

Zeitschrift: Bulletin de l'Association suisse des électriciens
Herausgeber: Association suisse des électriciens
Band: 31 (1940)
Heft: 4

Artikel: Pertes supplémentaires dans le cuivre des transformateurs à trois enroulements
Autor: Waldvogel, P.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-1057987>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 18.01.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

haltspunkte. Hier semblent les normales Wärmetarifs der Elektrizitätswerke für den Abnehmer wirtschaftlich tragbar zu sein. Die Anschlusswerte der Anlagen liegen zur Hauptsache in der Gegend von

etwa 10 bis 20 kW. Sowohl hinsichtlich Tarifs als auch hinsichtlich Anschlussmöglichkeiten semblent also die Holztrocknungsanlagen günstige Anschlussobjekte zu sein.

Pertes supplémentaires dans le cuivre des transformateurs à trois enroulements.

Par P. Waldvogel, Baden.

621.314.22 : 621.3.017.2

Les questions relatives aux pertes dans le cuivre des transformateurs à trois enroulements sont fréquemment traitées par une méthode de superposition qui fait intervenir les résultats de trois mesures effectuées en court-circuit, en prenant les enroulements deux à deux. Cette méthode se justifie en toute rigueur pour les pertes ohmiques, mais non plus, en général, pour les pertes supplémentaires, comme le prouve la théorie établie dans cet article ainsi que les résultats d'essais qui y sont donnés.

Pour cette raison l'auteur déconseille l'adoption de cette méthode pour les prescriptions internationales et propose une nouvelle méthode d'essais, dite «directe» qui scientifiquement est à l'abri de semblables reproches.

Die Probleme der Kupferverluste bei Dreiwicklungstransformatoren werden öfters durch eine Superpositionsmethode behandelt, welche drei Kurzschlussmessungen zwischen je zwei Wicklungen benötigt. Diese Methode erfasst wohl in einwandfreier Weise die ohmschen, aber nicht die zusätzlichen Verluste, wie dies durch die in diesem Aufsatz aufgestellte Theorie und die angegebenen Versuchsergebnisse bewiesen wird.

Aus diesem Grunde wird die Annahme dieser Methode in die internationalen Vorschriften durch den Autor abgeraten und eine sogenannte «direkte» Methode vorgeschlagen, die vom wissenschaftlichen Standpunkte aus vollständig begründet ist.

I.

Critique de la méthode courante dite «indirecte».

Il est fréquemment d'usage, pour traiter des questions relatives au fonctionnement en charge des transformateurs à trois enroulements, de procéder par superposition. Cette méthode, qui ne manque pas d'élégance, peut se résumer de la façon suivante:

Les 3 indices I, II et III se rapportent aux 3 enroulements. P_I P_{II} P_{III} désignent les puissances apparentes débitées respectivement par les 3 enroulements I, II, III¹⁾, et définissent un fonctionnement bien déterminé du transformateur. W_I W_{II} W_{III} désignent les pertes (ohmiques et supplémentaires) dans les 3 enroulements I, II, III lors du fonctionnement sous le régime P_I P_{II} P_{III} .

Un premier essai en court-circuit, effectué entre les enroulements I et II, l'enroulement III restant ouvert, pour une puissance apparente P_0 quelconque, donne les pertes $W_{I II}$.

Les pertes $W_{II III}$ et $W_{III I}$ se définissent d'une façon analogue par permutation circulaire.

Les pertes W_{0I} W_{0II} W_{0III} dans chaque enroulement débitant la puissance P_0 , s'expriment par les relations

$$\left. \begin{aligned} W_{0I} &= \frac{1}{2} (W_{I II} - W_{II III} + W_{III I}) \\ W_{0II} &= \frac{1}{2} (W_{II III} - W_{III I} + W_{I II}) \\ W_{0III} &= \frac{1}{2} (W_{III I} - W_{I II} + W_{II III}) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Enfin les pertes W_I dans l'enroulement I, lorsqu'il débite la puissance P_I sont:

$$W_I = W_{0I} \cdot \left(\frac{P_I}{P_0} \right)^2 \quad (2)$$

¹⁾ Ces puissances P_I P_{II} P_{III} sont des puissances nominales et s'entendent donc, pour chaque enroulement, comme le produit de la tension à vide par le courant correspondant en charge.

Des calculs en tout point analogues peuvent être effectués sur les puissances réactives et permettent de déterminer les chutes de tension inductives.

Il est facile de justifier en toute rigueur la méthode ci-dessus, tant que l'on ne considère que les pertes ohmiques, et que l'on néglige les pertes supplémentaires. En effet, si l'on désigne par R_I R_{II} R_{III} les résistances ohmiques, et par N_I N_{II} N_{III} les nombres de spires, on a dans l'hypothèse ci-dessus, en représentant par E la tension par spire,

$$\left. \begin{aligned} W_{I II} &= R_I \cdot \left(\frac{P_0}{N_I E} \right)^2 + R_{II} \cdot \left(\frac{P_0}{N_{II} E} \right)^2 \\ W_{II III} &= R_{II} \cdot \left(\frac{P_0}{N_{II} E} \right)^2 + R_{III} \cdot \left(\frac{P_0}{N_{III} E} \right)^2 \\ W_{III I} &= R_{III} \cdot \left(\frac{P_0}{N_{III} E} \right)^2 + R_I \cdot \left(\frac{P_0}{N_I E} \right)^2 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Après substitution des valeurs (3) dans (1) il vient:

$$W_{0I} = R_I \cdot \left(\frac{P_0}{N_I E} \right)^2 \text{ etc.} \quad (4)$$

et enfin:

$$W_I = R_I \cdot \left(\frac{P_I}{N_I E} \right)^2 \text{ etc.} \quad (5)$$

Il est manifeste que ces 3 expressions (5) représentent bien les pertes ohmiques des 3 enroulements, comme on voulait le démontrer.

Mais il ne faut pas perdre de vue que l'hypothèse suivant laquelle on néglige les pertes supplémentaires est par trop simpliste. Elle supprime même tout l'intérêt de la question, car tout le monde sera d'accord avec nous quand nous disons que la méthode la plus simple et la plus précise pour déterminer des pertes ohmiques, est et sera toujours une mesure de résistance en courant continu. Les mesures aux wattmètres dans un essai en court-circuit n'ont de sens que pour autant qu'elles tiennent compte des pertes supplémentaires.

