac{L_b}{L_2}$, variabel wegen L_b , bestimmt.

Eliminiert man dieses σ aus den beiden letzten Gleichungen, so ergibt eine sehr mühsame und langwierige Rechnung die Gleichung:

$$(y - \eta)^2 + (x - \xi)^2 = \varrho^2 \quad (15)$$

wobei

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \frac{1}{2} \frac{E_1}{\omega L_1} \frac{\cos \nu \{ 2 \zeta_1 - \operatorname{tg} \varphi (1 + 2 \zeta_1 \zeta_2 - \tau) - 2 \sin \nu (\zeta_2 \operatorname{tg} \varphi - \tau) \}}{\cos \nu \{ \zeta_1^2 + \tau - \operatorname{tg} \varphi (\zeta_1 - \zeta_1 \tau + \zeta_2 + \zeta_1^2 \zeta_2) - 2 \zeta_1 \sin \nu (\zeta_2 \operatorname{tg} \varphi - \tau) \}} \\ \xi &= \frac{1}{2} \frac{E_1}{\omega L_1} \frac{\cos^2 \nu (1 + \tau - 2 \zeta_2 \operatorname{tg} \varphi) + \sin \nu (1 - \tau) (\sin \nu + \operatorname{tg} \varphi)}{\cos \nu \{ \zeta_1^2 + \tau - \operatorname{tg} \varphi (\zeta_1 - \zeta_1 \tau + \zeta_2 + \zeta_1^2 \zeta_2) - 2 \zeta_1 \sin \nu (\zeta_2 \operatorname{tg} \varphi - \tau) \}} \\ \varrho &= \frac{1}{2} \frac{E_1}{\omega L_1} \frac{(1 - \tau) \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi + 2 \sin \nu \operatorname{tg} \varphi}}{\cos \nu \{ \zeta_1^2 + \tau - \operatorname{tg} \varphi (\zeta_1 - \zeta_1 \tau + \zeta_2 + \zeta_1^2 \zeta_2) - 2 \zeta_1 \sin \nu (\zeta_2 \operatorname{tg} \varphi - \tau) \}} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

D. h.: der Endpunkt des primären Stromvektors bewegt sich auf einem Kreise vom Radius ϱ und den Mittelpunktskoordinaten η und ξ .

Wie ersichtlich, ist dieser Kreis vom Phasenwinkel φ abhängig, also für jeden anderen Winkel ein anderer.

Es soll nun im folgenden zunächst nur die „induktionsfreie“ Belastung untersucht werden, also der Fall

$$\varphi = 0.$$

Dann gehen die Gleichungen (16) über in:

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \frac{1}{2} \frac{E_1}{\omega L_1} \frac{2 \zeta_1 \cos \nu + \tau \sin 2 \nu}{\cos \nu \{\zeta_1^2 + \tau (1 + 2 \zeta_1 \sin \nu)\}} \\ \xi &= \frac{1}{2} \frac{E_1}{\omega L_1} \frac{1 + \tau \cos 2 \nu}{\cos \nu \{\zeta_1^2 + \tau (1 + 2 \zeta_1 \sin \nu)\}} \\ \varrho &= \frac{1}{2} \frac{E_1}{\omega L_1} \frac{1 - \tau}{\cos \nu \{\zeta_1^2 + \tau (1 + 2 \zeta_1 \sin \nu)\}} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Der Mittelpunkt des Kreises vom Radius ϱ hat also die Koordinaten η und ξ . Er liegt also auf einer Geraden, die durch das Koordinatenzentrum geht und um einen Winkel γ gegen die Horizontale geneigt ist.

Hierbei ist
$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\eta}{\xi} = \frac{2 \zeta_1 \cos \nu + \tau \sin 2 \nu}{1 + \tau \cos 2 \nu}. \quad (18)$$

Ferner gehen, wegen:

$$L_b = 0; \quad \text{somit } \lambda = L_2$$

die Gleichungen (10) über in:

$$\left. \begin{aligned} A &= \omega^2 L_1 L_2 \{ \zeta_1 \zeta_x + (\zeta_x + \zeta_1) \sin \nu - \tau \cos 2 \nu \} \\ B &= \omega^2 L_1 L_2 \{ \zeta_x + \zeta_1 \} \cos \nu + \tau \sin 2 \nu \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

und die Gleichung (9) in

$$E_1 = I_1 \varepsilon^{-j \varphi_1} \frac{A + j B}{r_x + j \omega L_2 \varepsilon^{-j \nu}}$$

somit:
$$I_1 \varepsilon^{-j \varphi_1} = E_1 \frac{r_x + \omega L_2 \sin \nu + j \omega L_2 \cos \nu}{A + j B} = E_1 \frac{\omega L_2 (\zeta_x + \sin \nu + j \cos \nu)}{A + j B}$$

oder:
$$I_1 \varepsilon^{-j \varphi_1} = E_1 \frac{\omega L_2 \sqrt{1 + \zeta_x^2 + 2 \zeta_x \sin \nu}}{\sqrt{A^2 + B^2}} \varepsilon^{j \left\{ \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\cos \nu}{\zeta_x + \sin \nu} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{B}{A} \right\}} \quad (20a)$$

oder:
$$I_1 = \frac{E_1}{\omega L_1} \sqrt{\frac{1 + \zeta_x^2 + 2 \zeta_x \sin \nu}{\zeta_1^2 \zeta_x^2 + (\zeta_1 + \zeta_x)^2 + \tau^2 - 2 \zeta_1 \zeta_x \tau \cos 2 \nu + 2 (\zeta_1 + \zeta_x) (\zeta_1 \zeta_x + \tau) \sin \nu}} \quad (20)$$

und:
$$\varphi_1 = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{B}{A} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\cos \nu}{\zeta_x + \sin \nu} \quad (20b)$$

somit:
$$\cos \varphi_1 = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \frac{\zeta_x + \sin \nu}{\sqrt{1 + \zeta_x^2 + 2 \zeta_x \sin \nu}} + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \frac{\cos \nu}{\sqrt{1 + \zeta_x^2 + 2 \zeta_x \sin \nu}} \quad (21)$$

und:
$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\cos \nu (\tau + \zeta_x^2 + 2 \zeta_x \tau \sin \nu)}{\zeta_1 + \zeta_x - \zeta_x (\tau \cos 2 \nu - \zeta_1 \zeta_x) + \sin \nu (\tau + \zeta_x^2 + 2 \zeta_1 \zeta_x)}. \quad (21a)$$

