

**Zeitschrift:** Bulletin de l'Association suisse des électriciens  
**Herausgeber:** Association suisse des électriciens  
**Band:** 25 (1934)  
**Heft:** 17

**Artikel:** Die Ermittlung des günstigsten Durchhangs von Freileitungen an ungleich hohen Aufhängepunkten  
**Autor:** Pasching, J.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-1056572>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 18.01.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

können in ähnlichen Formeln ausgedrückt werden. Darauf näher einzugehen, würde aber hier zu weit führen.

Allerdings müssen bei allen diesen Berechnungen die Verluststunden  $T_v$  oder der Verlustfaktor  $f_v$  bekannt sein, weil die Verlustkosten sich aus Leistungskosten und Energiekosten zusammensetzen. Um den Verlustfaktor zu berechnen, ist die von Rossander angegebene Methode sehr verwendbar und zuverlässiger, als die von Spinath benutzte Treppenkurve. Weil diese Methode ausserhalb Schwedens wenig bekannt zu sein scheint, möchte ich sie in diesem Zusammenhang kurz erwähnen.

Rossander hat auf empirischem Wege gefunden, dass die Dauerkurve der Belastung mit genügender Genauigkeit durch folgende Gleichung ausgedrückt werden kann:

$$y = \varepsilon_0 + (1 - \varepsilon_0) t^\lambda$$

Sämtliche Werte sind im Verhältnis zur Maximalbelastung und zur Totalzeit (im allgemeinen 8760 Stunden), die beide gleich 1 gesetzt werden, ausgedrückt.

$y$  = Belastung zur Zeit  $t$  (beide in Relativzahl).

Bei  $t = 1$  ist  $y = 1$

$\varepsilon_0$  = Minimalbelastung (Relativzahl zur Maximalbelastung).

$y = \varepsilon_0$  bei  $t = 0$

$\varepsilon_0$  = Relative Benutzungsdauer der Maximalbelastung

$$\lambda = \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon - \varepsilon_0}$$

In dem Gebiet von 1800 bis 4000 Benutzungsstunden ist folgende von Härlin angegebene Formel oft genauer:

$$y = 1 - (1 - \varepsilon_0) \cdot (1 - t)$$

Auf Grund dieser Gleichungen, die als symbolische Kurven anstatt der wirklichen Belastungskurven verwendbar sind, kann der Verlustfaktor sehr leicht berechnet werden. Die Exponentialfunktionen sind einfach zu integrieren und geben nach Rossander

$$f_v = \varepsilon_0^2 + \frac{2 \varepsilon_0 (1 - \varepsilon_0)}{\lambda + 1} + \frac{(1 - \varepsilon_0)^2}{2 \lambda + 1}$$

und nach Härlin

$$f_v = 1 + \frac{(1 - \varepsilon_0)^2}{2} + \frac{1}{\lambda + 1} - \frac{2(1 - \varepsilon_0)}{\lambda + 1}$$

Falls die Minimalbelastung klein ist, was oft in Verteilungsnetzen vorkommt, kann man  $\varepsilon_0 = 0$  setzen, und dann vereinfachen sich die Formeln zu

$$f_v = \frac{1}{2 \lambda + 1} = \frac{\varepsilon}{2 - \varepsilon} \text{ nach Rossander und}$$

$$f_v = \frac{2 \varepsilon_2}{1 + \varepsilon} \text{ nach Härlin.}$$

Bei dem von Spinath gegebenen Beispiel mit  $\varepsilon = 0,36$  (3160 h) erhält man

nach Rossander  $f_v = 0,22, 0,19, 0,18$

nach Härlin  $f_v = 0,19, 0,17, 0,15$

jenachdem  $\varepsilon_0 = 0, 0,12$  und  $0,20$  gesetzt wird.

Wenn man einen besonders breiten Spitz hat, wie Spinath in Fig. 1 voraussetzt, stimmt Rossanders Formel mit  $\varepsilon_0 = 0$  am besten, sonst bei normaler Spitzenbreite, wie in Fig. 3, die Härlinsche Formel mit  $\varepsilon_0 = 0$  oder  $0,1$ .

Sten Velander, Stockholm.

Erwiderung.

Herrn Prof. Sten Velander sei für seine Bemerkungen und Ergänzungen zu meinem Aufsatz «Nötige Unterlagen zur Ermittlung der wirtschaftlichsten Kabeltypen bei der Planung von Kabelanlagen» bestens gedankt.