Sans doute les mesures effectuées avec un enroulement court-circuité et un enroulement ouvert, c'est-à-dire les valeurs $W_{I II}$, $W_{II III}$, $W_{III I}$ tiennent-elles compte, dans une certaine mesure, des pertes supplémentaires. Mais dans quelle mesure? A notre avis, aucune considération d'ordre physique ne justifie la méthode de superposition ci-dessus. Celle-ci peut encore s'appliquer aux champs magnétiques et aux densités de courant, mais non plus aux pertes.

D'autre part, il n'est pas exact de dire, comme on le fait pour établir les équations (2), que les pertes dans un enroulement varient simplement comme le carré du courant correspondant. Il faudrait en outre tenir compte du fait que le champ de fuite à travers un enroulement dépend non seulement du courant circulant dans le dit enroulement, mais aussi de ceux qui circulent dans les deux autres. Par conséquent les pertes dans un enroulement dépendent à la fois du courant correspondant et des deux autres.

Enfin, on peut facilement se rendre compte, dans un cas particulier, des résultats erronés auxquels peut conduire la méthode en question. Considérons le cas où l'enroulement intérieur I absorbe la puissance P_0 , l'enroulement extérieur III débite la même puissance P_0 et l'enroulement médian II est à vide. On doit faire alors dans les formules (2)

$$P_I = P_0 \quad P_{II} = 0 \quad P_{III} = P_0$$

ce qui donne, en tenant compte des équations (1)

$$W_I = \frac{1}{2} (W_{I II} - W_{II III} + W_{III I})$$

$$W_{II} = 0$$

$$W_{III} = \frac{1}{2} (W_{III I} - W_{I II} + W_{II III})$$

Il s'en suivrait donc que les pertes dans l'enroulement médian seraient rigoureusement nulles, ce qui est nécessairement faux, car si les pertes ohmiques de ce dernier sont nulles, il n'en est pas moins le siège de pertes supplémentaires qui peuvent, suivant le dimensionnement de son cuivre, être même très importantes. Par contre, il est curieux de constater que les pertes totales $W_I + W_{II} + W_{III}$ sont égales à $W_{III I}$, c'est-à-dire qu'elles sont exactes.

II.

Etude analytique générale des pertes supplémentaires dans une couche d'enroulement de transformateur.

Il est possible, avec des méthodes relativement simples, d'établir des formules assez générales pour les pertes ohmiques et supplémentaires dans un transformateur à trois enroulements, formules qui se prêtent ensuite sans difficulté à une discussion détaillée.

Afin d'éviter des complications mathématiques qui conduiraient hors du cadre de cette étude, on

fera toutefois les hypothèses simplificatrices suivantes:

Les 3 enroulements sont concentriques, coaxiaux et de même longueur axiale; ils sont en outre homogènes aussi bien dans la direction axiale que dans la direction radiale, c'est-à-dire que toutes les spires enroulées sur un même diamètre ont même section et sont équidistantes²⁾.

Le premier problème que nous traiterons mathématiquement est le suivant:

Dans un transformateur à plusieurs enroulements débitant des charges bien déterminées, on considère une couche³⁾ délimitée à l'intérieur et à l'extérieur par deux cylindres i et e . On se donne les sommes des ampère-tours à l'intérieur du cylindre intérieur et à l'extérieur du cylindre extérieur, et on les représente symboliquement par

$$\overline{NI}_i e^{j(\omega t + \psi_i)} \quad \text{et} \quad -\overline{NI}_e e^{j(\omega t + \psi_e)}$$

La somme de ces deux quantités correspond évidemment aux ampère-tours de la couche étudiée, puisque la somme de tous les ampère-tours sur la colonne sont nuls, et on se propose de calculer les pertes dans le cuivre de la couche considérée. (Voir fig. 1.)

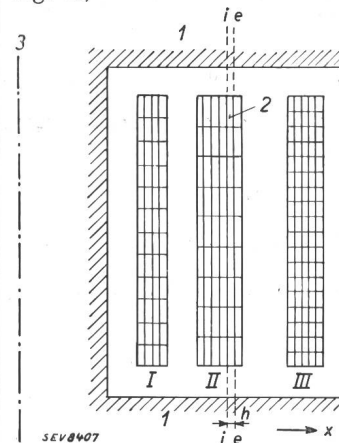


Fig. 1.
Représentation schématique d'un transformateur à trois enroulements.
1 Culasse. 2 Couche d'enroulement dont on calcule les pertes. 3 Axe du noyau.

Il s'agit là, au fond, du problème classique de Field, dans lequel seules les conditions aux limites sont un peu spéciales.

Avec les dénominations suivantes:

- l longueur de la spire moyenne,
- a longueur des lignes du champ de fuite,
- b longueur axiale totale du cuivre dans la couche considérée,
- h hauteur radiale du cuivre dans la couche considérée,

$$\xi \text{ hauteur réduite} = \omega \sqrt{\frac{b}{a}} \sqrt{\frac{\gamma_0}{2\varrho}} \cdot h \quad (6)$$

équation dans laquelle ω est la pulsation du courant alternatif, ϱ la résistivité du cuivre et γ_0 le facteur de proportionalité, dans un milieu non magnétique, entre l'induction et le champ magnétiques,

- t temps,
- x abscisse dans le sens radial,

²⁾ Par là même se trouvent éliminés certains enroulements munis de prises qui permettent d'en ajuster le nombre de spires.

³⁾ Nous entendons toujours par couche l'ensemble des spires d'un enroulement bobinées sur le même diamètre. Par exemple, un enroulement en simple hélice possède une seule couche.

les équations différentielles pour l'induction B , parallèle à l'axe du noyau, et pour la densité de courant σ , tangentielle, s'écrivent d'après Maxwell:

$$\sigma = \frac{a}{b \gamma_0} \cdot \frac{\partial B}{\partial x} \quad \frac{\partial B}{\partial t} = \varrho \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial x} \quad (7)$$

Il est facile d'en déduire les solutions sous forme symbolique:

$$B = M \cdot e^{\zeta \frac{x}{h}} \cdot e^{j(\omega t + \zeta \frac{x}{h} + \varphi_1)} + N \cdot e^{-\zeta \frac{x}{h}} \cdot e^{j(\omega t - \zeta \frac{x}{h} + \varphi_2)} \quad (8)$$

$$\sigma = \frac{a \zeta}{h b \gamma_0} (1+j) \cdot \left\{ M \cdot e^{\zeta \frac{x}{h}} \cdot e^{j(\omega t + \zeta \frac{x}{h} + \varphi_1)} - N \cdot e^{-\zeta \frac{x}{h}} \cdot e^{j(\omega t - \zeta \frac{x}{h} + \varphi_2)} \right\} \quad (9)$$

où les grandeurs M , N , φ_1 et φ_2 représentent des constantes d'intégration.

