

**Zeitschrift:** Bulletin de l'Association suisse des électriciens  
**Herausgeber:** Association suisse des électriciens  
**Band:** 41 (1950)  
**Heft:** 15

**Artikel:** Die beiden Induktionsgesetze in Differentialform und ihre Anwendung auf die Unipolarinduktion  
**Autor:** Brunn, A. von  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-1058921>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 18.01.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# BULLETIN

## DE L'ASSOCIATION SUISSE DES ELECTRICIENS

### Die beiden Induktionsgesetze in Differentialform und ihre Anwendung auf die Unipolarinduktion

Von A. von Brunn, Zürich\*)

538.521.2

Nachdem der Verfasser schon in einer früheren Arbeit (s. Lit. Verz. Nr. 18) bewiesen hat, dass die induzierte elektromotorische Kraft (EMK) physikalische Realität besitzt, zeigt er in diesem Aufsatz, dass die induzierte EMK das Linienintegral einer induzierten Feldstärke ist, die an Hand von zwei relativistischen Gesetzen in jedem Falle genau berechnet werden kann. Das bekannte Integralgesetz der elektrischen Induktion wird so durch zwei Differentialgesetze ersetzt. An interessanten Beispielen wird die bequeme Anwendbarkeit dieser Gesetze demonstriert.

L'auteur, qui avait déjà démontré dans un précédent article (v. littérature n° 18) que la F.E.M. induite est une réalité physique, prouve qu'il s'agit de l'intégrale linéaire d'une intensité de champ induite, qui peut être calculée dans chaque cas avec précision, en appliquant deux lois relativistes. La loi bien connue de l'intégrale d'induction électrique est remplacée de la sorte par deux lois différentielles. D'intéressants exemples montrent que l'application de ces lois est très commode.

#### 1. Die verschiedenen Formen der elektrischen Induktion und des Induktionsgesetzes

##### a) Generelle Betrachtung

Wohl über wenige Naturgesetze ist soviel diskutiert und geschrieben worden, wie über «das» Induktionsgesetz. Das mag seinen Grund vor allem darin haben, dass es zwei verschiedene Induktionsvorgänge gibt, nämlich:

1. Die elektrische Induktion in Leitern, hervorgerufen durch zeitliche Variation der magnetischen Induktion eines magnetischen Feldes, und;
2. Die elektrische Induktion in Leitern, hervorgerufen durch deren Bewegen in zeitlich konstanten magnetischen Feldern.

Die Forscher sind von jeher bemüht gewesen, diese zwei verschiedenen Naturvorgänge unter ein gemeinsames Gesetz zu bringen. Dass diese Bemühungen zu keinem vollen Erfolg geführt haben, wird in dieser Arbeit gezeigt.

In vielen Lehrbüchern wird beim Induktionsvorgang von der «induzierten elektromotorischen Kraft» gesprochen. Diese viel umstrittene Grösse wird von den einen Autoren als eine physikalische Realität betrachtet, von andern aber als ein völlig unphysikalischer Begriff schroff abgelehnt<sup>1)</sup>. Es

\*) Eingang bei der Redaktion am 27. Dezember 1949.

<sup>1)</sup> Emde schreibt (Lit. Verz. Nr. 3): «Den Begriff der induzierten EMK muss man allerdings aus seinen Vorstellungen verbannen, wenn man klar sehen will. Man darf die ‚induzierte EMK‘ gewissermassen nur gedankenlos als stereotype Redewendung gebrauchen. Im Innern eines ‚induzierten Leiters‘ gibt es keine andere Spannung als den Ohmschen Spannungsverlust.» Auch Richter (s. Lit. Verz. Nr. 4) gibt keine nähere Erklärung darüber ab, was eigentlich unter der induzierten EMK zu verstehen ist. Er schreibt auf Seite 19: «Das Induktionsgesetz kann man auch als formal erweitertes Ohmsches oder Kirchhoffsches Gesetz auffassen, indem man dem magnetischen Schwund die Bedeutung einer EMK beilegt, der sogenannten induzierten EMK.» Auf Seite 23 findet man den sehr bemerkenswerten Satz: «Die Beiträge der EMK der Ruhe und der EMK der Bewegung zur gesamten induzierten EMK hängen von der Wahl des Koordinatensystems ab, von dem aus wir die Vorgänge betrachten (ihre Summe natürlich nicht)».

wurde schon in einer früheren Arbeit (s. Lit. Verz. Nr. 18, S. 114) gezeigt, dass die induzierte elektromotorische Kraft (EMK) physikalische Realität besitzt, und dass sie eine relativistische Grösse ist.

Wir sprechen bei der ersten Form der Induktion von der durch zeitliche Flussvariation induzierten EMK, bei der zweiten Form von der induzierten EMK der Bewegung. Die einen Forscher wollen alle Induktionswirkungen als durch Flussvariation hervorgerufen betrachten, andere wollen jede Form der elektrischen Induktion auf Bewegung zurückführen, und sprechen vom «Schneiden» von Leitern durch «bewegte» magnetische Kraftlinien.

Dass es nur mittels sehr gesuchter und komplizierter theoretischer Konstruktionen möglich ist, die beiden Formen der elektrischen Induktion unter ein gemeinsames Gesetz zu bringen, wird in dieser Arbeit gezeigt. Wir stellen zwei einfache Gesetze auf, die allen Anforderungen in vollem Umfange genügen.

Die hier formulierten Induktionsgesetze beschreiben die Induktionsvorgänge in Differentialform. Sie geben an, wie gross der kleinste Teilbetrag der induzierten EMK in jedem einzelnen Leiterelement des Stromkreises ist, während man an Hand der bekannten Formel der Variation des umschlungenen Flusses nur erfährt, wie gross die in einem geschlossenen Stromkreise total induzierte EMK ist<sup>2)</sup>.

Von besonderem Interesse ist die Kenntnis der differentiellen EMK für die *Energetik des elek-*

<sup>2)</sup> So schreibt Abraham (s. Lit. Verz. Nr. 5, Bd. I, S. 377): «Was die viel erörterte Frage nach dem ‚Sitz der elektromotorischen Kraft‘ anbelangt, so kann die zweite Hauptgleichung sie nicht beantworten. Bestimmt doch das Induktionsgesetz lediglich das Linienintegral von  $\mathcal{E}$  längs einer geschlossenen Kurve.» Etwas später folgt dann der unrichtige Satz: «Die induzierte Integralkraft verteilt sich auf Magnet und Drahtschlinge im Verhältnis ihrer Widerstände.» Hätte er statt «induzierte Integralkraft» geschrieben: die «totale Umlaufspannung», so wäre der Satz richtig.

trischen Stromkreises, da sie uns gestattet, die energetischen Vorgänge in einem Stromkreise bis in alle Einzelheiten zu verfolgen und zu berechnen.

Im folgenden sollen die bekannten Formen «des Induktionsgesetzes», wie sie in den Lehrbüchern der Physik und der Elektrotechnik enthalten sind, einer sorgfältigen Kritik unterzogen werden.

### b) Elektrische Induktion durch zeitliche Variation des magnetischen Flusses

Diese als erste Form der Induktion bekannte Naturerscheinung tritt z. B. im Transformator auf. Es lässt sich nachweisen, dass bei einer zeitlichen Änderung der im Eisenkern bestehenden magnetischen Induktion ein elektrisches Wirbelfeld entsteht, welches den Kern umschlingt und welches auch in die Wicklung des Transformators eindringt und dort die bekannte induzierte EMK erzeugt (s. Lit. Verz. Nr. 7 und 18). Die im ganzen Stromkreise total induzierte EMK der zeitlichen Flussänderung ist völlig unabhängig von der Länge und der Form dieses Stromkreises. Bedingung für das Entstehen einer resultierenden EMK ist nur, dass der Stromleiter den Fluss *umschlingt*. Befindet sich der Stromkreis *neben* dem Eisenkern, so werden in den einzelnen Stromkreiselementen ebenfalls Teil-EMKs induziert, ihre algebraische Summe bezogen auf den ganzen Stromkreis ist jedoch gleich Null (siehe Lit. Verz. Nr. 7). Das bekannte Gesetz der Induktion durch Flussänderung lautet:

«Ändert der von einem Stromkreise umschlungene magnetische Fluss seine Grösse, so entsteht im Stromkreise eine induzierte EMK, deren Grösse proportional der zeitlichen Variation des umschlungenen Flusses ist.»