Der Leerlaufstrom I_0 ergibt sich aus (20) für $\zeta_x = \infty$ mit:

$$I_0 = \frac{E_1}{\omega L_1} \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta_1^2 + 2 \zeta_1 \sin \nu}} \quad (22)$$

seine Phase aus (21a) mit

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{\cos \nu}{\zeta_1 + \sin \nu} \quad (23)$$

Der Kurzschlussstrom I_k ergibt sich aus (20) für:

$$r_b = 0, \text{ d. h. für } \zeta_x = \zeta_2 = \frac{r_2}{\omega L_2} \quad \text{mit:}$$

$$I_k = \frac{E_1}{\omega L_1} \sqrt{\frac{1 + \zeta_2^2 + 2 \zeta_2 \sin \nu}{\zeta_1^2 \zeta_2^2 + (\zeta_1 + \zeta_2)^2 + \tau^2 - 2 \zeta_1 \zeta_2 \tau \cos 2 \nu + 2 (\zeta_1 + \zeta_2) (\zeta_1 \zeta_2 + \tau) \sin \nu}} \quad (24)$$

seine Phase aus (21a) mit

$$\operatorname{tg} \varphi_k = \frac{\cos \nu (\tau + \zeta_2^2 + 2 \zeta_2 \tau \sin \nu)}{\zeta_1 + \zeta_2 - \zeta_2 (\tau \cos 2 \nu - \zeta_1 \zeta_2) + \sin \nu (\tau + \zeta_2^2 + 2 \zeta_1 \zeta_2)}. \quad (25)$$

Das Streben dieser ganzen Darstellung geht nun dahin, aus den sechs leicht zu messenden Grössen: I_0 , φ_0 , I_k , φ_k , r_1 und r_2 das Diagramm und aus diesem das Verhalten des Transformators in allen Betriebszuständen zu kennzeichnen.

Wir brauchen also zunächst ϱ , den Radius des Kreises und hierfür aus (17) die Grössen: L_1 , ν und τ .

Aus (22) und (23) ergeben sich nun leicht die Grössen L_1 und ν mit:

$$\omega L_1 = \frac{\sqrt{E_1^2 + r_1^2 I_0^2 - 2 r_1 E_1 I_0 \cos \varphi_0}}{I_0} \quad (26)$$

$$\cos \nu = \frac{E_1 \sin \varphi_0}{\sqrt{E_1^2 + r_1^2 I_0^2 - 2 E_1 I_0 r_1 \cos \varphi_0}}. \quad (27)$$

Aus (22) ergibt sich nun auch für $\zeta_1 = 0$; d. h. $r_1 = 0$; der ideelle Leerlaufstrom I_{0i} mit:

$$I_{0i} = \frac{E_1}{\omega L_1}. \quad (28)$$

Nun fragen wir nach τ dem Streukoeffizienten. Dieser ergibt sich aber aus Gleichung (15) auf folgende Art: wenn wir dort y und x je für Kurzschluss und Leerlauf ausdrücken. Es gilt für den Kurzschlussstrom:

$$(I_k \cos \varphi_k - \eta)^2 + (I_k \sin \varphi_k - \xi)^2 = \varrho^2$$

und für den Leerlaufstrom:

$$(I_0 \cos \varphi_0 - \eta)^2 + (I_0 \sin \varphi_0 - \xi)^2 = \varrho^2.$$

Die beiden Gleichungen subtrahiert, ergibt:

$$I_k^2 - I_0^2 - 2 \eta (I_k \cos \varphi_k - I_0 \cos \varphi_0) - 2 \xi (I_k \sin \varphi_k - I_0 \sin \varphi_0) = 0$$

und für η und ξ aus (17) die Werte eingeführt, ergibt:

$$I_k^2 - I_0^2 - \frac{E_1}{\omega L_1} \frac{2 \zeta_1 \cos \nu + \tau \sin 2 \nu}{\cos \nu \{\zeta_1^2 + \tau (1 + 2 \zeta_1 \sin \nu)\}} (I_k \cos \varphi_k - I_0 \cos \varphi_0) - \frac{E_1}{\omega L_1} \frac{1 + \tau \cos 2 \nu}{\cos \nu \{\zeta_1^2 + \tau (1 + 2 \zeta_1 \sin \nu)\}} (I_k \sin \varphi_k - I_0 \sin \varphi_0) = 0$$

Setzt man hier für $\frac{E_1}{\omega L_1}$ den Wert I_{0i} ein und berechnet nun das τ , so ergibt sich dieses mit:

$$\tau = \frac{\zeta_1^2 \frac{I_k^2 - I_0^2}{I_{0i}} \cos \nu - 2 \zeta_1 \cos \nu (I_k \cos \varphi_k - I_0 \cos \varphi_0) - (I_k \sin \varphi_k - I_0 \sin \varphi_0)}{\sin 2 \nu (I_k \cos \varphi_k - I_0 \cos \varphi_0) + \cos 2 \nu (I_k \sin \varphi_k - I_0 \sin \varphi_0) - \frac{I_k^2 - I_0^2}{I_{0i}} (\zeta_1 \sin 2 \nu + \cos \nu)} \quad (29)$$

wird:

$$I_2 \varepsilon^{-j\varphi_2} = + I_1 \varepsilon^{-j\varphi_1} \frac{\omega M \varepsilon^{-j\left(\frac{\pi}{2} + \nu\right)}}{\sqrt{r_x^2 + \omega^2 L_2^2 + 2 r_x \omega L_2 \sin \nu}} \varepsilon^{-j \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\omega L_2 \cos \nu}{r_x + \omega L_2 \sin \nu}}$$

oder:

$$I_2 \varepsilon^{-j\varphi_2} = I_1 \frac{M}{L_2} \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta_x^2 + 2 \zeta_x \sin \nu}} \varepsilon^{-j\left(\varphi_1 + \frac{\pi}{2} + \nu + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\cos \nu}{\zeta_x + \sin \nu}\right)}. \tag{33}$$