La détermination de ces dernières se fait avec l'aide des conditions aux limites de la couche considérée. On sait que la somme des ampère-tours à gauche de la droite i s'écrit $\overline{NI}_i e^{j(\omega t + \psi)}$; d'autre part, d'après la loi du circuit magnétique, cette même grandeur, multipliée par $\frac{\gamma_0}{a}$ donne la valeur de l'induction B sur la droite i , c'est-à-dire qu'elle est égale à la valeur de (8) pour $x = 0$.

On verrait de même que $+ \overline{NI}_e e^{j(\omega t + \psi)}$, après multiplication par $\frac{\gamma_0}{a}$, doit être égal à la valeur de (8) pour $x = h$. Il s'en suit donc les deux équations complexes:

$$M \cdot e^{j\varphi_1} + N \cdot e^{j\varphi_2} = \frac{\gamma_0}{a} \overline{NI}_i e^{j\psi_i} \quad (10)$$

$$M \cdot e^{\zeta} \cdot e^{j(\zeta + \varphi_1)} + N \cdot e^{-\zeta} \cdot e^{j(-\zeta + \varphi_2)} = \frac{\gamma_0}{a} \overline{NI}_e e^{j\psi_e} \quad (11)$$

qui déterminent complètement les inconnues M , N , φ_1 et φ_2 .

En particulier, on trouve pour les deux combinaisons suivantes:

$$\frac{a^2}{\gamma_0^2} (M^2 e^\zeta + N^2 e^{-\zeta}) = \frac{\mathfrak{C}08 \zeta}{\mathfrak{C}08^2 \zeta - \cos^2 \zeta} \cdot \frac{\overline{NI}_i^2 + \overline{NI}_e^2}{2} - \frac{\cos \zeta}{\mathfrak{C}08^2 \zeta - \cos^2 \zeta} \cdot \overline{NI}_i \cdot \overline{NI}_e \cdot \cos(\psi_i - \psi_e) \quad (12)$$

$$\frac{a^2}{\gamma_0^2} \cdot 2 MN \cos(\zeta + \varphi_1 - \varphi_2) = - \frac{\cos \zeta}{\mathfrak{C}08^2 \zeta - \cos^2 \zeta} \cdot \frac{\overline{NI}_i^2 + \overline{NI}_e^2}{2} + \frac{\mathfrak{C}08 \zeta}{\mathfrak{C}08^2 \zeta - \cos^2 \zeta} \cdot \overline{NI}_i \cdot \overline{NI}_e \cdot \cos(\psi_i - \psi_e) \quad (13)$$

Enfin les pertes elles-mêmes W dans le cuivre de la couche d'enroulement considérée, se calculent au moyen de l'intégrale

$$W = \int_0^h \sigma_{eff}^2 \cdot \varrho \cdot l \cdot b \cdot dx \quad (14)$$

σ_{eff} étant la valeur efficace de la densité de courant au point x . L'équation (9) donne tout d'abord:

$$\sigma_{eff}^2 = \frac{a^2 \zeta^2}{h^2 b^2 \gamma_0^2} \cdot \left[M^2 \cdot e^{2\zeta \frac{x}{h}} + N^2 \cdot e^{-2\zeta \frac{x}{h}} - 2 MN \cos\left(2\zeta \frac{x}{h} + \varphi_1 - \varphi_2\right) \right] \quad (15)$$

d'où l'on déduit:

$$W = \varrho \cdot \frac{l}{h b} \cdot \zeta \cdot \frac{a^2}{\gamma_0^2} \left\{ (M^2 e^\zeta + N^2 e^{-\zeta}) \cdot \mathfrak{C}in \zeta - 2 MN \cdot \cos(\zeta + \varphi_1 - \varphi_2) \cdot \sin \zeta \right\} \quad (16)$$

Enfin, à l'aide des relations (12) et (13), on peut éliminer dans (16) les 4 constantes d'intégrations M , N , φ_1 , φ_2 et obtenir ainsi l'expression des pertes W en fonction des seules grandeurs géométriques données: 4)

$$W = \varrho \cdot \frac{l}{h b} \cdot \left\{ \zeta \cdot \frac{\mathfrak{C}in \zeta \mathfrak{C}08 \zeta + \sin \zeta \cos \zeta}{\mathfrak{C}08^2 \zeta - \cos^2 \zeta} \cdot (\overline{NI}_{i\,eff}^2 + \overline{NI}_{e\,eff}^2) - \zeta \cdot \frac{\mathfrak{C}in \zeta \cos \zeta + \sin \zeta \mathfrak{C}08 \zeta}{\mathfrak{C}08^2 \zeta - \cos^2 \zeta} \cdot 2 \overline{NI}_{i\,eff} \cdot \overline{NI}_{e\,eff} \cdot \cos(\psi_i - \psi_e) \right\} \quad (17)$$

Pour la commodité de la discussion qui va suivre, on transformera légèrement cette dernière expression. Si l'on représente par deux vecteurs \vec{OA}_i et \vec{OA}_e les grandeurs $\overline{NI}_{i\,eff} \cdot e^{j\psi_i}$ et $\overline{NI}_{e\,eff} \cdot e^{j\psi_e}$ (voir Fig. 2), il est clair, puisque la somme de tous les

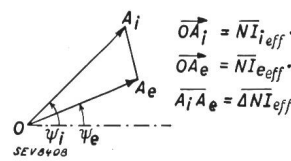


Fig. 2. Diagramme vectoriel des ampère-tours.

ampère-tours de la colonne doit nécessairement être nulle, que le vecteur $\vec{A}_i \vec{A}_e$ représente les ampère-tours efficaces dans la couche d'enroulement considérée. Nous les désignerons par $\Delta \overline{NI}_{eff}$. Il découle de là la relation géométrique

$$\Delta \overline{NI}_{eff}^2 = \overline{NI}_{i\,eff}^2 + \overline{NI}_{e\,eff}^2 - 2 \overline{NI}_{i\,eff} \cdot \overline{NI}_{e\,eff} \cdot \cos(\psi_i - \psi_e) \quad (18)$$