Obwohl die in den Fig. 2, 4 und 5 als  $Q_{opt}$  eingezeichneten Querschnitte nicht mit den theoretisch korrekten  $Q_{opt}$  zusammenfallen — diese liegen, da  $k_1$  (in der Anmerkung auf S. 255 mit  $A$  bezeichnet) ungleich Null ist, nicht im Schnittpunkt der Leitungs- und Verlust-Kostenkurve, sondern etwas weiter nach rechts verschoben im Schnittpunkt von  $k_2 Q$  mit  $\frac{k_3}{Q}$  — ändert dies nichts an der Schlussfolgerung, die die Schaulinien nur unterstützen sollten: dass unter sonst gleichen Bedingungen zu kleineren Verlustfaktoren kleinere wirtschaftliche Querschnitte gehören.

Die analytische Ermittlung von  $f_v$  nach Rossander oder Härlin ist sicher ein willkommener Behelf, besonders wenn die Form der Belastungskurve, durch die die Verluststunden gegeben sind, unbekannt ist. Liegt diese jedoch vor, wobei die Darstellung in Treppenkurve oder in Polarkoordinaten erfolgen kann, ist meines Erachtens die Ermittlung von  $f$  aus dieser Kurve eindeutiger und deshalb vorzuziehen.

W. Spinath, Wien.

## Die Ermittlung des günstigsten Durchhangs von Freileitungen an ungleich hohen Aufhängepunkten.

Von J. Pasching, Wien.

621.315.056.1

Es wird eine einfache Berechnungsmethode für denjenigen Durchhang eines Seiles zwischen zwei ungleich hohen Aufhängepunkten gegeben, bei dem die Beanspruchung im höher gelegenen Aufhängepunkt ein Minimum wird. Ein Beispiel erläutert den Berechnungsgang.

L'auteur expose une méthode simple pour le calcul de la valeur de la flèche d'un câble tendu entre deux points de hauteur différente, pour laquelle l'effort au point d'attache le plus élevé passe par un minimum. Un exemple numérique illustre cette méthode.

Der nachstehende Aufsatz stellt sich die Aufgabe, zwischen zwei Punkten verschiedener Höhenlage ein Seil derart zu spannen, dass die Beanspruchung im höher gelegenen Aufhängepunkt, in welchem die grösste Spannung auftritt, ein Minimum wird<sup>1)</sup>.

Gegeben sei der horizontale und vertikale Abstand  $s$  bzw.  $d$  der beiden Stützpunkte, sowie  $\gamma$ , das Gewicht der Leitung pro Längeneinheit.

Den Berechnungen werde die Gleichung der Kettenlinie

$$y = \frac{H}{\gamma} \cos \frac{\gamma x^2}{H} \quad (1)$$

zugrunde gelegt, was bei den verhältnismässig grossen Durchhängen erforderlich erscheint, und ein rechtwinkeliges Koordinatensystem in der üblichen Weise angenommen. Es ist dann (s. Fig. 1)

<sup>1)</sup> Die gleiche Aufgabe löste Hch. Schenkel in seinem Aufsatz «Grosse Spannweiten und ihre Grenzen», ETZ 1932, S. 27; doch ist die dort angegebene Methode bedeutend langwieriger und mit Probieren verbunden.

<sup>2)</sup> Die grundlegenden Beziehungen finden sich z. B. in dem Aufsatz von A. Jobin «Die Berechnung der Freileitungen mit Rücksicht auf die mechanischen Verhältnisse der Leiter», Bull. SEV 1919, S. 159, 189 und 210.

$$s = x_2 - x_1, \tag{2}$$

$$d = y_2 - y_1. \tag{3}$$

Bekanntlich ist bei der Kettenlinie der Zug  $S$  proportional der Ordinate  $y$

$$S = \gamma \cdot y. \tag{4}$$

Wenn  $S_2$  ein Minimum werden soll, muss daher auch  $y_2$  eines werden;  $y_2$  in Gl. (1) eingesetzt ergibt

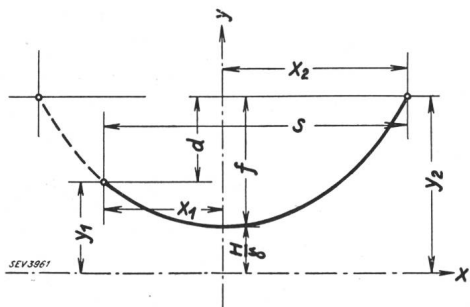


Fig. 1.