Es ist also: $\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{2} + \nu + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\cos \nu}{\zeta_x + \sin \nu}$ (33a)

Für den Punkt unendlicher Drehzahl wird $\zeta_x = 0$, daher

$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\cos \nu}{\zeta_x + \sin \nu} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} (\operatorname{cotg} \nu) = \frac{\pi}{2} - \nu$$

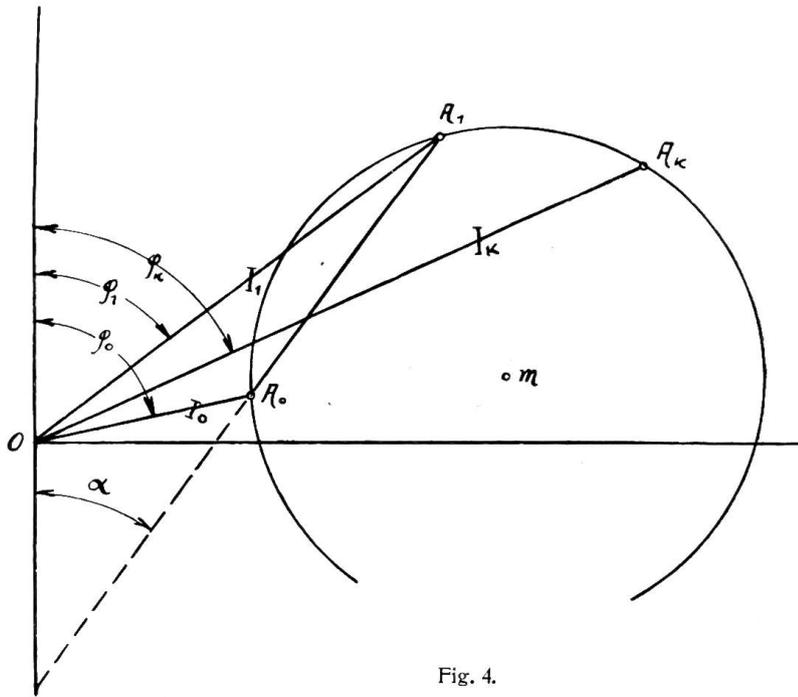


Fig. 4.

und somit:

$$\varphi_{2\infty} = \varphi_{1\infty} + \pi. \tag{34}$$

D. h. für den vollkommenen widerstandsfreien Sekundärkreis fällt die Richtung des Sekundärstromes in die entgegengesetzte des Primärstromes. Nun müssen wir uns die Bedeutung der Strecke $A_0 A_1$ im Diagramm klar machen.

Aus Dreieck: $O A_0 A_1$ ist:

$$\overline{A_0 A_1}^2 = I_1^2 + I_0^2 - 2 I_0 I_1 \cos (\varphi_0 - \varphi_1).$$

Die Einsetzung der Werte ergibt nach einer mühsamen Rechnung, die hier, weil ganz elementar, nicht wiedergegeben wird

$$\overline{A_0 A_1}^2 = E_1^2 \frac{\omega^4 L_1^2 L_2^2 (1 - \tau)^2}{\omega^2 L_1^2 (A^2 + B^2) (1 + \zeta_1^2 + 2 \zeta_1 \sin \nu)} = E_1^2 \frac{\omega^2 L_2^2 (1 - \tau)^2}{(A^2 + B^2) (1 + \zeta_1^2 + 2 \zeta_1 \sin \nu)},$$

wobei A und B durch (19), Seite 139, gegeben sind. Nun war aber nach Gleichung (20a), Seite 139

$$I_1^2 = E_1^2 \frac{\omega^2 L_2^2}{A^2 + B^2} (1 + \zeta_x^2 + 2 \zeta_x \sin \nu)$$

somit ist: $\overline{A_0 A_1}^2 = I_1^2 \frac{1}{1 + \zeta_x^2 + 2 \zeta_x \sin \nu} \frac{(1 - \tau)^2}{1 + \zeta_1^2 + 2 \zeta_1 \sin \nu}$.

Ferner ist nach (33)

$$I_1^2 = \frac{L_2^2}{M^2} (1 + \zeta_x^2 + 2 \zeta_x \sin \nu) I_2^2$$

somit:
$$\overline{A_0 A_1}^2 = I_2^2 \frac{L_2^2}{M^2} \frac{(1 - \tau)^2}{1 + \zeta_1^2 + 2 \zeta_1 \sin \nu}$$

und wegen:
$$1 - \tau = \frac{M^2}{L_1 L_2}$$

ist:
$$\overline{A_0 A_1}^2 = I_2^2 \frac{M^2}{L_1^2} \frac{1}{1 + \zeta_1^2 + 2 \zeta_1 \sin \nu}$$

oder:
$$I_2 = \overline{A_0 A_1} \frac{L_1}{M} \sqrt{1 + \zeta_1^2 + 2 \zeta_1 \sin \nu} \quad (35)$$

Die Strecke $\overline{A_0 A_1}$ ist somit dem Sekundärstrom proportional und kann als sein Mass gelten. Sie misst den Sekundärstrom im Masstab des Primärstromes, ist also der, auf den Primärkreis reduzierte Sekundärstrom.

Um daraus den Sekundärstrom selbst zu erhalten, hat man also mit dem Proportionalitätsfaktor $\frac{L_1}{M} \sqrt{1 + \zeta_1^2 + 2 \zeta_1 \sin \nu}$ zu multiplizieren.