En remplaçant dans (17) la valeur $\overline{NI}_{i\,eff}^2 + \overline{NI}_{e\,eff}^2$ tirée de (18) on obtient:

4) Nous remplaçons dorénavant NI c'est-à-dire les valeurs de crête par les valeurs efficaces NI_{eff} multipliées par $\sqrt{2}$.

$$W = \rho \cdot \frac{l}{hb} \cdot \left\{ \xi \cdot \frac{\sin \xi \cos \xi + \sin \xi \cos \xi}{\cos^2 \xi - \cos^2 \xi} \cdot \overline{\Delta N I_{eff}^2} + 2 \xi \cdot \frac{\sin \xi \cos \xi + \sin \xi \cos \xi - \sin \xi \cos \xi - \sin \xi \cos \xi}{\cos^2 \xi - \cos^2 \xi} \cdot \overline{N I_{i,eff} \cdot N I_{e,eff} \cdot \cos(\psi_i - \psi_e)} \right\}$$

Enfin, en introduisant les deux fonctions classiques

$$\varphi(\xi) = \xi \cdot \frac{\sin 2\xi + \sin 2\xi}{\cos 2\xi - \cos 2\xi} \quad (19)$$

$$\psi(\xi) = 2\xi \cdot \frac{\sin \xi - \sin \xi}{\cos \xi + \cos \xi} \quad (20)$$

il vient pour W :

$$W = \rho \cdot \frac{l}{hb} \cdot \left\{ \varphi(\xi) \cdot \overline{\Delta N I_{eff}^2} + \psi(\xi) \cdot \overline{N I_{i,eff} \cdot N I_{e,eff} \cdot \cos(\psi_i - \psi_e)} \right\} \quad (21)$$

III.

Discussion de la formule donnant les pertes dans une couche d'enroulement de transformateur.

Dans la forme relativement simple (21) sous laquelle nous avons mis l'expression de W , on distingue essentiellement deux termes:

1° un terme proportionnel à $\overline{\Delta N I_{eff}^2}$, c'est-à-dire proportionnel au carré du courant qui circule dans la couche considérée, tout comme le sont les pertes purement ohmiques. D'ailleurs pour $\xi = 0$, ce qui correspond à des cuivres de hauteur radiale très faible, on trouve $\varphi = 1$ et le premier terme

$\rho \cdot \frac{l}{hb} \cdot \overline{\Delta N I_{eff}^2}$ n'est pas autre chose que les pertes ohmiques pures. Par contre, dès que ξ prend une valeur appréciable, $\varphi(\xi)$ devient plus grand que 1 et le terme en question devient supérieur aux pertes purement ohmiques.

2° un terme proportionnel à $\overline{N I_{i,eff} \cdot N I_{e,eff} \cdot \cos(\psi_i - \psi_e)}$, c'est-à-dire qui dépend bien plus des courants qui circulent en dehors de la couche considérée qu'à son intérieur.

C'est là un fait extrêmement important, à savoir que les pertes supplémentaires dans une couche bien déterminée d'un enroulement sont engendrées par tous les courants de la colonne et non pas seulement par ceux qui circulent dans cette couche, contrairement à ce qui se passe dans un conducteur en cuivre isolé dans l'espace et parcouru par un courant alternatif (effet pelliculaire, ou de Lord Kelvin): on sait que dans ce cas les pertes varient rigoureusement comme le carré du courant⁵⁾.

A titre de contrôle, on peut appliquer la formule (21) à la p^{me} couche de l'enroulement intérieur dans un transformateur à deux enroulements, le nombre total de couches étant m . On a alors en désignant par $N I_{eff}$ le nombre d'ampère-tours totaux du dit enroulement:

⁵⁾ Voir aussi les considérations purement qualitatives et d'ordre physique de la fin du paragraphe I.

$$\overline{\Delta N I_{eff}} = N I_{eff} \cdot \frac{1}{m} \quad \psi_i = \psi_e$$

$$\overline{N I_{i,eff}} = N I_{eff} \cdot \frac{p-1}{m} \quad \overline{N I_{e,eff}} = N I_{eff} \cdot \frac{p}{m}$$

D'où:

$$W = \rho \cdot \frac{l}{hb} \cdot \left\{ \varphi(\xi) \cdot \frac{N^2 I_{eff}^2}{m^2} + \psi(\xi) \cdot \frac{p(p-1)}{m^2} \cdot N^2 I_{eff}^2 \right\}$$

$$W = R_0 I_{eff}^2 \left\{ \varphi(\xi) + p(p-1) \cdot \psi(\xi) \right\}$$

en remarquant que $\rho \cdot \frac{l N^2}{m^2 hb}$ n'est pas autre chose que la résistance en courant continu R_0 de la couche considérée. On retrouve bien la formule classique de Field.

IV.

Application de la formule donnant les pertes d'une couche pour le calcul des pertes dans un enroulement complet.

Dans un transformateur remplissant les hypothèses formulées au paragraphe II, il est possible de calculer les pertes dans une couche d'enroulement au moyen de la formule (21). En appliquant cette dernière aux m couches qui constituent un enroulement complet et en faisant la somme, on obtient les pertes de l'enroulement complet lui-même.

On représentera tout d'abord dans un diagramme vectoriel la répartition des ampère-tours dans les différents enroulements et dans les différentes

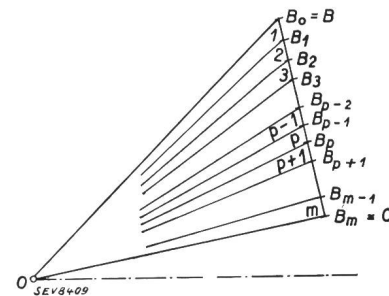


Fig. 3. Diagramme des ampère-tours efficaces des m couches d'un enroulement.

couches d'un même enroulement, situé dans le cas général entre les deux autres (voir fig. 3). Le vecteur \vec{OB} représentera les ampère-tours efficaces à l'intérieur de l'enroulement, c'est-à-dire la somme des ampère-tours efficaces situés à l'intérieur de la première couche de l'enroulement médian, tandis que $-\vec{OC}$ représentera les ampère-tours efficaces à l'extérieur de l'enroulement, c'est-à-dire la somme des ampère-tours efficaces situés à l'extérieur de la m^{me} couche de l'enroulement médian. Enfin les ampère-tours de m couches de ce dernier seront représentés par les m segments égaux⁶⁾ dont la somme constitue \vec{BC} . Par exemple, pour une

⁶⁾ Nous supposons ici les m couches de l'enroulement connectées en série, ou tout au moins si elles sont en parallèle, parcourues par des courants égaux.

couche quelconque d'ordre p , les ampère-tours intérieurs seront \vec{OB}_{p-1} , les ampère-tours extérieurs $-\vec{OB}_p$ et les ampères-tours de la couche elle-même $B_{p-1}B_p$.