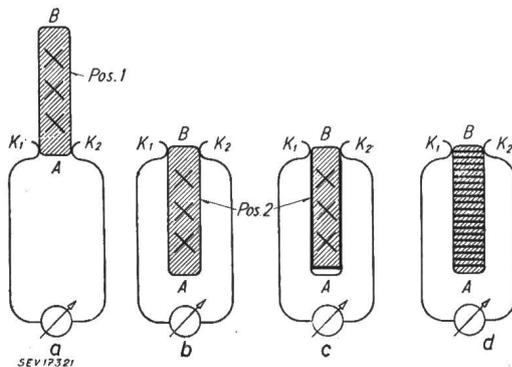


Fig. 1

Ein viel diskutiertes Problem: Anwendung des Induktionsgesetzes auf bewegte Systeme

- a Magnetstab, dessen magnetischer Kraftfluss neben dem Stromkreise vorbeifliesst
  - b wie a, doch wird der Stromkreis vom Kraftfluss umschlungen
  - c Anordnung nach b, jedoch mit Elektromagneten
  - d Anordnung mit lamelliertem Elektromagneten
- K<sub>1</sub>; K<sub>2</sub> Gleitkontakte

Man hat dieses Gesetz auch auf *bewegte* Systeme angewendet. Fig. 1 zeigt ein vielbesprochenes Beispiel dieser Art (s. Lit. Verz. Nr. 16).

Man denke sich einen Magnetstab, der senkrecht auf der Papierebene steht, dessen magnetischer Kraftfluss die Papierebene von vorne nach hinten durchsetzt. Dieser Stab bewegt sich zwischen einem metallenen Bügel, in dessen Stromkreis ein emp-

findliches Instrument eingebaut ist, aus der Position 1 (Fig. 1a) in die Position 2 (Fig. 1b und 1c). Dabei gleiten die Kontakte K<sub>1</sub> und K<sub>2</sub> des Bügels auf den blanken Seitenflächen des Magnetstabes, wodurch dauernd ein geschlossener Stromkreis gebildet wird.

Man sieht ohne weiteres ein, dass in der Position 1 (Fig. 1a) der magnetische Kraftfluss neben dem Stromkreise vorbeifliesst, während er in der Position 2 (Fig. 1b) vom Stromkreise umschlungen wird. Beim Verschieben des Magneten ist also nach dem Gesetz der Induktion durch Flussänderung die Bedingung für die Erzeugung einer EMK erfüllt, und es ist deshalb ein Ausschlag des Instrumentes zu erwarten. Das Experiment verläuft aber negativ: Es wird *keine* EMK der Flussvariation erzeugt. Das oben zitierte Gesetz versagt bei unserem Beispiel, es hat also *keine allgemeine Gültigkeit*.

Die unentwegten Verfechter der «Flussvariationstheorie» haben aber auch für diesen Fall ein Mittel ersonnen, um ihre versagende Theorie zu retten. Sie behaupten nämlich, dass beim Hineinschieben des Magneten in den Bügel der magnetische Fluss gar nicht umschlungen werde. Zur Beantwortung der Frage, wieviel Fluss umschlungen werde, müsse man den *materiellen Weg* verfolgen, den die Kontakte K<sub>1</sub> und K<sub>2</sub> auf dem Magneten zurücklegen (sog. substantieller Schwund). Es entsteht so ein Stromkreis, der (wie Fig. 1c zeigt) aus dem Bügel und der dick ausgezogenen Linie auf dem Magneten besteht. Dieser Stromkreis allerdings umschlingt den Fluss nicht, und somit scheint die Theorie gerettet. Dass aber in der Position 2 der magnetische Fluss eben doch umschlungen wird, kann man durch ein äusserst einfaches Experiment beweisen. Man nimmt nämlich statt des permanenten Stahlmagneten einen Elektromagneten, dessen Strom man nach dem Einschieben des Magneten in den Bügel ausschaltet, wobei ein kräftiger Ausschlag des Instrumentes beweist, dass der Fluss in der Position 2 (Fig. 1b und 1c) vor dem Ausschalten des Stromes allen theoretischen Konstruktionen zum Trotz eben doch umschlungen wurde. Um bei der Behandlung dieses Problems über den Begriff des Stromkreises im Klaren zu sein, kann man, wie in Fig. 1d gezeichnet, den Elektromagneten *lamellieren*. Der Stromkreis ist dann immer eindeutig definiert als Weg durch den Drahtbügel und diejenige Eisenlamelle, welche jeweils zwischen den Kontakten K<sub>1</sub> und K<sub>2</sub> liegt. Diese Kontakte sollen so breit sein, dass beim Verschieben des Magneten nie ein Unterbruch des Stromkreises stattfindet.

Dass das Gesetz von der Induktion durch zeitliche Änderung des umschlungenen Flusses den Schönheitsfehler hat, dass es über die Grösse der *differentiellen EMK* in den einzelnen Stromkreiselementen nichts aussagt, haben wir schon hervorgehoben.

### c) Elektrische Induktion durch Bewegen von Leitern im magnetischen Felde Der Kraftlinien-«schnitt»

In vielen Lehrbüchern ist die elektrische Induktion durch Bewegen von Leitern im magnetischen Felde etwa so formuliert:

«Bewegt man einen metallenen Stab in einem magnetischen Felde quer zu seiner Längsausdehnung und quer zur Richtung des Feldes, so entsteht in ihm eine induzierte EMK, deren Grösse proportional ist der Länge des Leiters, der Induktion (Liniendichte) des magnetischen Feldes und der Geschwindigkeit, mit welcher der Leiter im Felde bewegt wird» [s. Lit. Verz. Nr. 1<sup>3)</sup>; 6<sup>4)</sup>; 9<sup>5)</sup> und 17<sup>6)</sup>].

Andere Autoren schreiben auch: «Die im Leiter induzierte EMK ist proportional der Anzahl der in der Zeiteinheit vom Leiter geschnittenen Kraftlinien.» (Wie völlig unphysikalisch es ist, vom «Schneiden» der Kraftlinien zu reden, werden wir später sehen.)

Nun ist aber jede Geschwindigkeit eine relative Grösse, und es müsste, um die Grösse der relativen Geschwindigkeit des Leiters zum Felde genau bestimmen zu können, die Eigengeschwindigkeit des Feldes bekannt sein, falls man von einer solchen überhaupt sprechen darf.

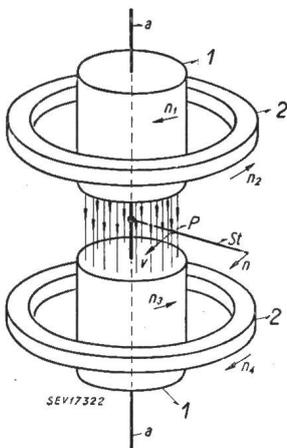


Fig. 2  
Anordnung zur Diskussion der Frage, ob bei einem rotierenden Magneten die Kraftlinien mitrotieren

- 1 Eisenzyylinder
- 2 Erregerspulen
- St Stab zwischen den zwei Zylindern
- P beliebiger Punkt des Stabes St im Magnetfeld
- a Achse
- v Geschwindigkeit des Punktes P
- n Drehzahl des Stabes St
- n<sub>1</sub>...n<sub>4</sub> Drehzahlen der Erregerspulen und der Eisenzyylinder

Die Fig. 2 soll dem Leser die Bedeutung der hier gestellten Frage recht deutlich vor Augen führen. Wir denken uns zwei Eisenzyylinder, die um eine gemeinsame Achse frei drehbar übereinander gelagert sind. Konzentrisch um jeden Eisenzyylinder sei je eine Erregerspule ebenfalls frei drehbar angeordnet. Durch (in der Fig. 2 nicht gezeichnete) Schleifringe werde jeder Erregerspule Gleichstrom zugeführt. Die Spulen erregen das System gleichsinnig, so dass ein magnetisches Feld entsteht, das von oben nach unten vom einen zum andern Zylinder übergeht und das sich im umgebenden Raume

schliesst. (In der Fig. 2 sind die Kraftlinien dieses Feldes nur zwischen den beiden Eisenzylindern eingezeichnet.) Es soll nun durch Drehen des zwischen den Eisenzylindern angebrachten Stabes St um die Achse a in diesem Stabe eine EMK der Bewegung induziert werden und die Frage lautet: «Welches ist für irgendeinen Punkt P des Stabes St (Fig. 2) die Geschwindigkeit v, die dieser Punkt relativ zum magnetischen Felde hat?»