In diesem kennen wir nur das M noch nicht. Dieses ergibt sich aber mit Hilfe von Gleichung (25) wenn wir diese nach ζ_2 auflösen. Es ist hiernach:

$$\zeta_2 = \frac{\tau \sin 2\nu - \operatorname{tg} \varphi_k (1 - \tau \cos 2\nu + 2 \zeta_1 \sin \nu) + \sqrt{\operatorname{tg}^2 \varphi_k (1 - 2\tau + \tau^2 \cos^2 2\nu - 4 \zeta_1 \cos^2 \nu (\zeta_1 + 2\tau \sin \nu)) + 4 \operatorname{tg} \varphi_k \tau \cos \nu \cos 2\nu (\zeta_1 + \tau \sin \nu) + \tau^2 \sin^2 2\nu}}{2 \operatorname{tg} \varphi_k (\zeta_1 + \sin \nu)} \quad (36)$$

und somit:
$$L_2 = \frac{r_2}{\omega \zeta_2} \quad \text{und} \quad M^2 = L_1 L_2 (1 - \tau). \quad (37)$$

Damit sind alle Grössen bestimmt, die zur Berechnung des Sekundärstromes aus dem Diagramm nötig sind.

Es sei betont, dass die Beziehung, welche Gleichung (35) ausdrückt, eine vollkommen exakte ist, da keinerlei Vernachlässigungen darin vorkommen.

Es ist also die Strecke $\overline{A_0 A_1}$ ihrer Länge nach ein „exaktes“ Mass für den, auf den Primärkreis reduzierten Sekundärstrom. Wir fragen nun weiter, ob die Lage von $\overline{A_0 A_1}$ allgemein die richtige sekundäre Stromphase ergibt. Die Gerade $\overline{A_0 A_1}$ ist unter dem Winkel α gegen die Richtung $O E_1$ geneigt: und es ist:

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{I_1 \cos \varphi_1 - I_0 \cos \varphi_0}{I_1 \sin \varphi_1 - I_0 \sin \varphi_0}.$$

Setzt man die Werte ein, so ergibt die Rechnung ohne jede Vernachlässigung:

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{(1 - \tau) \{ \zeta_1 (1 + \tau) + \sin \nu (\tau + \zeta_1^2 + 2 \zeta_1 \zeta_x) + \zeta_x (1 - \zeta_1^2 \cos 2\nu) \}}{(1 - \tau) \cos \nu \{ \tau - \zeta_1^2 - 2 \zeta_1 \zeta_x (1 + \zeta_1 \sin \nu) \}}. \quad (38)$$

Für den Winkel φ_2 aber fanden wir in Gleichung (33a) den Wert

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{2} + \nu + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\cos \nu}{\zeta_x + \sin \nu}.$$

Setzt man:
$$\varphi_1 + \frac{\pi}{2} + \nu = \delta \quad (38a)$$

so wird:
$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{(\zeta_x + \sin \nu) \operatorname{tg} \delta + \cos \nu}{\zeta_x + \sin \nu - \cos \nu \operatorname{tg} \delta}.$$

Nach (38a) ist:

$$\operatorname{tg} \delta = -\operatorname{cotg}(\varphi_1 + \nu) = -\frac{\operatorname{cotg} \varphi_1 \operatorname{cotg} \nu - 1}{\operatorname{cotg} \varphi_1 + \operatorname{cotg} \nu}.$$

Nach (20b) aber ist:

$$\operatorname{cotg} \varphi_1 = \frac{A(\xi_x + \sin \nu) + B \cos \nu}{B(\xi_x + \sin \nu) - A \cos \nu}$$

somit:

$$\operatorname{tg} \delta = -\frac{\operatorname{cotg} \nu \{A(\xi_x + \sin \nu) + B \cos \nu\} - \{B(\xi_x + \sin \nu) - A \cos \nu\}}{\operatorname{cotg} \nu \{B(\xi_x + \sin \nu) - A \cos \nu\} + \{A(\xi_x + \sin \nu) + B \cos \nu\}}.$$

Nach Einsetzen der Werte für A und B aus (19) ergibt die mühsame Rechnung „ohne jede Vernachlässigung“

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{\cos \nu (\tau - \xi_1 \xi_x)}{\xi_1 + \xi_x + \sin \nu (\tau + \xi_1 \xi_x)}. \tag{39}$$

Nach (38) ist:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\cos \{\tau - \xi_1^2 - 2 \xi_1 \xi_x (1 + \xi_1 \sin \nu)\}}{\xi_1 (1 + \tau) + \sin \nu (\tau + \xi_1^2 + 2 \xi_1 \xi_x) + \xi_x (1 - \xi_1^2 \cos 2 \nu)}. \tag{39a}$$

Die Gleichungen (39) und (39a) beweisen, dass die „Lage“ von $A_0 A_1$ mit der sekundären Stromphase nichts gemein hat.

Wir wollen nun die Abweichung der beiden Richtungen untersuchen, indem wir die Grösse $\operatorname{tg}(\varphi_2 - \alpha)$ berechnen. Auch hier führt eine mühsame und langwierige Rechnung zu einem einfachen Ergebnis. Es ist:

$$\operatorname{tg}(\varphi_2 - \alpha) =$$

$$\frac{\xi_1 \cos \nu \{\xi_1^2 + \tau^2 + 2 \xi_1 \tau \sin \nu + \xi_x^2 (1 + \xi_1^2 + 2 \xi_1 \sin \nu) + 2 \xi_x (\xi_1 + \xi_1^2 \sin \nu + \tau \sin \nu - \xi_1 \tau \cos 2 \nu)\}}{(1 + \xi_1 \sin \nu) \{\xi_1^2 + \tau^2 + 2 \xi_1 \tau \sin \nu + \xi_x^2 (1 + \xi_1^2 + 2 \xi_1 \sin \nu) + 2 \xi_x (\xi_1 + \xi_1^2 \sin \nu + \tau \sin \nu - \xi_1 \tau \cos 2 \nu)\}}$$

$$\text{oder:} \quad \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg}(\varphi_2 - \alpha) = \frac{\xi_1 \cos \nu}{1 + \xi_1 \sin \nu}. \tag{40}$$