Pour simplifier l'écriture, nous introduirons la notion du produit scalaire de deux vecteurs et nous le représenterons au moyen d'une parenthèse ronde ().

Les pertes dans la couche p s'écrivent alors d'après la formule (21)

$$W_p = \varrho \cdot \frac{l}{hb} \cdot \left\{ \varphi(\xi) \cdot \frac{\overline{BC}}{m^2} + \psi(\xi) \cdot (\vec{OB}_{p-1}, \vec{OB}_p) \right\} \quad (22)$$

et les pertes W de l'enroulement complet deviennent:

$$W = \sum_{p=1}^m W_p = \varrho \cdot \frac{l}{hb} \left\{ \varphi(\xi) \cdot \frac{1}{m} \cdot \overline{BC}^2 + \psi(\xi) \cdot \sum_{p=1}^m (\vec{OB}_{p-1}, \vec{OB}_p) \right\} \quad (23)$$

Reste enfin à calculer la somme des m produits scalaires:

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^m (\vec{OB}_{p-1}, \vec{OB}_p) &= \sum_{p=1}^m \left(\left[\vec{OB} + \frac{p-1}{m} \cdot \vec{BC} \right] \cdot \left[\vec{OC} - \frac{m-p}{m} \cdot \vec{BC} \right] \right) = m \cdot (\vec{OB}, \vec{OC}) \\ &- \overline{BC}^2 \sum_{p=1}^m \frac{(p-1)(m-p)}{m^2} + (\vec{BC}, \vec{OC}) \cdot \sum_{p=1}^m \frac{p-1}{m} \\ &- (\vec{BC}, \vec{OB}) \cdot \sum_{p=1}^m \frac{m-p}{m} = m \cdot (\vec{OB}, \vec{OC}) \\ &- \frac{(m-1)(m-2)}{6m} \cdot \overline{BC}^2 + \frac{m-1}{2} \cdot (\vec{BC}, \vec{OC}) \\ &- \frac{m-1}{2} \cdot (\vec{BC}, \vec{OB}) = m \cdot (\vec{OB}, \vec{OC}) \\ &- \frac{(m-1)(m-2)}{6m} \cdot \overline{BC}^2 + \frac{m-1}{2} \cdot \overline{BC}^2 \\ &= m \cdot (\vec{OB}, \vec{OC}) + \frac{m^2-1}{3m} \cdot \overline{BC}^2 \end{aligned}$$

En portant cette dernière valeur dans (23) et en remplaçant \vec{OB} , \vec{OC} et \vec{BC} respectivement par $NI_{i\text{eff}} \cdot e^{j\psi_i}$, $NI_{e\text{eff}} \cdot e^{j\psi_e}$ et NI_{eff} on obtient:

$$W = \varrho \cdot \frac{l}{hb} \left\{ \frac{1}{m} \cdot \varphi(\xi) \cdot \overline{NI}_{\text{eff}}^2 + \frac{m^2-1}{3m} \cdot \psi(\xi) \cdot \overline{NI}^2 + m \cdot \psi(\xi) \cdot \overline{NI}_{i\text{eff}} \cdot \overline{NI}_{e\text{eff}} \cdot \cos(\psi_i - \psi_e) \right\} \quad (24)$$

Il est alors avantageux d'introduire deux nouvelles fonctions τ et η de ξ

$$\begin{aligned} \tau(\xi) &= \varphi(\xi) + \frac{m^2-1}{3} \cdot \psi(\xi) \\ \eta(\xi) &= m^2 \cdot \psi(\xi) \end{aligned} \quad (25)$$

$$W = \varrho \cdot \frac{l}{mhb} \left\{ \tau(\xi) \cdot \overline{NI}_{\text{eff}}^2 + \eta(\xi) \cdot \overline{NI}_{i\text{eff}} \cdot \overline{NI}_{e\text{eff}} \cdot \cos(\psi_i - \psi_e) \right\} \quad (26)$$

Cette formule (26) est en tout point analogue à l'ancienne formule (21), les fonctions τ et η ayant respectivement pris la place de φ et ψ . Mais la formule (26) s'applique maintenant à l'ensemble constitué par un enroulement complet, tandis que (21) s'appliquait à une couche seulement.

En particulier la discussion du paragraphe III peut se répéter ici mot pour mot.

V.

Cas général d'un transformateur à 3 enroulements. Critique quantitative de la méthode «indirecte».

Nous supposons données les dimensions d'un transformateur à 3 enroulements conforme en principe à la disposition de la fig. 1, ainsi que le régime de charge auquel il fonctionne. Un diagramme vectoriel des ampère-tours efficaces des 3 enroulements donne une représentation complète de ce régime (voir fig. 4). Quelles sont les pertes dans le cuivre d'un tel ensemble?

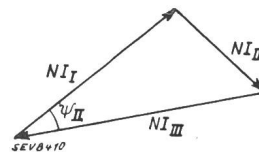


Fig. 4.

Diagramme des ampère-tours efficaces d'un transformateur à trois enroulements.

En affectant des indices I II III tout ce qui se rapporte aux 3 enroulements I II et III, on trouve à l'aide de la formule (26)

$$\begin{aligned} W_I &= \varrho \cdot \frac{l_I}{m_I h_I b_I} \left\{ \tau(\xi_I) \cdot \overline{NI}_I^2 \right\} \\ W_{II} &= \varrho \cdot \frac{l_{II}}{m_{II} h_{II} b_{II}} \left\{ \tau(\xi_{II}) \cdot \overline{NI}_{II}^2 + \eta(\xi_{II}) \cdot \overline{NI}_I \cdot \overline{NI}_{III} \cdot \cos \psi_{II} \right\} \quad (27)^7 \\ W_{III} &= \varrho \cdot \frac{l_{III}}{m_{III} h_{III} b_{III}} \left\{ \tau(\xi_{III}) \cdot \overline{NI}_{III}^2 \right\} \end{aligned}$$

Telles sont les pertes qui prennent réellement naissance dans chacun des 3 enroulements I II et III. Il est intéressant de les comparer à ce que seraient les valeurs fournies par la méthode «indirecte» telle qu'elle a été décrite au paragraphe I.