Wenn wir vorerst annehmen, dass die Eisenzyylinder und die Erregerspulen relativ zur Erde stillstehen, so wird man geneigt sein anzunehmen, dass auch das magnetische Feld relativ zur Erde stillstehe, und somit wird man erklären, der Punkt P bewege sich relativ zum Felde mit der Geschwindigkeit v, die er relativ zur Erde besitze. Komplizierter wird das Problem, wenn wir z. B. nur die beiden Eisenzyylinder im gleichen Sinne, nicht aber die beiden Erregerspulen rotieren lassen. Hier ist man nicht mehr sicher, ob man annehmen darf, das Feld drehe sich mit den Eisenzylindern, oder es bleibe stehen, da es ja von den Erregerspulen erzeugt wird.

Man kann sich auch umgekehrt vorstellen, dass die Eisenzyylinder stillstehen und nur die Spulen rotieren. Nie wird man eine sichere Aussage über den Bewegungszustand des Feldes machen können.

Und nun wollen wir ein Experiment machen, das den Anhängern der Kraftlinienschnitttheorie etwelches Kopfzerbrechen bereiten dürfte. Wir lassen (wie dies in der Fig. 2 eingezeichnet ist), sowohl die Eisenzyylinder als auch die Erregerspulen mit den vier verschiedenen und entgegengesetzten Drehzahlen n<sub>1</sub>, n<sub>2</sub>, n<sub>3</sub> und n<sub>4</sub> rotieren. Wer an die physikalische Existenz der Kraftlinien glaubt, kommt nun zu dem folgenden Ergebnis:

Falls man annimmt, dass die Kraftlinien an die Eisenzyylinder gebunden seien, so muss durch die Rotation dieser Zylinder (nach Fig. 2) ein linksgängiges «Kraftlinienseil» gedreht werden.

Nimmt man aber an, dass die Kraftlinien an die Erregerspulen gebunden seien, so muss durch die Rotation dieser Spulen ein rechtsgängiges «Kraftlinienseil» gedreht werden.

Beides ist natürlich Unsinn. Diese Überlegung zeigt uns klar, dass die Kraftlinien keine physikalische Realität haben können, und dass deshalb alle Überlegungen, ob die Kraftlinien feststehen oder mitrotieren, wie sie z. B. Benischke<sup>7)</sup> in seinem Lehr-

<sup>3)</sup> Maxwell behandelt im Kapitel VIII auf Seite 223 die durch Bewegung induzierte Feldstärke. Er gibt aber für den Geschwindigkeitsvektor «G» keine genauere Definition.

<sup>4)</sup> Joos berechnet auf Seite 391 die beim Bewegen eines Leiters im magnetischen Felde entstehende elektrische Feldstärke. Auch hier ist «v» nicht weiter definiert als diejenige Geschwindigkeit, mit der sich der Leiter «im Felde» bewegt.

<sup>5)</sup> Kűpfmüller berechnet auf Seite 160 die elektrische Feldstärke, die in einem Leiter induziert wird, wenn er mit der Geschwindigkeit «v» durch ein magnetisches Feld bewegt wird. Auch hier fehlt eine genauere Definition von «v».

<sup>6)</sup> Th. Bödefeld und H. Sequenz schreiben auf Seite 14 ihres Buches: «Durch Schneiden von Feldlinien wird eine Spannung erzeugt, die sich ergibt aus Feldstärke B mal Länge l des schneidenden Leiters mal Schnittgeschwindigkeit v.» Unter v wird die Geschwindigkeit verstanden, mit welcher der Leiter die magnetischen Kraftlinien «schneidet». Da diese Kraftlinien nur gedachte Linien sind, die keine physikalische Existenz haben, so ist die Grösse v physikalisch nicht definiert.

<sup>7)</sup> Welch widerspruchsvolle Stellung Benischke zur Frage des Kraftlinien-«schneidens» und zum «Bewegen» von Kraftlinien einnimmt, mag eine Zusammenstellung einiger Äusserungen aus seinem Buche zeigen:

In einer Fussnote auf Seite 4 schreibt er: «Die Kraftlinien sind also nur gedachte oder gezeichnete Richtungen, nicht etwa Fäden, die an der Masse befestigt sind. Infolgedessen sind Untersuchungen darüber, ob sich die Kraftlinien mitdrehen oder nicht, wenn man die Masse (Magnet) dreht, von vornherein aussichtslos, indem dabei schon die Vorstellung unterlegt wird, als seien die Kraftlinien wirkliche Fäden. Die fortschreitende Bewegung eines Magneten oder eines Ankers bewirkt natürlich eine fortschreitende Änderung des Feldes; mehr kann darüber nicht ausgesagt werden, ohne dass man weitergehende willkürliche Vorstellungen hinzu tut. Aber es ist sehr anschaulich und für die Darstellung der physikalischen Gesetze sehr nützlich, sich die Kraftlinien in bildlicher Weise

(Fortsetzung der Fussnote auf Seite 556)

buche anstellt (s. Lit. Verz. Nr. 2), völlig zwecklos sind.

Mit diesen Betrachtungen ist aber die Frage, mit welcher Geschwindigkeit sich der Punkt  $P$  (Fig. 2) im Felde bewegt, und wie gross die im Stabe  $St$  induzierte EMK sei, keineswegs gelöst, sondern eher komplizierter geworden. Da die Kraftlinien keine physikalische Existenz haben, kann auch die im Leiter induzierte EMK nicht proportional der Anzahl, der in der Zeiteinheit von ihm «geschnittenen» Kraftlinien sein.

Die Fig. 2 dürfte dem Leser klar gemacht haben, dass man weder von ruhenden noch von bewegten magnetischen Feldern sprechen kann. Bei einem Felde kann sich nur die Richtung und die Stärke ändern. Von Verschiebungen der Kraftlinien zu sprechen, ist physikalisch sinnlos. Welche Geschwindigkeit dem Punkte  $P$  (Fig. 2) zugeschrieben werden muss, um die im Stabe  $St$  induzierte EMK zu berechnen, werden wir im Abschnitt 2 zeigen.

Nach diesen Ausführungen wird es dem Leser ohne weiteres klar sein, dass die von Benischke vertretene Ansicht, dass auch beim Transformator die Induktionswirkung durch «bewegte» und die Leiter «schneidende» Kraftlinien zustandekomme, physikalisch unhaltbar ist.

Man kann somit eine ganze Gruppe von Induktionswirkungen nicht durch «Bewegung» magnetischer Felder oder durch Kraftlinien-«schnitt» erklären. Man kann also nicht alle Induktionserscheinungen unter ein Gesetz bringen.

#### d) Gibt es eine induzierte elektromotorische Kraft oder nur magnetischen Schwund?

Während viele Autoren von der induzierten elektromotorischen Kraft als einer physikalischen Realität sprechen (s. z. B. Lit. Verz. Nr. 1, 5, 6, 7, 9 und 18), wird sie von andern strikte abgelehnt. Emde (s. Lit. Verz. Nr. 3) begründet seine Ablehnung damit, dass im Leiterinnern nie eine andere Feldstärke als die zur Deckung des Ohmschen Spannungsverlustes nötige herrsche, dass somit für eine induzierte Feldstärke kein Platz vorhanden sei. Dabei hat Emde übersehen, dass die Ohmsche Feldstärke in einem induzierten Leiter in den weitaus meisten Fällen nur die resultierende Feldstärke aus einer induzierten und aus einer statischen Feldstärke ist (s. Lit. Verz. Nr. 7, 8 und 18). Emde vermeidet auch den Begriff der induzierten EMK und spricht nur

(Fortsetzung der Fussnote von Seite 555)

als Fäden vorzustellen, die sich mitdrehen, wenn ein Magnet um seine Achse gedreht wird.»

Auf Seite 206 steht: «Die Erzeugung einer Potentialdifferenz in irgendeinem Leiter findet immer dann statt, wenn dieser Leiter magnetische Kraftlinien schneidet.» Hierzu die Fussnote: «Wie auf Seite 4 betont wurde, sind die Kraftlinien nicht etwa wirkliche Fäden, sondern Krafrichtungen. Daher ist die Ausdrucksweise vom Schneiden der Kraftlinien nur eine bildliche, aber wegen ihrer Anschaulichkeit sehr nützliche.»

Auf Seite 206 heisst es: «Dieses Gesetz gilt ohne jede Einschränkung, d. h. es ist gleichgültig, ob das Schneiden der Kraftlinien durch Bewegung des Leiters in einem ruhenden magnetischen Felde, oder durch Bewegung der Kraftlinien gegen einen ruhenden Leiter geschieht, und es ist ferner gleichgültig, ob die Kraftlinien von Magneten oder Strömen herühren.»

vom magnetischen Schwunde. Wir werden in dieser Arbeit beweisen, dass die induzierte EMK physikalische Realität besitzt. Allerdings ist sie eine relativistische Grösse.