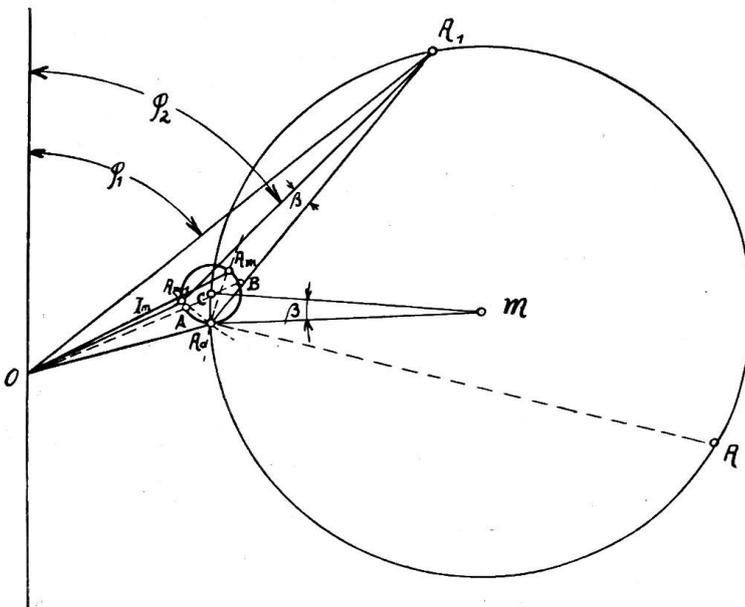


Fig. 5.

Aus Gleichung (40) ergibt sich das bemerkenswerte Resultat, dass der Phasenfehler ein „konstanter“ (unabhängig von der Belastung) ist. Ferner, dass der Fehler an und für sich klein, und für den Transformator mit Eisen kleiner ist, als für den ruhenden Lufttransformator, für den ja $\nu = 0$ ist.

Wir fragen nun nach dem Differenzstrom $I_1 - I_2'$ (wenn $I_2' = \bar{A}_0 \bar{A}_1$ = den auf den Primärkreis reduzierten Sekundärstrom bezeichnet), den wir mit I_m bezeichnen wollen, da er die resultierenden Amperewindungen schafft.

I_1 ist im Diagramm einwandfrei nach Grösse und Richtung gegeben.

I_2' sahen wir soeben, ist durch $A_0 A_1$, nur der Grösse nach, nicht aber der Richtung nach gegeben. Um die wahre Richtung zu erhalten, haben wir die Linie $A_0 A_1$

mit dem Drehpunkte A_1 um den Winkel $\varphi_2 - \alpha = \beta$ nach links zu drehen und erhalten so den Punkt A_{m1} und in $OA_{m1} = I_{m1}$ den jeweiligen Differenzstrom.

Die Lage des Endpunktes A_m , dieses Differenzstromes I_m , ist nun leicht zu bestimmen. Wenn man die Art der Konstruktionsbedingungen für A_m berücksichtigt, so ergibt sich, dass A_m auf einem Kreise wandert, der durch A_0 geht und dessen Mittelpunkt C auf folgende einfache Art gefunden wird:

Man ziehe A_0M , in M ziehe man einen Strahl, der mit A_0M den Winkel β einschliesst, dann ist der Schnittpunkt C dieses Strahles mit dem Diagrammkreis der Mittelpunkt des Kreises auf dem A_m wandert und CA_0 sein Radius.

Will man für einen ganz beliebigen Belastungszustand, charakterisiert durch die Lage A , den Differenzstrom kennen, so hat man AA_0 zu ziehen, dieses in den Zirkel zu nehmen, in A einzusetzen und damit den kleinen Kreis im Punkte A_m zu durchschneiden. Dann ist OA_m , der, der Lage A entsprechende Differenzstrom.

Das bekannte Stromdreieck OA_0A mit einer „konstanten“ Seite OA_0 existiert also in Wahrheit nicht. Es existiert ein Stromdreieck OA_mA , dessen drei Seiten sich von einem Belastungszustand zum anderen ändern, wobei die Punkte A_m und A auf Kreisen wandern.

Der Radius ϱ_1 des kleinen Kreises ergibt sich rechnerisch leicht aus der Figur.

$$\text{Es ist:} \quad \varrho_1 = 2 \varrho \sin \frac{\varphi_2 - \alpha}{2} = 2 \varrho \sin \frac{\beta}{2}$$

$$\text{und da nach (40):} \quad \cos \beta = \frac{1 + \zeta_1 \sin \nu}{\sqrt{1 + \zeta_1^2 + 2 \zeta_1 \sin \nu}}$$

$$\text{ferner:} \quad \text{tg} \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \beta}{1 + \cos \beta}}$$

$$\text{alsoq:} \quad \sin \frac{\beta}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \cos \beta} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\sqrt{1 + \zeta_1^2 + 2 \zeta_1 \sin \nu} - (1 + \zeta_1 \sin \nu)}{\sqrt{1 + \zeta_1^2 + 2 \zeta_1 \sin \nu}}}$$

$$\text{so ist:} \quad \varrho_1 = \varrho \sqrt{2} \sqrt{\frac{\sqrt{1 + \zeta_1^2 + 2 \zeta_1 \sin \nu} - (1 + \zeta_1 \sin \nu)}{\sqrt{1 + \zeta_1^2 + 2 \zeta_1 \sin \nu}}} \quad (41)$$

oder wenn wir, des kleinen Wertes von $\zeta_1 = \frac{r_1}{\omega L_1}$ wegen, die Wurzel binomisch entwickeln, folgt:

$$\varrho_1 \approx \varrho \frac{\zeta_1}{\sqrt{1 + \frac{\zeta_1^2}{2} + \zeta_1 \sin \nu}} \quad (41b)$$

Für den ruhenden Lufttransformator folgt aus Gleichung (41) wegen $\nu = 0$

$$\varrho_1 = \varrho \sqrt{2} \sqrt{\frac{\sqrt{1 + \zeta_1^2} - 1}{\sqrt{1 + \zeta_1^2}}}$$

$$\text{und aus (41b)} \quad \varrho_1 \approx \varrho \frac{\zeta_1}{\sqrt{1 + \frac{\zeta_1^2}{2}}}$$

Der Radius des kleinen Kreises ist also vor allem von ζ_1 abhängig.