Le premier essai où les enroulements I et II sont chargés avec la puissance apparente P_o , c'est-à-dire les ampère-tours NI_o , tandis que l'enroulement t_{III} reste ouvert, donnerait les pertes:

7) Il suffit de remarquer que dans l'application de la formule (26) pour le calcul de W_I et W_{III} , le terme en η disparaît parce que soit les ampère-tours intérieurs, soit les ampère-tours extérieurs sont nuls. Au contraire, dans l'expression de W_{II} subsiste un terme en η , dans lequel figure le cosinus de l'angle ψ_{II} opposé à NI_{II} dans le diagramme en triangle de la fig. 4.

$$W_{I II} = \varrho \cdot \frac{l_1}{m_1 h_1 b_1} \cdot \tau(\xi_1) \cdot \overline{NI}_0^2 + \varrho \cdot \frac{l_{II}}{m_{II} h_{II} b_{II}} \cdot \tau(\xi_{II}) \cdot \overline{NI}_0^2 \quad (28)$$

Les pertes dans les essais II III et III I se calculent d'une façon analogue

$$W_{II III} = \varrho \cdot \frac{l_{II}}{m_{II} h_{II} b_{II}} \cdot \tau(\xi_{II}) \cdot \overline{NI}_0^2 + \varrho \cdot \frac{l_{III}}{m_{III} h_{III} b_{III}} \cdot \tau(\xi_{III}) \cdot \overline{NI}_0^2 \quad (29)$$

$$W_{III I} = \varrho \cdot \frac{l_{III}}{m_{III} h_{III} b_{III}} \cdot \tau(\xi_{III}) \cdot \overline{NI}_0^2 + \varrho \cdot \frac{l_I}{m_I h_I b_I} \cdot \tau(\xi_I) \cdot \overline{NI}_0^2 + \varrho \cdot \frac{l_{II}}{m_{II} h_{II} b_{II}} \cdot \eta(\xi_{II}) \cdot \overline{NI}_0^2 \quad (30)^8$$

Au moyen des relations (1) et (2), on peut alors former des expressions de $W_I W_{II} W_{III}$.

$$\left. \begin{aligned} W_I &= \varrho \cdot \frac{l_1}{m_1 h_1 b_1} \cdot \tau(\xi_1) \cdot \overline{NI}_1^2 + \varrho \cdot \frac{l_{II}}{m_{II} h_{II} b_{II}} \cdot \eta(\xi_{II}) \cdot \frac{\overline{NI}_1^2}{2} \\ W_{II} &= \varrho \cdot \frac{l_{II}}{m_{II} h_{II} b_{II}} \cdot \tau(\xi_{II}) \cdot \overline{NI}_{II}^2 - \varrho \cdot \frac{l_{II}}{m_{II} h_{II} b_{II}} \cdot \eta(\xi_{II}) \cdot \frac{\overline{NI}_{II}^2}{2} \\ W_{III} &= \varrho \cdot \frac{l_{III}}{m_{III} h_{III} b_{III}} \cdot \tau(\xi_{III}) \cdot \overline{NI}_{III}^2 + \varrho \cdot \frac{l_{II}}{m_{II} h_{II} b_{II}} \cdot \eta(\xi_{II}) \cdot \frac{\overline{NI}_{III}^2}{2} \end{aligned} \right\} (31)$$

On se rend compte sans peine que les 3 équations (31) ne sont pas équivalentes aux équations (27). Par conséquent il est bien démontré que la méthode «indirecte» décrite au paragraphe I, ne correspond pas à la réalité.

Par contre, il est curieux de constater que la somme des 3 expressions (31) donne pour les pertes totales rigoureusement le même résultat que la somme des 3 expressions (27). Il suffit, pour s'en convaincre, de remarquer que.

$$\frac{\overline{NI}_1^2}{2} - \frac{\overline{NI}_{II}^2}{2} + \frac{\overline{NI}_{III}^2}{2} = \overline{NI}_I \cdot \overline{NI}_{III} \cdot \cos \psi_{II}$$

suivant les propriétés connues du triangle quelconque de la fig. 4.

En définitive, une analyse mathématique du problème nous a permis d'établir en toute rigueur les résultats présentés au paragraphe I. La méthode

⁸⁾ Il est important de remarquer que dans l'expression de $W_{I II}$ apparaît un terme qui représente les pertes dans l'enroulement II, bien que celui-ci ne soit pas chargé. Cela provient de ce que pour cet enroulement les ampère-tours intérieurs et extérieurs sont tous deux différents de zéro. Il est facile de voir qu'ils sont égaux à NI_0 et possèdent la même phase c'est-à-dire que le cosinus de l'angle qui apparaît dans la formule (26) est ici égal à l'unité.

dite courante ou «indirecte» donne pour chacun des enroulements des pertes supplémentaires qui sont entièrement erronées. Toutefois ces erreurs se compensent mutuellement si l'on envisage les pertes globales dans les 3 enroulements du transformateur au point que ces pertes globales redeviennent exactes.

De plus, il est fort important de noter que cette coïncidence pour les pertes totales paraît toute fortuite et ne résulte nullement d'une considération d'ordre physique absolument générale. Il faut au contraire en chercher la raison dans les hypothèses sur lesquelles nous avons basé nos calculs, et principalement dans le fait que nous avons supposé le champ de fuite rigoureusement rectiligne et les enroulements parfaitement homogènes⁹⁾. Il ne fait pour nous aucun doute que la présence de prises plus ou moins bien réparties dans les enroulements, en causant d'importantes distorsions des champs de fuite, entraînerait fatalement une divergence appréciable entre les pertes totales vraies et celles que l'on déterminerait par la méthode indirecte.

VI.

Proposition d'une méthode d'essais directe.

Si la méthode indirecte de détermination des pertes supplémentaires doit être abandonnée, par quoi faut-il la remplacer?