## 2. Die beiden Induktionsgesetze in relativistischer Differentialform

Nachdem wir im Abschnitt 1. gezeigt haben, dass man die Induktionsvorgänge nicht in einem einzigen Gesetze zusammenfassen kann, sondern dass zur exakten Beschreibung dieser Vorgänge zwei Gesetze nötig sind, wird es den Leser interessieren, wie diese Gesetze lauten.

### a) Induzierung elektrischer Felder durch zeitlich variierende magnetische Felder (Erstes Induktionsgesetz)

Ändert sich in einem Raumpunkte  $P_1$  (Raumelement  $dV$ ) der relativ zum Koordinatensystem des Beobachters ruht, die Grösse oder die Richtung der magnetischen Induktion  $B$  zeitlich, so tritt in einem benachbarten Punkte  $P_2$  eine differentielle induzierte elektrische Feldstärke  $d\vec{K}_{tr}$  (Induktion der zeitlichen Flussvariation) auf, die sich nach der folgenden Formel berechnet:

$$d\vec{K}_{tr} = - \frac{\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \times \vec{r}}{4 \pi r^3} dV \quad (1)$$

Hierin bedeuten:

- $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  die zeitliche Variation des Vektors  $\vec{B}$  der magnetischen Induktion im Raumpunkte  $P_1$
- $r$  den Abstand zwischen den Punkten  $P_1$  und  $P_2$
- $dV$  Raumelement im Punkte  $P_1$

Wir versehen den Vektor dieser induzierten Feldstärke mit dem Index  $tr$ , weil diese in typischer Form beim (ruhenden) Transformator auftritt.

Die induzierte differentielle elektrische Feldstärke  $d\vec{K}_{tr}$  steht immer senkrecht zu der Ebene, die durch den Vektor  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  und die Strecke  $\vec{r}$  gelegt werden kann. Blickt man in der Richtung des Vektors  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ , so ist die induzierte Feldstärke immer dem Linksdrehsinn zugeordnet. Daher in der Gl. (1) das Minuszeichen.

Man kann die Gl. (1) aus dem Biot-Savartschen Gesetz mit Hilfe des Energieprinzips herleiten (s. Lit. Verz. Nr. 7).

Die Gl. (1) gilt auch dann, wenn der  $\vec{B}$ -Vektor nicht seine Grösse (absoluten Wert), sondern nur seine Richtung zeitlich ändert. Es ändert sich auch dann die Grösse derjenigen Komponente von  $\vec{B}$ , die auf  $\vec{r}$  senkrecht steht und deren zeitliche Variation für die Grösse von  $d\vec{K}_{tr}$  allein massgebend ist.

Für die im Punkte  $P_2$  total induzierte elektrische Feldstärke  $\vec{K}_{tr}$  der Ruhe, gilt die Integralformel:

$$\vec{K}_{tr} = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \times \vec{r}}{r^3} dV \quad (2)$$

wobei sich das Integral über den ganzen, den Punkt  $P_2$  umgebenden Raum erstreckt, in welchem sich die magnetische Induktion zeitlich ändert. Diese Feldstärke  $\vec{K}_{tr}$  wird unter allen Umständen induziert, also unabhängig davon, ob der Raum in welchem  $P_2$  liegt leer, oder mit isolierender oder leitender Materie erfüllt ist.

*b) Induzierung elektrischer Felder durch Bewegen von Leitern in zeitlich konstanten magnetischen Feldern (Zweites Induktionsgesetz)*

Bewegt sich ein metallisches Leiterelement (Dielektrizitätskonstante =  $\infty$ ) in einem für den Beobachter zeitlich konstanten Magnetfeld mit der Induktion  $B$  relativ zum Koordinatensystem des Beobachters mit der Geschwindigkeit  $v$ , so entsteht in diesem Leiterelement eine induzierte elektrische Feldstärke  $\vec{K}_{bew}$  (Induktion der Bewegung), die sich nach der folgenden Formel berechnet:

$$\vec{K}_{bew} = \vec{B} \times \vec{v} \quad (3)$$

Diese induzierte elektrische Feldstärke  $\vec{K}_{bew}$  steht immer senkrecht zu der Ebene, die durch die Vektoren  $\vec{B}$  und  $\vec{v}$  gelegt werden kann. Ihr Richtungssinn ist durch die «Rechte-Hand-Regel» festgelegt:

«Hat der Zeigefinger der rechten Hand die Richtung von  $\vec{B}$ , der Daumen die Richtung von  $\vec{v}$ , so gibt der ausgestreckte Mittelfinger die Richtung von  $\vec{K}_{bew}$  an.»

Wir müssen besonders betonen, dass das zweite Induktionsgesetz nach Gl. (3) seine Gültigkeit auch dann behält, wenn ein metallisches Leiterelement relativ zum Koordinatensystem des Beobachters sich in seinem eigenen Magnetfeld bewegt. Dies ist z. B. der Fall, wenn ein Magnetstab sich translatorisch bewegt, oder wenn er um seine eigene Achse rotiert.

Besteht das Stromkreis- oder «Leiter»-Element nicht aus Metall, sondern ist es ein Dielektrikum, so wird eine kleinere Feldstärke der Bewegung induziert, als der Gl. (3) entsprechen würde. Die im bewegten Dielektrikum induzierte Feldstärke  $\vec{K}'_{bew}$  ist kleiner als die nach Gl. (3) berechnete Feldstärke  $\vec{K}_{bew}$ . Sie ergibt sich aus der Gl. (4) zu:

$$\vec{K}'_{bew} = \vec{K}_{bew} \cdot \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \quad (4)$$

worin  $\epsilon_r$  die relative Dielektrizitätskonstante des Dielektrikums gegenüber dem leeren Raume ist.

Bewegt sich ein Leiterelement relativ zum Koordinatensystem des Beobachters in einem magnetischen Felde, während dieses Feld oder ein benachbartes magnetisches Feld eine zeitliche Änderung erfährt, so treten beide Formen der Induktion gleichzeitig auf und es entsteht eine resultierende induzierte Feldstärke  $\vec{K}_i$ , die sich nach der allgemeinen Formel

$$\vec{K}_i = \vec{K}_{tr} + \vec{K}_{bew} \quad (5)$$

berechnet.

*c) Die induzierte elektromotorische Kraft (EMK  $E_i$ )*

Unter der induzierten elektromotorischen Kraft  $E_i$  verstehen wir das Linienintegral der resultierenden induzierten elektrischen Feldstärke  $\vec{K}_i$  längs eines Stromkreiselementes, wobei die Länge jedes Elementes  $ds$  multipliziert wird mit derjenigen Komponente von  $\vec{K}_i$ , die in die Richtung des Stromkreiselementes fällt. Die zwischen zwei Punkten 1 und 2 eines beliebigen Weges induzierte elektromotorische Kraft  $E_{i,2}$  berechnet sich nach der Formel

$$E_{i,2} = \int_1^2 \vec{K}_i \cdot d\vec{s} \quad (6)$$

*d) Die Spannung  $U^*$*

Da die normierte Spannung  $U$  zwischen zwei Punkten  $P_1$  und  $P_2$  im allgemeinen keinen eindeutigen Wert besitzt <sup>8)</sup>, so haben wir die Spannung  $U^*$  eingeführt (s. Lit. Verz. Nr. 18).

Unter der Spannung  $U^*$  verstehen wir das Linienintegral der resultierenden elektrischen Feldstärke  $\vec{K}_{res}$  längs eines ausgezeichneten Weges (bei drahtförmigen Leitern z. B. ist  $U^*$  die Spannung längs des Leiters zwischen zwei Punkten  $P_1$  und  $P_2$ ).

Bei metallischen Leitern ist die Spannung  $U^*$  nichts anderes als die Ohmsche Spannung  $U_R$  zwischen zwei Punkten  $P_1$  und  $P_2$ .

Im Dielektrikum jedoch ist  $U^*$  die längs eines ausgezeichneten Weges zwischen zwei Punkten  $P_1$  und  $P_2$  gebildete algebraische Summe aus induzierter elektromotorischer Kraft (EMK  $E_i$ ) und der von statischen Ladungen herrührenden Spannung  $U_c$ . Es ist also:

in metallischen Leitern

$$U^*_{1,2} = \int_1^2 \vec{K}_{res} \cdot d\vec{s} = U_{R,2} \quad (7)$$

in Dielektrika

$$U^*_{1,2} = \int_1^2 \vec{K}_{res} \cdot d\vec{s} = E_{i,2} + U_{c,2} \quad (8)$$

Durch die Einführung der Spannung  $U^*$  werden Missverständnisse vermieden.