Der Strahl OC gibt nun auf dem kleinen Kreise die Punkte des minimalen und des maximalen Differenzstromes an. OA ist der minimale, OB der maximale

Differenzstrom. Diese beiden Ströme unterscheiden sich in der Grösse um den Durchmesser des kleinen Kreises, der ja im Amperemasstab seine bestimmte Wertigkeit hat.

Der Magnetisierungsstrom ergibt sich der Grösse nach aus:

$$I_m^2 = I_1^2 + I_2'^2 - 2 I_1 I_2' \cos(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Der Wert von $\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$ ergibt sich mit:

$$\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{1 + \zeta_x \sin \nu}{\sqrt{1 + \zeta_x^2 + 2 \zeta_x \sin \nu}}$$

oder:

$$I_m^2 = I_1^2 \left\{ 1 + \left(\frac{I_2'}{I_1} \right)^2 - 2 \frac{I_2'}{I_1} \frac{1 + \zeta_x \sin \nu}{\sqrt{1 + \zeta_x^2 + 2 \zeta_x \sin \nu}} \right\}$$

und da nach Gleichung (35):

$$I_2' = A_0 A = I_2 \frac{M}{L_1} \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta_1^2 + 2 \zeta_1 \sin \nu}}$$

und nach (33):

$$I_2 = \frac{M}{L_2} I_1 \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta_x^2 + 2 \zeta_x \sin \nu}}$$

so folgt:

$$I_m^2 = I_1^2 \left\{ 1 + \frac{M^4}{L_1^2 L_2^2} \frac{1}{(1 + \zeta_1^2 + 2 \zeta_1 \sin \nu)} \frac{1}{(1 + \zeta_x^2 + 2 \zeta_x \sin \nu)} - 2 \frac{M^2}{L_1 L_2} \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta_1^2 + 2 \zeta_1 \sin \nu}} \cdot \frac{1 + \zeta_x \sin \nu}{1 + \zeta_x + 2 \zeta_x \sin \nu} \right\}$$

und führen wir ein:

$$\frac{M^2}{L_1 L_2} = 1 - \tau \text{ und setzen: } \begin{aligned} \sqrt{1 + \zeta_1^2 + 2 \zeta_1 \sin \nu} &= n_1 \\ \sqrt{1 + \zeta_x^2 + 2 \zeta_x \sin \nu} &= n_x \end{aligned}$$

so wird:

$$I_m^2 = I_1^2 \left\{ \frac{n_1^2 n_x^2 + (1 - \tau)^2 - 2(1 - \tau)(1 + \zeta_x \sin \nu) n_1}{n_1^2 n_x^2} \right\}$$

Führt man aus Gleichung (20) den Wert für I_1^2 ein und setzt in Gleichung (20) den Nenner unter der Wurzel gleich N_x^2 , so wird:

$$I_1^2 = \frac{E_1^2}{\omega^2 L_1^2} \frac{n_x^2}{N_x^2} \quad \text{und daher:}$$

$$I_m^2 = \frac{E_1^2}{\omega^2 L_1^2} \frac{1}{n_1^2} \frac{n_1^2 n_x^2 + (1 - \tau)^2 - 2(1 - \tau)(1 + \zeta_x \sin \nu) n_1}{N_x^2}.$$

Mit Rücksicht auf die Grössenordnung von ζ_1 entwickeln wir n_1 binomisch und erhalten:

$$n_1 = 1 + \frac{\zeta_1^2}{2} + \zeta_1 \sin \nu.$$

Setzt man hier die Werte für die n und N_x ein, so ergibt sich:

$$I_m^2 = \frac{E_1^2}{\omega^2 L_1^2} \frac{1}{n_1^2} \left(\frac{\tau^2 + \zeta_x^2 + \zeta_1^2 \zeta_x^2 + 2 \zeta_1 \tau \sin \nu + 2 \zeta_x \tau \sin \nu + 2 \zeta_1 \zeta_x^2 \sin \nu + 2 \zeta_1^2 \zeta_x \sin \nu + \zeta_1^2 \tau + \zeta_1^2 \zeta_x \tau \sin \nu + 2 \zeta_1 \zeta_x \tau \sin^2 \nu + 2 \zeta_1 \zeta_x \sin^2 \nu - \zeta_1^2 \zeta_x \sin \nu}{\tau^2 + \zeta_x^2 + \zeta_1^2 \zeta_x^2 + 2(\zeta_1 + \zeta_x)(\zeta_1 \zeta_x + \tau) \sin \nu + \{\zeta_1^2 + 2 \zeta_1 \zeta_x - 2 \zeta_1 \zeta_x \tau \cos 2 \nu\}} \right) =$$

$$= \frac{E_1^2}{\omega^2 L_1^2} \frac{1}{n_1^2} \frac{\tau^2 + \zeta_x^2 + \zeta_1^2 \zeta_x^2 + 2(\zeta_1 + \zeta_x)(\zeta_1 \zeta_x + \tau) \sin \nu + \{2 \zeta_1 \zeta_x \sin^2 \nu (1 + \tau) - \zeta_1^2 \zeta_x \sin \nu (1 - \tau) + \zeta_1^2 \tau\}}{\tau^2 + \zeta_x^2 + \zeta_1^2 \zeta_x^2 + 2(\zeta_1 + \zeta_x)(\zeta_1 \zeta_x + \tau) \sin \nu + \{\zeta_1^2 + 2 \zeta_1 \zeta_x - 2 \zeta_1 \zeta_x \tau \cos 2 \nu\}}$$

oder wegen
$$\frac{E_1^2}{\omega^2 L_1^2} \frac{1}{n_1^2} = I_0^2.$$

$$I_m^2 = I_0^2 \frac{\tau^2 + \zeta_x^2 + \zeta_1^2 \zeta_x^2 + 2(\zeta_1 + \zeta_x)(\zeta_1 \zeta_x + \tau) \sin \nu + \{2\zeta_1 \zeta_x \sin^2 \nu (1 + \tau) - \zeta_1^2 \zeta_x \sin \nu (1 - \tau) + \zeta_1^2 \tau\}}{\tau^2 + \zeta_x^2 + \zeta_1^2 \zeta_x^2 + 2(\zeta_1 + \zeta_x)(\zeta_1 \zeta_x + \tau) \sin \nu + \{\zeta_1^2 + 2\zeta_1 \zeta_x - 2\zeta_1 \zeta_x \tau \cos 2\nu\}}$$