Pour le calculateur, des formules dans le genre de nos formules (21) ou (26) nous paraissent être le chemin qui conduit le plus sûrement au but. Il conviendrait toutefois, pour nombre d'applications pratiques, de s'affranchir des hypothèses trop simplistes et de généraliser les formules en tenant compte des distorsions éventuelles du champ.

Pour les essais et surtout pour le contrôle des garanties au moyen de mesures, nous recommandons une nouvelle méthode que nous appellerons «directe». Le principe du montage revient à court-

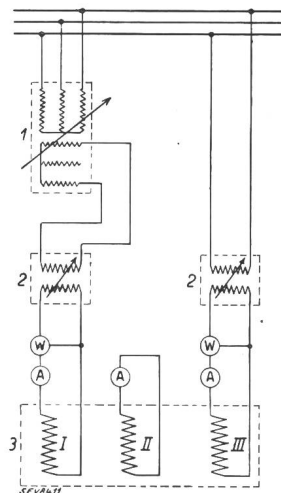


Fig. 5.
Schéma des connexions pour la mesure des pertes suivant la méthode «directe».
1 Régulateur d'induction.
2 Transformateur de réglage.
3 Transformateur à trois enroulements en essai.

circuiter l'un des enroulements, cependant que les deux autres sont alimentés par deux sources de courant possédant la même fréquence, mais susceptibles

⁹⁾ Voir paragraphe II.

d'être réglées à volonté dans leur grandeur et leur déphasage. Trois ampèremètres insérés dans les trois circuits assurent le contrôle des trois courants, qui définissent pleinement le régime du transformateur, cependant que deux wattmètres mesurent les puissances débitées par les deux sources, la somme algébrique de ces deux puissances donnant les pertes totales dans le cuivre du transformateur pour le régime correspondant. La fig. 5 représente une réalisation pratique du montage en question. Le réglage du déphasage entre les deux sources se fera le plus simplement au moyen d'un régulateur d'induction polyphasé. On conçoit aisément que le triple réglage des deux transformateurs à rapport variable et du régulateur d'induction permette d'ajuster les trois courants à n'importe quelle valeur fixée d'avance. La réalisation pratique sera grandement facilitée, si l'on adopte pour les valeurs des courants un sous-multiple des valeurs qu'ils devraient réellement avoir¹⁰). Il est également important de noter l'avantage qu'il peut y avoir, précisément lorsque les puissances mises en jeu sont faibles, à procéder au réglage des intensités des deux sources de courant, au moyen de simples impédances variables (résistances ou bobines de self) connectées en série. Par ce moyen le réglage de chaque impédance, c'est-à-dire de chaque source de courant, n'agit pratiquement que sur le courant qui parcourt l'enroulement correspondant, tandis que le réglage du déphasage par le régulateur d'induction n'agit que sur le courant qui parcourt l'enroulement court-circuité.

La valeur de la méthode «directe» n'a pas besoin de justification spéciale, puisque dans ce montage tous les courants et champs de fuite sont rigoureusement les mêmes que dans le fonctionnement normal.

VII.

Comparaisons de résultats d'essais effectués selon les méthodes directe et indirecte.

Pour pouvoir juger en toute objectivité de la valeur des deux méthodes d'essais, nous avons procédé à un certain nombre de mesures. Le transformateur utilisé à cet effet possédait trois enroulements dont les tensions respectives étaient 2200, 13 200, 66 000 V, la puissance triphasée nominale de chaque enroulement étant 1100 kVA.

Bien que le dit transformateur n'ait été prévu que pour 50 pér./s, toutes les mesures ont été effectuées à 100 pér./s afin de mieux mettre en évidence tous les phénomènes qui ont trait aux pertes supplémentaires. D'autre part, comme cela est toujours possible chaque fois que l'on a à effectuer avec des courants sinusoïdaux des mesures dans des circuits dont les éléments constitutifs (résistances,

¹⁰) Il n'existe à priori aucune raison pour que les pertes totales ne varient pas rigoureusement suivant le carré de chacun des courants parcourant les enroulements. On constate d'ailleurs que toutes les formules de pertes que nous avons établies contiennent soit des courants au carré, soit des doubles produits de courants. Enfin de nombreuses mesures ont pleinement confirmé ce point de vue.

selfs ou capacités) sont rigoureusement indépendants de la tension, nous avons utilisé une méthode de zéro avec un pont d'impédance, au lieu et place d'un wattmètre, dont la sensibilité nous a paru trop faible, eu égard au fort décalage des courants sur les tensions.

Les différentes mesures ainsi effectuées peuvent se résumer de la façon suivante:

1° On s'est donné arbitrairement un régime de fonctionnement bien déterminé $P_I P_{II} P_{III}$.

2° On a appliqué la méthode «directe». A cet effet, on a ajusté les trois courants aux valeurs définies par $P_I P_{II} P_{III}$ conformément aux indications du paragraphe VI, puis on a effectué les deux mesures de puissance et l'on en a déduit la valeur des pertes totales.

3° On a appliqué la méthode «indirecte». A cet effet, on a exécuté les trois essais en court-circuit des enroulements pris deux à deux et l'on en a déduit, au moyen des formules (1) les pertes totales correspondant au régime $P_I P_{II} P_{III}$.

4° Après avoir mesuré les résistances ohmiques des trois enroulements, on en a déduit les pertes ohmiques totales correspondant au régime $P_I P_{II} P_{III}$, puis on a rapporté à ces dernières les pertes obtenues par la méthode «directe» et celles obtenues par la méthode «indirecte».

Le tableau I est une récapitulation de quelques-unes de ces mesures.

Pertes totales mesurées par les méthodes «directe» et «indirecte» dans un transformateur à trois enroulements parfaitement équilibrés.

Tableau I.

P_I kVA	P_{II} kVA	P_{III} kVA	Pertes oh- miques	Pertes totales de la méthode		Écart en % sur les pertes supplémentaires
				directe	in- directe	
131	1080	1100	100	128,3	125,4	— 10,2 %
160	1090	1100	100	128,2	125,9	— 8,2 %
1100	550	1100	100	132,0	131,0	— 3,0 %
1100	1100	1100	100	139,0	141,5	+ 6,4 %

La dernière colonne donne en % l'écart sur les pertes supplémentaires déterminées par l'une ou l'autre méthode: par exemple avec le 1^{er} régime, les pertes supplémentaires par la méthode «directe» sont 28,3 et par la méthode «indirecte» 25,4, c'est-à-dire que ces dernières sont trop faibles de 10,2 %.