*e) Die elektrische Umlaufsspannung*

Das Gesetz von der elektrischen Umlaufsspannung besagt, dass bei jedem offenen oder geschlossenen elektrischen Stromkreise die algebraische Summe aller Spannungen  $U^*$  der einzelnen Leiterelemente des Stromkreises gleich ist der algebraischen Summe aller

<sup>8)</sup> Wie verschieden die Spannung  $U$  zwischen denselben zwei Punkten eines Wechselstromsystems sein kann, hat der Verfasser an einem interessanten Beispiel (s. Lit. Verz. Nr. 18, S. 119) gezeigt. Auf dem einen Weg gemessen beträgt die Spannung zwischen denselben zwei Punkten Null Volt, auf dem andern Wege wird eine Spannung von 1000 V zwischen den gleichen Punkten festgestellt. Die Berührung der zwei Punkte von der einen Seite aus ist völlig harmlos, von der andern Seite aus aber äusserst lebensgefährlich.

im Stromkreise induzierten elektromotorischen Kräfte :

$$\sum (U^*) = \sum (E_i) \quad (9)$$

Treten in einem Stromkreise noch elektromotorische Kräfte *chemischen* oder *thermischen* Ursprungs, sog. *eingepögte elektromotorische Kräfte* ( $E_i$ ) auf, so sind diese auf der rechten Seite der Gl. (9) einzutragen.

### 3. Die Beweise für die Richtigkeit der beiden Induktionsgesetze

#### a) Das Energieprinzip

Unsere Beweise für die Richtigkeit der hier formulierten zwei Induktionsgesetze stützen sich vor allem auf zwei unbestrittene Prinzipien, nämlich auf das Energieprinzip<sup>9)</sup> und auf das Prinzip von der Kontinuität der Energieströmung.

Das erste Prinzip besagt, dass wenn sich mechanische Energie in elektrische umwandelt, ein Teil der verschwundenen mechanischen Energie sich in elektrische Energie und der Restbetrag dieser Energie sich in Wärme umwandelt. Verloren geht aber von der gesamten Energiemenge nichts. Analog verhält es sich, wenn sich elektrische Energie in mechanische verwandelt. Die Summe der gewonnenen mechanischen Energie plus der als Wärme erscheinenden Energie ist gleich der verschwundenen elektrischen Energiemenge.

#### b) Das Prinzip von der Kontinuität der Energieströmung

Dieses wenig beachtete Prinzip ist eine der wichtigsten Stützen unserer Beweisführungen. Es besagt, dass die durch mechanische Bewegung erzeugte elektrische Energie immer genau an derjenigen Stelle erscheinen muss, an welcher die mechanische Energie verschwindet und umgekehrt, und zwar deshalb weil die Energie sich nicht sprunghaft im Raume fortbewegen kann.

#### c) Der Poyntingsche Vektor<sup>10)</sup>

Während sich mechanische Energie (wenn wir von reinen Gravitationsvorgängen absehen) nur unter der Mitwirkung von Materie durch den Raum fortbewegen kann, besitzt die elektrische Energie die Fähigkeit, den *leeren Raum* durchströmen zu können. Das bekannteste Beispiel ist die gewöhnliche elektrische Leitung. Die Energie strömt *nicht* in den Drähten, sondern *zwischen* den Drähten und im umgebenden Raume. Nur die Ohmsche *Verlustenergie dringt* in die Drähte ein und erwärmt diese.

Legen wir quer zum Energiestrom eine Fläche, so ist der Energiebetrag, der pro Zeiteinheit die Flächeneinheit dieser Fläche durchsetzt, die Strömungs-

dichte. Diese Strömungsdichte ist mathematisch bestimmt durch den *Poyntingschen Vektor*  $\vec{S}$ , der sich an Hand der folgenden Gleichung berechnen lässt:

$$\vec{S} = \vec{H} \times \vec{K} \quad (10)$$

Besteht in einem Raumpunkte  $P$  ein magnetisches und ein elektrisches Feld von der Stärke  $\vec{H}$  bzw.  $\vec{K}$ , so findet in diesem Raumpunkte eine elektrische Energieströmung  $S$  statt, die sich berechnet aus der magnetischen Feldstärke  $\vec{H}$  mal die Komponente des elektrischen Feldes  $\vec{K}$ , die auf  $\vec{H}$  senkrecht steht. Die *Energie* strömt immer *senkrecht* zu derjenigen Ebene, die durch die Vektoren  $\vec{H}$  und  $\vec{K}$  gelegt werden kann. Ihre *Richtung* ergibt sich aus der *«Linke-Hand-Regel»*:

Hat der Zeigefinger der linken Hand die Richtung von  $\vec{H}$ , der zu diesem senkrecht ausgestreckte Mittelfinger die Richtung von  $\vec{K}$ , so gibt der ausgestreckte Daumen die Richtung der Energieströmung  $\vec{S}$  (Poyntingscher Vektor) an.

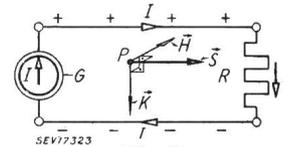


Fig. 3

Poyntingscher Vektor  $\vec{S}$  der Energieströmungsdichte bei einer elektrischen Leitung

G	Gleichstromgenerator
R	Ohmscher Widerstand
I	Strom
$\vec{K}$	elektrisches Feld
$\vec{H}$	magnetisches Feld
$\vec{S}$	Strömungsvektor der Energie
P	beliebiger Punkt im Raume

Fig. 3 stellt eine elektrische Leitung dar. Links ist der Gleichstrom-Generator  $G$ , rechts ein Ohmscher Widerstand  $R$ . Der Strom  $I$  fließt in der angegebenen Richtung. Der obere Draht ist positiv (+), der untere negativ (-) geladen, so dass das elektrische Feld  $\vec{K}$  von oben nach unten gerichtet ist. Aus der Stromrichtung ergibt sich die Richtung des magnetischen Feldes  $\vec{H}$ , das von vorne nach hinten gerichtet ist (Fig. 3). An Hand der Linken-Hand-Regel ergibt sich der Strömungsvektor  $\vec{S}$  der elektrischen Energie in der Richtung vom Generator zum Ohmschen Verbraucher.

Ein weiteres Beispiel stellt einen Einphasentransformator dar (Fig. 4a), der mit  $\cos \varphi = 1$  belastet sei. Im Moment unserer Betrachtung möge der magnetische Fluss  $\Phi$  im Kern  $I$  von oben nach unten gerichtet sein und sehr stark abnehmen. Es entsteht dann um den Kern ein elektrisches Wirbelfeld  $\vec{K}$ , das den Kern von oben gesehen *im Sinne des Uhrzeigers* umfließt. Für den Punkt  $A$  (Fig. 4a) zwischen den Spulen ist der Feldvektor  $\vec{K}$  des induzierten Ringfeldes in der Fig. 4b eingetragen. (Auch der Vektor  $\vec{H}$  des magnetischen Streufeldes und des Poyntingschen Vektors  $\vec{S}$  sind dort eingezeichnet.) Der Strom  $I_1$  in der (inneren) Primärspule  $P$  hat die dem induzierten elektrischen Felde  $\vec{K}$  entgegen-

<sup>9)</sup> Das Energieprinzip stammt wie alle Naturgesetze aus der Empirie. Seine Gültigkeit hat sich bei allen Naturvorgängen, die energetisch nachgerechnet werden konnten, bewährt. Ein Beweis für seine Gültigkeit kann nicht erbracht werden. Deshalb kann auch die Unmöglichkeit eines Perpetuum mobile nicht bewiesen werden.

<sup>10)</sup> Siehe Lit. Verz. Nr. 5, Bd. I., S. 307.

gesetzte Richtung, der Strom  $I_2$  in der (äusseren) sekundären Spule  $S$  fliesst mit dem elektrischen Felde, (da er ja von diesem erzeugt wird). Beide Ströme erzeugen ein magnetisches Streufeld  $\vec{H}$ , welches zwischen den Spulen von oben nach unten gerichtet ist. Das induzierte elektrische Wirbelfeld  $\vec{K}$  und das magnetische Streufeld  $\vec{H}$  bestimmen den Poyntingschen Vektor  $\vec{S}$ , d. h. die Richtung und Grösse der Energieströmung von der Primär- zur Sekundär-Spule (Fig. 4 a und 4b).