oder:

$$I_m^2 = I_0^2 \frac{\tau^2 + \zeta_x^2 + \zeta_1^2 \zeta_x^2 + 2(\zeta_1 + \zeta_x)(\zeta_1 \zeta_x + \tau) \sin \nu + 2\zeta_1 \zeta_x \sin^2 \nu (1 + \tau) + \{\zeta_1^2 \tau - \zeta_1^2 \zeta_x \sin \nu (1 - \tau)\}}{\tau^2 + \zeta_x^2 + \zeta_1^2 \zeta_x^2 + 2(\zeta_1 + \zeta_x)(\zeta_1 \zeta_x + \tau) \sin \nu + 2\zeta_1 \zeta_x \sin^2 \nu (1 + \tau) + \{\zeta_1^2 + 2\zeta_1 \zeta_x \cos^2 \nu (1 - \tau)\}} \tag{41a}$$

Die Gleichung zeigt, wie der Differenzstrom vom Leerlaufstrom abweicht.

Nur wenn die Klammerglieder {...} in Zähler und Nenner gleich werden, ist $I_m = I_0$

also wenn: $\zeta_1^2 \tau - \zeta_1^2 \zeta_x \sin \nu (1 - \tau) = \zeta_1^2 + 2\zeta_1 \zeta_x \cos^2 \nu$

oder wenn:
$$\zeta_x = - \frac{\zeta_1^2 (1 - \tau)}{\zeta_1^2 \sin \nu (1 - \tau) + 2\zeta_1 \cos^2 \nu}.$$

D. h. für einen Punkt der Generatorzone, da ζ_x negativ.

Die Ströme OA und OB lassen sich natürlich aus dem Diagramm berechnen, doch ergeben sich so komplizierte Ausdrücke, dass sich ihre Wiedergabe nicht lohnt.

Jedenfalls nehmen wir zur Kenntnis, dass das Minimum des Differenzstromes in der Motorzone, das Maximum in der Generatorzone erreicht wird.

Nun fragen wir nach der Sekundärspannung im Diagramm.

Nach der Fig. 4 auf Seite 142 ist:

$$\overline{AA_k^2} = I_1^2 = I_k^2 - 2 I_1 I_k \cos (\varphi_k - \varphi_1) . \tag{42}$$

Führt man für I_1, I_k, φ_1 und φ_k die Werte aus (20), (21), (24) und (25) ein, so ergibt die mühsame Rechnung:

$$\overline{AA_k^2} = \frac{I_1^2 \omega^4 L_1^2 L_2^2 (1 - \tau)^2 (\zeta_x - \zeta_2)^2}{A_2^2 + B_2^2 (1 + \zeta_x^2 + 2\zeta_x \sin \nu)} \tag{42a}$$

worin A_2 und B_2 aus den Gleichungen (19) gegeben sind, wenn man in diesen für ζ_x die Grösse ζ_2 einsetzt.

Nun ist nach (33)
$$I_1^2 = I_2^2 \frac{L_2^2}{M^2} (1 + \zeta_x^2 + 2\zeta_x \sin \nu)$$

somit:
$$\overline{AA_k^2} = I_2^2 \frac{L_2^2}{M^2} \frac{1}{A_2^2 + B_2^2} (1 - \tau)^2 (\zeta_x - \zeta_2)^2 \omega^4 L_1^2 L_2^2 .$$

Nun ist:
$$\zeta_x - \zeta_2 = \frac{r_b + r_2}{\omega L_2} - \frac{r_2}{\omega L_2} = \frac{r_b}{\omega L_2}$$

und daher, wenn man für A_2 und B_2 die Werte einsetzt

$$\overline{AA_k} = I_2 r_b \frac{1}{\omega M} \frac{1 - \tau}{\sqrt{\zeta_1^2 \zeta_2^2 + (\zeta_1 + \zeta_2)^2 + \tau^2 - 2\zeta_1 \zeta_2 \tau \cos 2\nu + 2\zeta_1 \zeta_2 (\zeta_1 + \zeta_2) \sin \nu + 2(\zeta_1 + \zeta_2) \tau \sin \nu}}$$

Setzen wir:

$$N_2 = \sqrt{\zeta_1^2 \zeta_2^2 + (\zeta_1 + \zeta_2)^2 + \tau^2 - 2\zeta_1 \zeta_2 \tau \cos 2\nu + 2\zeta_1 \zeta_2 (\zeta_1 + \zeta_2) \sin \nu + 2(\zeta_1 + \zeta_2) \tau \sin \nu} .$$

Führen wir ferner ein:
$$\frac{1 - \tau}{\omega M} = \frac{K^2}{\omega M} = \frac{M^2}{L_1 L_2 \omega M} = \frac{1}{\omega L_1} \frac{M}{L_2}$$

und beachten wir, dass:
$$I_2 r_b = E_2$$

gleich der sekundären Klemmenspannung ist, so wird:

$$\overline{AA_k} = \frac{E_2}{\omega L_1} \frac{M}{L_2} \frac{1}{N_1} \quad (43)$$

D. h.: Die Strecke $\overline{AA_k}$ gibt ein Mass für die Sekundärspannung, da sie ihr proportional ist.

Es war nun nach Gleichung (24) der Kurzschlussstrom I_k

$$I_k = \frac{E_1}{\omega L_1} \frac{1}{N_2} \sqrt{1 + \zeta_2^2 + 2 \zeta_2 \sin \nu} \quad (24a)$$

Somit:
$$\frac{\overline{AA_k}}{I_k} = \frac{E_2}{E_1} \frac{M}{L_2} \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta_2^2 + 2 \zeta_2 \sin \nu}} \quad (43a)$$

Da nun nach (24a) die Strecke $\overline{OA_k} = I_k$ das natürliche Mass der Primärspannung ist, so ist

$$\overline{AA_k} = E_2 \frac{M}{L_2} \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta_2^2 + 2 \zeta_2 \sin \nu}} = E_2'$$

das natürliche Mass für die auf den Primärkreis reduzierte Sekundärspannung E_2' .