$$y_2 = \frac{H}{\gamma} \mathfrak{C} \mathfrak{D} \mathfrak{S} \frac{\gamma x_2}{H} \tag{5}$$

Nun enthält Gl. (5) für das Minimum  $y_2$  zwei unabhängige Variable  $x_2$  und  $H$ , so dass für  $x_2$  und  $H$  noch eine Bedingungsgleichung gefunden werden muss; diese ergibt sich aus Gl. (3), wenn darin  $y_2$  und  $y_1$  durch Gl. (1) ausgedrückt werden und man für  $x_1$  aus Gl. (2) einsetzt wie folgt:

$$d = \frac{H}{\gamma} \left[ \mathfrak{C} \mathfrak{D} \mathfrak{S} \frac{\gamma x_2}{H} - \mathfrak{C} \mathfrak{D} \mathfrak{S} \frac{\gamma (x_2 - s)}{H} \right] \tag{6}$$

Zur Vereinfachung werden an Stelle von  $x_2$  und  $H$  die neuen unabhängigen Veränderlichen  $\alpha$  und  $\beta$  eingeführt, für welche die Transformationsgleichungen lauten

$$\frac{\gamma x_2}{H} = \alpha, \tag{7}$$

$$\frac{\gamma (x_2 - s)}{H} = -\beta. \tag{8}$$

Mit  $\alpha$  und  $\beta$  schreiben sich die Gl. (5) und (6) folgendermassen:

$$y_2 = \frac{s}{\alpha + \beta} \mathfrak{C} \mathfrak{D} \mathfrak{S} \alpha, \tag{9}$$

$$d (\alpha + \beta) - s (\mathfrak{C} \mathfrak{D} \mathfrak{S} \alpha - \mathfrak{C} \mathfrak{D} \mathfrak{S} \beta) = 0 \tag{10}$$

Es soll jetzt  $y_2$  in Gl. (9) ein Minimum werden unter gleichzeitigem Bestehen von Gl. (10). Bezeichnet man Gl. (9) und (10) symbolisch in der folgenden Weise

$$y_2 = y_2 (\alpha, \beta), \tag{9a}$$

$$\varphi (\alpha, \beta) = 0, \tag{10a}$$

so müssen für das Auftreten eines Extremis die Gl. (11) erfüllt sein:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\delta y_2}{\delta \alpha} + \lambda \frac{\delta \varphi}{\delta \alpha} &= 0, \\ \frac{\delta y_2}{\delta \beta} + \lambda \frac{\delta \varphi}{\delta \beta} &= 0. \end{aligned} \right\} \tag{11}$$

Aus Gl. (11) kann man nun  $\lambda$  eliminieren und dann mit Gl. (10) jene Werte von  $\alpha$  und  $\beta$  berechnen, die in Gl. (9) das Minimum von  $y_2$  bestimmen.

Für die in den Gl. (11) vorkommenden Differentialquotienten erhält man folgende Ausdrücke:

$$\frac{\delta y_2}{\delta \alpha} = \frac{s}{\alpha + \beta} \left( \mathfrak{S} \mathfrak{in} \alpha - \frac{\mathfrak{C} \mathfrak{D} \mathfrak{S} \alpha}{\alpha + \beta} \right),$$

$$\frac{\delta y_2}{\delta \beta} = -\frac{s}{(\alpha + \beta)^2} \mathfrak{C} \mathfrak{D} \mathfrak{S} \alpha,$$

$$\frac{\delta \varphi}{\delta \alpha} = d - s \cdot \mathfrak{S} \mathfrak{in} \alpha,$$

$$\frac{\delta \varphi}{\delta \beta} = d + s \cdot \mathfrak{S} \mathfrak{in} \beta.$$

Setzt man diese in Gl. (11) ein und eliminiert daraus  $\lambda$ , so ergibt sich

$$\left( \mathfrak{C} \mathfrak{D} \mathfrak{S} \alpha - (\alpha + \beta) \mathfrak{S} \mathfrak{in} \alpha \right) (d + s \cdot \mathfrak{S} \mathfrak{in} \beta) = \mathfrak{C} \mathfrak{D} \mathfrak{S} \alpha (d - s \cdot \mathfrak{S} \mathfrak{in} \alpha).$$