Toutes les mesures consignées dans le tableau I ont été exécutées sur un transformateur «normal», ou pour mieux dire sur un transformateur dont les trois enroulements, dépourvus de prises, sont parfaitement équilibrés.

Une deuxième série d'essais, en tous points analogues aux précédents, a été exécutée sur un transformateur dont l'un des enroulements (I) était intentionnellement très fortement déséquilibré par rapport aux deux autres (sa hauteur axiale n'était que la moitié de celle des deux autres). Les résultats de ces mesures sont consignés dans le tableau II. On y remarquera combien les pertes supplémentaires sont élevées, ce qui s'explique aisément par les champs de fuite anormaux dans la direction radiale.

Pertes totales mesurées par les méthodes «directe» et «indirecte» dans un transformateur à trois enroulements fortement déséquilibrés.

Tableau II.

P_I kVA	P_{II} kVA	P_{III} kVA	Pertes oh- miques	Pertes totales de la méthode		Ecart en % sur les pertes supplémentaires
				directe	in- directe	
136,8	1100	1092	100	129,1	135,9	+ 23,3
190,0	1096	1100	100	125,3	142,7	+ 68,3
1100	1100	1100	100	413	367	- 14,7
692	416	1100	100	264	217	- 28,6
384	1100	1100	100	196,2	189	- 7,5

La dernière colonne fait particulièrement bien ressortir, si on la compare à la colonne correspondante du tableau I, combien les erreurs de la méthode «indirecte» peuvent devenir importantes dès que les lignes du champ de fuite ne sont plus rigoureusement parallèles à l'axe. Ainsi les conclusions de la théorie se trouvent-elles pleinement vérifiées par l'expérience.

VIII.

Prescriptions CEI sur les pertes supplémentaires dans les transformateurs à trois enroulements.

Le fait que les transformateurs à trois et même plus de trois enroulements se sont toujours plus répandus pour l'accouplement simultané de plusieurs réseaux, justifie sans aucun doute la tendance actuelle d'éditer des prescriptions internationales pour le contrôle des pertes de ce genre de transformateurs.

La méthode «indirecte» classique préconisée par les Américains présente l'avantage d'être extrêmement simple et de n'exiger que des mesures identiques à celles qui sont en usage pour les transfor-

mateurs à deux enroulements. Par contre, il ressort de la présente étude qu'elle ne repose pas sur une base scientifique à l'abri de toute discussion. Elle n'est rigoureuse que dans un cas tout à fait idéal, dont la pratique peut éventuellement beaucoup s'écarter. Pour cette raison, nous ne pouvons pas recommander l'adoption d'une telle méthode.

La méthode «directe» que nous avons décrite, présente l'avantage d'être absolument rigoureuse, sans prêter à aucune contestation, puisqu'elle reproduit fidèlement les phénomènes tels qu'ils se passent réellement dans la marche normale du transformateur. On pourrait peut-être seulement lui reprocher une complexité qui est d'ailleurs plus apparente que réelle, car si le montage est un peu plus compliqué, tout calcul se trouve supprimé.

D'ailleurs, même l'argument d'une complexité trop grande ne nous paraît pas prévaloir sur celui d'une erreur de principe. Et pour les cas que l'on tiendrait absolument à traiter avec simplicité, nous préférierions que les garanties ne soient données que pour des fonctionnements avec 2 enroulements et que ces garanties ne soient contrôlées que par des essais en court-circuit normaux, où deux enroulements seulement sont intéressés.

IX. Annexe.

C'est un fait bien connu que les problèmes de pertes supplémentaires dans le cuivre d'un transformateur d'une part, et d'une machine d'autre part, présentent une analogie complète. Aussi les considérations précédentes peuvent-elles s'appliquer sans aucun changement aux conducteurs contenus dans une même encoche, lorsque ceux-ci sont parcourus par des courants de phase et de grandeur différentes. Le cas se présente par exemple dans les enroulements à pas raccourci.

Induktionsschmelzofen für Aluminium und seine Legierungen.

Von E. Kern-Zindel, Menziken.

621.365.52

Es wird die Installation eines Niederfrequenzinduktionsofens von 100 kW für das Schmelzen von Aluminium beschrieben. Bemerkenswert ist die Tatsache, dass das energieliefernde Werk bereit war, den Ofen an zwei Phasen des Drehstromnetzes anzuschliessen. Es werden einige Angaben über den Energieverbrauch gemacht.

L'auteur décrit une installation de four à induction à basse fréquence de 100 kW pour la fonte d'aluminium. Il y a lieu de relever spécialement que le distributeur d'énergie s'est déclaré prêt à raccorder le four à deux des phases du réseau triphasé. Pour terminer, l'auteur donne quelques indications sur la consommation d'énergie.

In letzter Zeit wurden Induktionsschmelzöfen, ähnlicher Bauart wie die bekannten Öfen zum Messingschmelzen, für Aluminium entwickelt. Es sind in der Hauptsache Niederfrequenzöfen von ca. 50 Per./s und 200...400 Volt Primärspannung. Gegenüber den Hochfrequenzöfen sind diese Öfen im Betrieb billiger. Kennzeichnend für den Induktionsofen ist die fortwährende Durchmischung des Bades infolge der elektrodynamischen Kräfte im Schmelzbad. Diese Durchmischung und die Tatsache, dass die höchste Temperatur im Innern des Schmelzbades liegt, bieten verschiedene metallurgische Vorteile, so dass der Induktionsschmelzofen überall da verwendet wird, wo besonders gute Qualität erzeugt werden soll.

Im Bestreben, die Qualität des Aluminiums und seiner Legierungen für Walz- und Pressprodukte zu verbessern, hat sich eine Aluminiumfabrik in der Zentralschweiz im Winter 1938 zu der Anschaffung eines Niederfrequenzschmelzofens entschlossen. Als geeignet wurde ein Ofen von ca. 100 kW Leistungsaufnahme und ca. 5000 kg Schmelzleistung in 24 Stunden befunden. Der einfachen Bedienung wegen wurde dieser Ofen, wie die Induktionsöfen im allgemeinen, als Kippofen gebaut. Der mechanische Teil des Ofens inklusive Kippvorrichtung wurde von der eigenen Kesselschmiede gebaut.

Für die Ausführung des elektrischen Teiles der Anlage waren zuerst Verhandlungen mit dem Energielieferant nötig. In entgegenkommender Weise be-