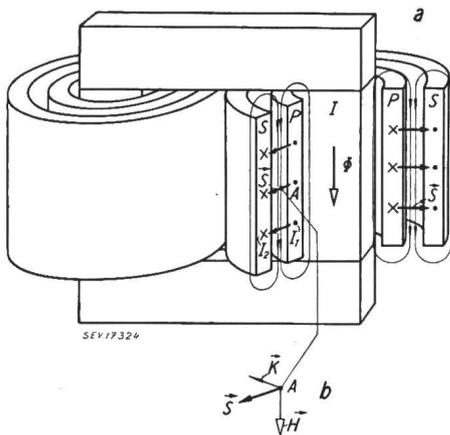


Fig. 4

Erläuterung der Energieströmung von der Primär- zur Sekundärseite beim Transformator mittels des Poyntingschen Vektors

- $\vec{K}$  induziertes elektrisches Wirbelfeld
- $\phi$  magnetischer Fluss im Eisenkern
- A beliebig gewählter Punkt
- $\vec{H}$  magnetisches Streufeld
- $\vec{S}$  Poyntingscher Vektor
- $I_1; I_2$  Strom
- P Primärspule
- S Sekundärspule

Man ersieht daraus, dass der Streuung beim Transformator eine energetisch sehr wichtige Aufgabe zukommt, indem sie beim Energietransport von der Primär- zur Sekundärseite mitbeteiligt ist.

d) Die dynamische Feldstärke

Zur bequemen Berechnung der energetischen Verhältnisse in elektrischen Systemen bedürfen wir noch zweier Grössen:

Unter der dynamischen Feldstärke  $\vec{K}_d$  verstehen wir die vektorielle Differenz zwischen der induzierten Feldstärke  $\vec{K}_i$  und der resultierenden Feldstärke  $\vec{K}_{res}$  in einem Raumpunkte:

$$\vec{K}_d = \vec{K}_i - \vec{K}_{res} \tag{11}$$

e) Die dynamische Klemmenspannung und ihre energetische Bedeutung

Bilden wir zwischen zwei Punkten  $P_1$  und  $P_2$  eines elektrischen Stromkreises das Linienintegral der dynamischen Feldstärke  $\vec{K}_d$  längs eines ausgezeichneten Weges, so erhalten wir die dynamische Klemmenspannung  $V_{1,2}$  zwischen diesen zwei Punkten:

$$\underline{V_{1,2}} = \int_1^2 \vec{K}_d \vec{ds} = \int_1^2 \vec{K}_i \vec{ds} - \int_1^2 \vec{K}_{res} \vec{ds} = \underline{E_{i1,2}} - U^*_{1,2} \tag{12}$$

Wir können hier zwei Fälle unterscheiden:

Integrieren wir bei einem Stromkreise über ein metallenes Leiterstück vom Punkte  $P_1$  zum Punkte

$P_2$ , so erhalten wir für die dynamische Klemmenspannung  $V_{1,2}$  nach Gleichung (7) und (12):

$$\underline{V_{1,2}} = \underline{E_{i1,2}} - U_{R1,2} \tag{13}$$

wobei  $U_{R1,2}$  der Ohmsche Spannungsverlust zwischen diesen zwei Punkten ist. Integrieren wir aber bei einem offenen Stromkreise über das Dielektrikum vom Punkte  $P_1$  nach dem Punkte  $P_2$ , so erhalten wir für  $V_{1,2}$  nach Gl. (8) und (12):

$$\underline{V_{1,2}} = E_{i1,2} - (E_{i1,2} + U_{c1,2}) = -U_{c1,2} \tag{14}$$

Multiplizieren wir die dynamische Klemmenspannung  $V_{1,2}$  eines Leiterelementes mit dem in ihm fliessenden Strome  $I$ , so erhalten wir die Leistungsgleichung für die in diesem Leiterelement total erzeugte oder verbrauchte elektrische Leistung  $P_{1,2}$ :

$$\underline{P_{1,2}} = \underline{V_{1,2}} \cdot I \tag{15}$$

$P_{1,2}$  ist also diejenige elektrische Leistung, die das Leiterelement abgibt, wenn wir von der in ihm total erzeugten elektrischen Leistung die in ihm total verbrauchte elektrische Leistung abziehen. Erzeugte Leistungen werden positiv, verbrauchte negativ gezählt.

f) Die allgemeine Spannungs- und Leistungs-Gleichung des elektrischen Stromkreises

Das Gesetz von der elektrischen Umlaufspannung lautet nach Gl. (9) für jeden Stromkreis:

$$\underline{\sum (U^*)} = \underline{\sum (E_i)} \tag{16}$$

In jedem Stromkreise ist nach Gl. (12) die algebraische Summe aller dynamischen Klemmenspannungen:

$$\underline{\sum (V)} = \underline{\sum (E_i)} - \underline{\sum (U^*)} \tag{17}$$

Setzen wir in Gl. (17) die Gl. (16) ein, so ergibt sich der einfache Ausdruck:

$$\underline{\sum (V)} = 0 \tag{18}$$

oder

In jedem elektrischen Stromkreise (gleichgültig ob offen oder geschlossen) ist die algebraische Summe aller dynamischen Klemmenspannungen jederzeit gleich Null. Multiplizieren wir diese dynamischen Klemmenspannungen  $V$  mit dem im Stromkreise fliessenden Strome  $I$ , so erhalten wir die allgemeine Leistungsgleichung des elektrischen Stromkreises:

$$\underline{\sum (V \cdot I)} = 0 \tag{19}$$

Die algebraische Summe aller im ganzen Stromkreise erzeugten und verbrauchten elektrischen Leistungen ist jederzeit gleich Null.

g) Elektrische Induktion in einem ruhenden System und dessen Energetik

In Fig. 5. stellt  $A_0$  den Schnitt durch den sehr grossen runden Eisenkern eines Einphasentransformators dar. Der zweite Kern, der sich weiter weg befindet und auf welchem die Primärwicklung ange-

bracht ist, ist in der Figur nicht dargestellt. In diesen Kernen und den Jochen pulsiert ein kräftiger magnetischer Wechselfluss, welcher in dem den Kern umschlingenden Stromkreise eine totale EMK von 340 V (!) induziert (es handelt sich also um einen sehr grossen Transformator). Dieser Stromkreis besteht aus einem Ohmschen Widerstand  $R$  (Pos. 1) von  $5 \Omega$ , einer verlustfreien Drosselspule  $L$  (Pos. 2) mit einer Reaktanz von  $5 \Omega$  und aus einem Einphasen-Asynchronmotor (Pos. 3), der einen Impedanzwert von  $7,07 \Omega$  bei einem Phasenwinkel zwischen  $U$  und  $I$  von  $-45^\circ$  hat.

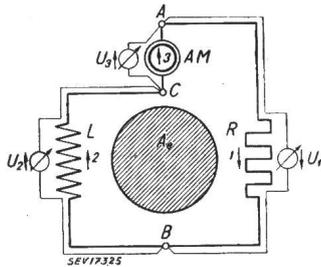


Fig. 5  
Elektrische Induktion durch zeitliche Flussänderung in einem kombinierten Stromkreis und deren paradoxe Auswirkungen  
 $A_0$  Querschnitt eines grossen Eisenkernes  
 $R$  Ohmscher Widerstand  
 $L$  Drosselspule  
 $AM$  Einphasen-Asynchronmotor

Der das ganze System durchfliessende Strom  $I$  hat eine Stärke von 24 A. In der Fig. 6 stellen die Positionen  $a, b$  und  $c$  die  $U$ -Diagramme der drei Objekte (Pos. 1...3) der Fig. 5 dar. Die Spannungen  $U_1 \dots U_3$  werden an den Voltmetern (Pos. 1...3) der Fig. 5 gemessen und beziehen sich im Diagramm (Fig. 6) auf die im Schema (Fig. 5) eingetragenen Bezugspfeile (die einen einheitlichen Umlaufsinn festlegen). Dasselbe gilt auch vom Strome  $I$ , der in allen Positionen der Fig. 6 als derselbe Vektor  $I$  erscheint. (Um die Spannungen  $U$  der drei Objekte möglichst genau zu erfassen, sind die Voltmeterdrähte den Leitungsdrahten eng nachgeführt.)