Dividiert man diese Beziehung sowie Gl. (10) durch  $s$ , so erhält man die folgenden Relationen:

$$\left( \mathfrak{C} \mathfrak{D} \mathfrak{S} \alpha - (\alpha + \beta) \mathfrak{S} \mathfrak{in} \alpha \right) \left( \frac{d}{s} + \mathfrak{S} \mathfrak{in} \beta \right) = \mathfrak{C} \mathfrak{D} \mathfrak{S} \alpha \left( \frac{d}{s} - \mathfrak{S} \mathfrak{in} \alpha \right), \tag{12}$$

$$\frac{d}{s} = \frac{\mathfrak{C} \mathfrak{D} \mathfrak{S} \alpha - \mathfrak{C} \mathfrak{D} \mathfrak{S} \beta}{\alpha + \beta}. \tag{13}$$

Aus Gl. (12) und (13) folgt, dass  $\alpha$  und  $\beta$  nur vom Verhältnis  $\frac{d}{s}$  abhängen; es können daher für

$\frac{d}{s}$  die Werte  $\alpha$  und  $\beta$  in einer Tabelle zusammen-

gestellt werden. Weil nun die Berechnung dieser Tabelle mit Hilfe der Gl. (12) und (13) sehr langwierig wäre, wird aus diesen  $\frac{d}{s}$  eliminiert, worauf

sich nach einigen Umformungen ergibt:

$$\mathfrak{S} \mathfrak{in} (\alpha + \beta) = (\alpha + \beta) \mathfrak{S} \mathfrak{in} \alpha \mathfrak{S} \mathfrak{in} \beta \tag{14}$$

Nimmt man jetzt in Gl. (14) für  $\alpha$  einen bestimmten Wert an und berechnet daraus  $\beta$  (Näherungsverfahren), so entspricht diesen Werten  $\alpha$  und  $\beta$ , für welche das Verhältnis  $\frac{d}{s}$  aus Gl. (13) gefun-

den werden kann, ein Kleinstwert von  $y_2$  bzw.  $S_2$ . Wiederholt man diese Rechnung für eine grössere Anzahl von  $\alpha$ , so resultiert eine Tabelle für  $\frac{d}{s}$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,

die aber noch unrunde Werte von  $\frac{d}{s}$  enthält; durch

Interpolation ergibt sich schliesslich die Tabelle I mit runden Werten von  $\frac{d}{s}$ .

Tabelle 1.

$\frac{d}{s}$	$\alpha$	$\beta$	$\frac{d}{s}$	$\alpha$	$\beta$
0	1,200	1,200	0,90	1,976	0,707
0,05	1,240	1,161	0,95	2,016	0,691
0,10	1,281	1,123	1,00	2,055	0,676
0,15	1,324	1,086	1,05	2,094	0,662
0,20	1,367	1,051	1,10	2,132	0,649
0,25	1,410	1,017	1,20	2,207	0,624
0,30	1,454	0,985	1,30	2,278	0,602
0,35	1,499	0,955	1,40	2,348	0,581
0,40	1,543	0,925	1,50	2,413	0,563
0,45	1,588	0,898	1,70	2,537	0,532
0,50	1,633	0,871	2,00	2,705	0,494
0,55	1,677	0,847	2,50	2,95	0,45
0,60	1,721	0,823	3,00	3,16	0,41
0,65	1,765	0,801	4,00	3,49	0,37
0,70	1,808	0,780	5,00	3,76	0,34
0,75	1,851	0,760	7,00	4,17	0,30
0,80	1,893	0,741	10,00	4,60	0,26
0,85	1,935	0,724			

Wie aus der Tabelle ersehen werden kann, ist  $\beta$  für alle Werte von  $\frac{d}{s}$  positiv, weshalb aus Gl. (8)

folgt, dass der Scheitel der Kettenlinie mit günstigstem Durchhang immer innerhalb der Aufhängepunkte liegt.