Die wahre Sekundärspannung E_2 erhalten wir also, wenn wir die Strecke $\overline{AA_k}$ mit dem Proportionalitätsfaktor

$$\frac{L_2}{M} \sqrt{1 + \zeta_2^2 + 2 \zeta_2 \sin \nu}$$

multiplizieren. Die Strecke $\overline{AA_k}$ ist dabei natürlich in Volt auszudrücken, deren Masstab durch die Beziehung: $E_1 = \overline{OA_k}$ gegeben ist.

Der Quotient der Strecken $\overline{AA_k}$ und $\overline{OA_k}$ gibt also das Verhältnis der auf den Primärkreis reduzierten Sekundärspannung zur konstanten primären Klemmenspannung.

Die sekundäre Leerlaufspannung $E_{2',0}$ ist somit durch die Strecke $A_0 A_k$ gegeben.

Der sekundäre Spannungsabfall für irgend eine Belastung ergibt sich daher mit:

$$\frac{\overline{A_0 A_k} - \overline{AA_k}}{\overline{A_0 A_k}} 100$$

in Prozenten der sekundären Leerlaufspannung.

Wir können nun auch die *Streukoeffizienten* getrennt bestimmen.

Aus (42a) folgt für $\zeta_x = \infty$, also Leerlauf:

$$\overline{A_0 A_k} = \frac{I_0}{N_2} (1 - \tau) = \frac{E_1}{\omega L_1} \frac{1}{\sqrt{1 + \zeta_1^2 + 2 \zeta_1 \sin \nu}} \frac{1}{N_2} (1 - \tau)$$

aus (43) folgt:

$$\overline{A_0 A_k} = \frac{E_{2',0}}{\omega L_1} \frac{M}{L_2} \frac{1}{N_2}$$

Hieraus folgt durch Division:

$$\frac{E_1}{E_{2,0}} = \frac{M \sqrt{1 + \zeta_1^2 + 2 \zeta_1 \sin \nu}}{L_2 (1 - \tau)} = \frac{M \sqrt{1 + \zeta_1^2 + 2 \zeta_1 \sin \nu}}{L_1 L_2 \frac{M^2}{M}} \quad (43b)$$

$$\frac{E_1}{E_{2,0}} = \sqrt{1 + \zeta_1^2 + 2 \zeta_1 \sin \nu} \frac{L_1}{M} = \sqrt{1 + \zeta_1^2 + 2 \zeta_1 \sin \nu} \frac{L_1' (1 + \tau_1)}{M}$$

$$\frac{E_1}{E_{2,0}} = \frac{Z_1}{Z_2} \sqrt{1 + \zeta_1^2 + 2 \zeta_1 \sin \nu} (1 + \tau_1). \quad (44)$$

Das wahre Uebersetzungsverhältnis ist also nicht gleich $\frac{Z_1}{Z_2}$, sondern gleich diesem Quotienten multipliziert mit dem Wurzel Ausdruck der Gleichung (44).

Aus Gleichung (44) ergibt sich die Messung des primären Streukoeffizienten τ_1 und nun aus der Beziehung

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 + \tau_1 \tau_2$$

auch τ_2 mit:

$$\tau_2 = \frac{\tau - \tau_1}{1 + \tau_1}$$

τ aber ist bestimmt aus Gleichung (29), Seite 140.

(Fortsetzung folgt im Juni-Bulletin.)

Unfälle an Starkstromanlagen in der Schweiz im Jahre 1923.¹⁾

Mitgeteilt vom Starkstrominspektorat.

Die im Jahre 1923 an Starkstromanlagen (exkl. elektrische Bahnanlagen) vorgekommenen Unfälle werden tabellarisch nach dem Berufe der betreffenden Personen, nach der Höhe der in Wirkung getretenen Spannung und nach den Anlageteilen, an denen sie sich ereignet haben, geordnet und daraus Vergleiche mit früheren Jahren gezogen.

Sodann werden kurz einige typische Unfälle beschrieben und auf die sie verursachenden Umstände hingewiesen.

Les accidents survenus pendant l'année 1923 dans les installations à fort courant (non compris les installations de traction) sont énumérés et classés suivant la profession des victimes, suivant la partie de l'installation où les accidents ont eu lieu et suivant les tensions qui étaient en jeu.

On compare ensuite les accidents survenus en 1923 avec ceux des années précédentes et donne des détails sur quelques accidents particulièrement instructifs.

Dem Starkstrominspektorat sind im Berichtsjahre 58 Unfälle an elektrischen Anlagen mit insgesamt 65 betroffenen Personen zur Anzeige gelangt. Von den letztern erlitten 23 durch den Unfall selbst oder an den Folgen desselben den Tod. Diese Zahlen betreffen indessen nicht alle in der Schweiz durch Starkstrom verursachten Unfälle, da dem Starkstrominspektorat die Unfälle, die sich bei den elektrischen Bahnen ereignen, nicht angezeigt werden. Auch sonst sind wohl einige leichtere Unfälle, die keine ernstlichen Folgen für die Betroffenen hatten, unangezeigt geblieben. Immerhin enthält die vorliegende Statistik die schweren Starkstromunfälle, die ausserhalb des Gebietes der elektrischen Bahnen vorgekommen sind, vollständig. Es liegt sehr im Interesse der Unfallverhütung, dass uns auch alle leichtern Unfälle zur Anzeige gebracht werden, denn sehr oft liefern diese für die Ermittlung der Unfallursachen und die Massnahmen zu deren Verhütung zuverlässigere Anhaltspunkte, als die schweren Unfälle, bei welchen die Opfer selbst über den Hergang nicht mehr befragt werden können.

¹⁾ Siehe auch die diesbezügliche Mitteilung in den Vereinsnachrichten.