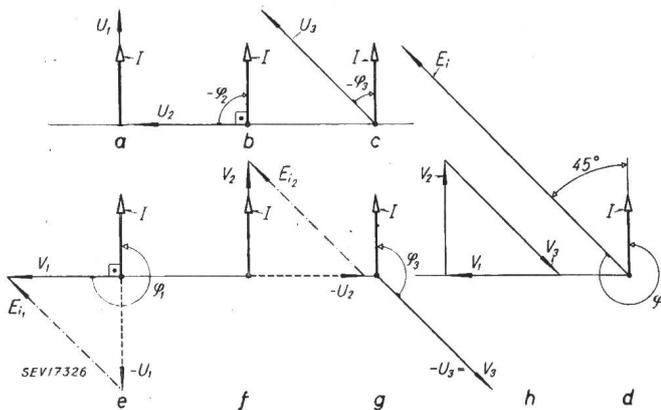


Fig. 6  
Vektordiagramme des in Fig. 5 dargestellten elektrischen Systems

Betrachten wir die  $U$ -Diagramme (Fig. 6a, b, c) der drei Objekte Positionen 1...3 (Fig. 5) vom energetischen Standpunkte aus, so kommen wir zu den folgenden Ergebnissen:

Der *Ohmsche Widerstand*  $R$ , Pos. 1 (Fig. 5), arbeitet rein ohmsch;  $U$  und  $I$  liegen genau in Phase (Fig. 6a). Er verbraucht eine elektrische Wirkleistung von:

$$U_1 I = 120 \text{ V} \cdot 24 \text{ A} = \underline{2880 \text{ W}}$$

Die *Drosselspule*  $L$ , Pos. 2 (Fig. 5), arbeitet rein induktiv; die Spannung  $U_2$  (von 120 V) eilt dem Strome  $I$  um  $90^\circ$  vor (Fig. 6b). Die Drosselspule «verbraucht» eine elektrische Blindleistung von:

$$120 \text{ V} \cdot 24 \text{ A} = \underline{2880 \text{ Var}}$$

Der *Asynchronmotor*  $AM$ , Pos. 3 (Fig. 5), arbeitet motorisch - induktiv mit einem Leistungsfaktor  $\cos \varphi = 0,707$ . Die Spannung  $U_3$  (von 170 V) eilt dem Strome  $I$  um den Phasenwinkel von  $45^\circ$  vor. Bei einer Spannung von  $120 \cdot \sqrt{2} = 170 \text{ V}$  nimmt der Motor eine:

Wirkleistung von  $170 \text{ V} \cdot 24 \text{ A} \cdot 0,707 = \underline{2880 \text{ W}}$  und eine:

Blindleistung von  $170 \text{ V} \cdot 24 \text{ A} \cdot 0,707 = \underline{2880 \text{ Var}}$  auf.

Die *Leistungsbilanz* der drei Objekte (Fig. 5) ergibt jetzt das folgende Bild: Der Ohmsche Widerstand und der Asynchronmotor nehmen zusammen eine Wirkleistung von 5760 W auf. Die Drosselspule und der Asynchronmotor nehmen zusammen eine Blindleistung von 5760 Var auf. Darüber, woher diese Energien kommen, sagt das  $U$ -Diagramm nichts aus. Nun wissen wir aber, dass durch die Pulsationen des im Eisenkern  $A_0$  bestehenden magnetischen Flusses nach unseren obigen Ausführungen im Leiterkreis der Fig. 5 eine EMK  $E_i$  induziert wird, deren Grösse 340 V beträgt. Sie eilt dem Strome  $I$  um den Phasenwinkel  $\varphi$  von  $45^\circ$  vor (Fig. 6d). An Hand des  $E$ - oder  $V$ -Diagrammes (siehe Lit. Verz. Nr. 18, S. 124 und Fig. 6d) erkennen wir, dass durch die EMK  $E_i$  dem System Wirk- und Blind-Energie zugeführt wird, und es entsteht für uns die Frage: Wie verteilen sich diese Energien auf das ganze System?

Diese Frage wird durch das  $V$ -Diagramm restlos beantwortet. Um dieses Diagramm jedoch aufstellen zu können, müssen wir wissen, wie sich die einzelnen Teil-EMKe auf das ganze System verteilen. Darüber geben uns (im allgemeinen) die Gleichungen (2), (5) und (6) völlig befriedigend Auskunft. Im vorliegenden Falle sieht man ohne weiteres ein, dass aus Symmetriegründen in den zwei Stromkreisabschnitten von  $A$  über  $R$  (Pos. 1) nach  $B$  und von  $B$  über  $L$  (Pos. 2) nach  $C$  die einander gleichen EMKe  $E_{i1}$  und  $E_{i2}$  (Fig. 6e und 6f) à je 170 V induziert werden, während zwischen  $C$  und  $A$  (also im Asynchronmotor) vom Transformator her nichts induziert wird.

Die dynamische Klemmenspannung  $V$  eines Stromkreiselementes erhält man nach Gl. (12) (die auch für die vektorielle Darstellung gilt), indem man an den um  $180^\circ$  gedrehten Vektor der Spannung  $U$  den Vektor der in diesem Element induzierten EMK  $E_i$  vektoriell addiert. So entsteht das  $V$ -Diagramm Fig. 6e des Stromkreisabschnittes mit dem Ohmschen Widerstande  $R$  (Fig. 5): Die Vektorsumme von  $-U_1$  und  $E_{i1}$  ergibt den gesuchten Vektor  $V_1$ . Dieser eilt dem Strome  $I$  um  $90^\circ$  vor, woraus sich das *paradoxe Resultat* ergibt, dass vom gesamtenergetischen Standpunkte aus betrachtet, der Stromkreisabschnitt mit dem Ohmschen Wider-

stande *R rein kapazitiv* mit  $\cos \varphi$  gleich Null arbeitet. Ebenso paradox erscheint die Arbeitsweise des Stromkreisabschnittes mit der Drosselspule *L*. An Hand des *V*-Diagrammes (Fig. 6f) erkennt man, dass dieser Abschnitt *rein generatorisch* (mit  $\cos \varphi = +1$ ) arbeitet. Da in der Asynchronmaschine keine vom Transformator herrührende EMK  $E_i$  induziert wird, so ist  $V_3 = -U_3$  (s. Fig. 6g) und der Abschnitt mit der Asynchronmaschine arbeitet nach wie vor *motorisch-induktiv* (mit  $\cos \varphi = 0,707$ ). Zur *Probe* müssen (nach Gl. 18) die Vektoren  $V_1, V_2$  und  $V_3$  ein geschlossenes Polygon ergeben (Fig. 6h).

Die *neue Leistungsbilanz* ergibt das folgende Bild: Der Abschnitt mit der Drosselspule *L* (Pos. 2, Fig. 5) liefert die *Wirkenergie* von:  $120 \text{ V} \cdot 24 \text{ A} = 2880 \text{ W}$ , die von der Asynchronmaschine verbraucht wird. Der Abschnitt mit dem Ohmschen Widerstand *R* (Pos. 1, Fig. 5) «liefert» die *Blindenergie* von:  $120 \text{ V} \cdot 24 \text{ A} = 2880 \text{ Var}$  die von der Asynchronmaschine «verbraucht» wird. Diese Bilanz steht in voller Übereinstimmung mit der Leistungsgleichung (19), die auch für die Blindleistung gilt:

«Die algebraische Summe aller im ganzen Stromkreise erzeugten und verbrauchten Wirk- oder Blindleistungen ist jederzeit gleich Null.»

*h) Elektrische Induktion in einem bewegten System und dessen Energetik bei verschiedenen Geschwindigkeiten des Beobachters*

Besonders interessant sind die Induktionsvorgänge in *bewegten Systemen*, insbesondere wenn das *Koordinatensystem des Beobachters* verschiedene *Geschwindigkeiten* annimmt.

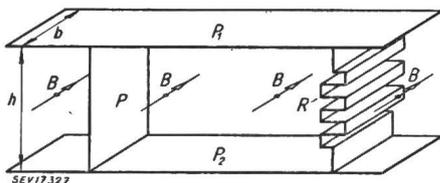


Fig. 7

Elektrische Induktion durch Bewegung von Leitern in einem homogenen zeitlich konstanten magnetischen Felde

- $P_1; P_2$  metallene Platten
- $B$  Induktion
- $h$  Abstand der Platten
- $b$  Breite der Platten
- $R$  Ohmscher Widerstand

In der Fig. 7 stellen die sehr lang gedachten metallenen Platten  $P_1$  und  $P_2$  zwei Sammelschienen dar, zwischen welchen ein kräftiger magnetischer Fluss mit der Induktion  $B$  von  $2 \text{ Vs/m}^2$  hindurch «strömt». Der Abstand  $h$  der beiden Platten betrage  $0,12 \text{ m}$ , ihre Breite  $b$  sei  $0,08 \text{ m}$ . Zwischen diesen Platten befindet sich ein Ohmscher Widerstand  $R$  von  $0,06 \Omega$  in Bandform und links daneben eine metallene Platte  $P$ . Sowohl diese wie die Sammelschienen  $P_1$  und  $P_2$  denken wir uns praktisch widerstandsfrei. Diese Platte  $P$  und der Ohmsche Widerstand  $R$  können zwischen den Platten  $P_1$  und  $P_2$  mit beliebigen Geschwindigkeiten bewegt werden, jedoch sollen diese Geschwindigkeiten so gesteuert werden,

dass die *Relativgeschwindigkeit* zwischen  $P$  und  $R$  immer konstant ist und  $25 \text{ m/s}$  beträgt. Ein Beobachter, der verschiedene Geschwindigkeiten annehmen kann, verfolgt mit seinem Spannungsmessinstrument  $M$  (Fig. 8 a, b, c) die sich hier abspielenden Induktionsvorgänge insoweit, als er die zwischen  $P_1$  und  $P_2$  auftretende Spannung  $U_M$  misst und aus diesen Messungen seine Schlüsse zieht.