Hat man für die gegebenen Werte  $d$  und  $s$  der Tabelle die Grösse von  $\alpha$  und  $\beta$  entnommen, so können damit alle Daten der Kettenlinie in einfachster Weise berechnet werden. Man findet aus Gl. (7) und (8)

$$x_2 = s \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \tag{15}$$

Aus Gl. (2) ergibt sich

$$x_1 = x_2 - s. \tag{16}$$

Aus Gl. (5) und (7) erhält man

$$y_2 = x_2 \frac{\cos \alpha}{\alpha}. \tag{17}$$

Aus Gl. (3) folgt

$$y_1 = y_2 - d. \tag{18}$$

Für den vertikalen Abstand des höchsten Punktes vom Tiefsten,  $f$ , kann aus Gl. (7) und (17) der folgende Ausdruck gefunden werden

$$f = x_2 \frac{\cos \alpha - 1}{\alpha}. \tag{19}$$

In Gl. (15) bis (19) ist  $\gamma$  nicht enthalten; die geometrischen Verhältnisse an der Kettenlinie günstigsten Durchhangs sind also von  $\gamma$  vollständig unabhängig.

Die Zugkraft im tiefsten Punkt ergibt sich aus Gl. (7)

$$H = \gamma \frac{x_2}{\alpha}. \tag{20}$$

Die Zugkräfte in den Aufhängepunkten können aus Gl. (4) berechnet werden

$$S_2 = \gamma y_2, \tag{21}$$

$$S_1 = \gamma y_1. \tag{22}$$

Es sollen jetzt noch die für den allgemeinen Fall abgeleiteten Formeln für gleich hohe Stützen spezialisiert werden; für diesen Fall gilt:

$$d = 0,$$

$$\frac{d}{s} = 0,$$

$$x_2 = -x_1 = x; s = 2x,$$

$$\alpha = \beta = \alpha_0.$$

Setzt man in Gl. (14)  $\alpha = \beta = \alpha_0$ , so ergibt sich nach einigen Umformungen die folgende Gleichung

$$\frac{1}{\alpha_0} = \text{Tang } \alpha_0.$$

Löst man diese Gleichung mit Hilfe eines Näherungsverfahrens auf, so erhält man

$$\alpha_0 = 1,1997 \sim 1,2,$$

welcher Wert auch in Tabelle I aufgenommen wurde.

Führt man nun den eben gefundenen Wert von  $\alpha_0$  in Gl. (17), (19), (20) und (21) ein, so ergeben sich die folgenden Beziehungen<sup>3)</sup>:

$$y = 1,5089 x \sim \frac{3}{2} x,$$

$$f = 0,6753 x \sim \frac{2}{3} x,$$

$$H = \frac{\gamma x}{1,1997} \sim \frac{\gamma x}{1,2},$$

$$S = 1,8102 H \sim 1,8 H.$$

Beispiel: Gegeben  $d = 150$  m

$$s = 400 \text{ m}$$

$$\gamma = 3,93 \text{ kg/m.}$$

Für das Verhältnis  $\frac{d}{s} = \frac{150}{400} = 0,375$  findet man

durch Interpolation aus der Tabelle

$$\alpha = 1,521,$$

$$\beta = 0,940.$$

Durch Einsetzen in Gl. (15) bis (22) ergeben sich die folgenden Werte:

$$x_2 = 400 \frac{1,521}{1,521 + 0,940} = 247,2 \text{ m}$$

$$x_1 = 247,2 - 400 = -152,8 \text{ m}$$

$$y_2 = 247,2 \frac{\cos 1,521}{1,521} = 389,7 \text{ m}$$

$$y_1 = 389,7 - 150 = 239,7 \text{ m}$$

$$f = 247,2 \frac{\cos 1,521 - 1}{1,521} = 227,2 \text{ m}$$

$$H = 3,93 \frac{247,2}{1,521} = 638,8 \text{ kg}$$

$$S_2 = 3,93 \cdot 389,7 = 1532 \text{ kg}$$

$$S_1 = 3,93 \cdot 239,7 = 942 \text{ kg.}$$

<sup>3)</sup> Die Berechnung des günstigsten Durchhangs bei gleich hohen Aufhängepunkten findet sich zuerst in dem Werk von E. E. Blavier «Nouveau traité de télégraphie électrique», Paris, Lacroix, II. Bd., S. 463. — Auch M. Jüllig behandelt in seinem Aufsatz «Ueber die mechanische Beanspruchung elektr. Luftleitungen» in der Zeitschr. f. Elektrotechn., Wien 1899, Heft 17, diesen Fall. — Blavier gibt für  $\alpha_0$  einen Wert zwischen 1,1998 und 1,1999 an; bei Jüllig ist  $\alpha_0$  mit 1,199678 angegeben.