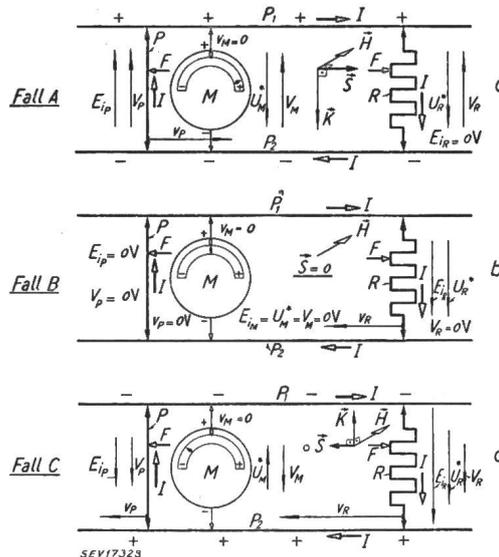


Fig. 8

Darstellung der Energetik nach der Anordnung in Fig. 7 mittels des Poyntingschen Vektors und der dynamischen Klemmenspannung bei verschiedenen Relativgeschwindigkeiten zwischen dem elektrischen System und dem Beobachter  
Erläuterungen siehe im Text

Wir berechnen hier nicht nur die vom Beobachter gemessene Spannung  $U_M$ , sondern auch den auftretenden Strom  $I$  und die gesamte, sich in diesem System abspielende Energetik, wobei wir uns mit Vorteil der *dynamischen Klemmenspannung* und des *Poyntingschen Vektors* bedienen.

Wir wollen *drei Fälle* genauer betrachten:

*Fall A:*

Der *Beobachter ruht relativ zum Widerstand R*. Die Platte  $P$  befindet sich links von  $R$  und bewegt sich mit der Geschwindigkeit  $v_P = 25 \text{ m/s}$  von links nach rechts gegen  $R$  hin (Fig. 8a).

In diesem System kann nie eine EMK der zeitlichen Flussvariation induziert werden, weil der magnetische Fluss sich zeitlich nicht ändert.

Nach dem *zweiten Induktionsgesetz* wird nur in  $P$  eine EMK  $E_{iP}$  der Bewegung induziert, da  $M$  und  $R$  relativ zum Beobachter ruhen.  $E_{iP}$  berechnet sich an Hand der Gleichungen (3), (5) und (6) zu.

$$E_{iP} = B \cdot h \cdot v_P = +2 \text{ Vs/m}^2 \cdot 0,12 \text{ m} \cdot 25 \text{ m/s} = +6 \text{ V} \tag{20}$$

Diese EMK hat nach der Rechte-Hand-Regel die Richtung von unten nach oben. Wir legen dieser EMK das positive Vorzeichen bei, da wir sie von der unteren zur oberen Sammelschiene positiv zählen. Sie treibt durch das System den Strom  $I$  in der in Fig. 8a eingezeichneten Umlaufrichtung. Seine Stärke berechnet sich zu

$$\underline{I} = \frac{E_i}{R} = \frac{6 \text{ V}}{0,06 \Omega} = \underline{100 \text{ A}} \quad (21)$$

Für die Spannung  $U^*$  der drei Objekte ergibt sich das folgende Bild:

Die Spannung  $U_P^*$  an der widerstandslosen Platte  $P$  ist unter allen Umständen gleich Null.

Die Spannung  $U_R^*$  am Ohmschen Widerstand  $R$  ist unter allen Umständen gleich der Ohmschen Spannung  $U_R^* = + I \cdot R$ . Sie ist bei  $0,06 \Omega$  und  $-100 \text{ A}$  gleich  $-6 \text{ V}$  und wird in der Richtung von oben nach unten positiv gezählt.

Für die Spannung  $U_M^*$  ergibt sich nach dem Gesetz von der elektrischen Umlaufspannung (Gl. 9) der gleiche Wert wie für  $U_R^*$ .  $U_M^*$  ist gleich  $-6 \text{ V}$  und wird in Richtung von oben nach unten positiv gezählt. Der Beobachter erkennt aus seiner Messung, dass die obere Sammelschiene positiv und die untere negativ geladen ist (Fig. 8a).

Für die dynamischen Klemmspannungen  $V$  der drei Objekte ergibt sich das folgende Bild:

Nach Gl. (12) ist:  $V = E_i - U^*$

Die Spannung  $V_P$  an der Platte  $P$  ist (da  $U_P^* = 0$ ), gleich  $E_{iP}$ . Sie beträgt  $+6 \text{ V}$  und wird von unten nach oben positiv gezählt. Die Spannung  $V_R$  am Ohmschen Widerstand ist (da  $E_{iR} = 0$ ), gleich  $-U_R^* = +6 \text{ V}$ . Sie wird von unten nach oben positiv gezählt (Fig. 8a). Dasselbe gilt auch von der Spannung  $V_M$  am Instrument  $M$ . Auch sie beträgt  $+6 \text{ V}$  und wird von unten nach oben positiv gezählt.

Wir sehen, dass wir bei allen drei Objekten für  $V$  denselben absoluten Wert und dasselbe Vorzeichen erhalten. Dieses Ergebnis folgt auch unmittelbar aus der Gl. (18) und aus dem Umstande, dass die Platten  $P_1$  und  $P_2$  widerstandslos sind und in ihnen nichts induziert wird. Haben wir die Spannung  $V$  für ein Objekt berechnet, so gilt dieser Wert auch für die beiden andern Objekte.

Durch den Strom  $I$  werden in der Platte  $P$  und in  $R$ , da sie im Magnetfeld sind, Kräfte  $F$  erzeugt, die sich nach der folgenden Formel berechnen:

$$\underline{F} = B \cdot I \cdot h = 2 \text{ Vs/m}^2 \cdot 100 \text{ A} \cdot 0,12 \text{ m} = \underline{24 \text{ N (Newton)}} \quad (22)$$

Die Richtung, in der diese Feldkräfte auf den Leiter wirken, bestimmt man an Hand der Linke-Hand-Regel: Zeigefinger in Richtung des Magnetfeldes; Mittelfinger in Richtung des Stromes. Der ausgestreckte Daumen ergibt die Richtung der Kraft  $F$ . Die Kräfte  $F$  sind in Fig. 8a eingezeichnet und entgegengesetzt gleich.

Zur Aufstellung der Energetik eines Systems bedürfen wir der folgenden Definitionen: Mechanische Leistung ( $P_{mec}$ ) wird erzeugt, wenn  $F$  und  $v$  die gleiche Richtung, sie wird verbraucht, wenn  $F$  und  $v$  entgegengesetzte Richtung haben. Erzeugte mechanische Leistung erhält das positive, verbrauchte, das negative Vorzeichen. Da sich im Falle  $A$  nur die Platte  $P$  in der entgegengesetzten Richtung von  $F$  bewegt, wird in ihr eine mechanische Leistung ( $P_{mec}$ ) verbraucht, die sich berechnet zu:

$$\underline{P_{mec}} = F \cdot v_P = -24 \text{ N} \cdot 25 \text{ m/s} = \underline{-600 \text{ W}} \quad (23)$$

Diese mechanische Leistung verwandelt sich (nach dem Prinzip von der Kontinuität der Energieströmung) in der Platte  $P$  in elektrische Energie ( $P_{el}$ ), deren Grösse sich aus der Leistungsgleichung (15) ergibt zu

$$\underline{P_{el}} = V_P \cdot I = +6 \text{ V} \cdot 100 \text{ A} = \underline{+600 \text{ W}} \quad (24)$$

Wenn  $V$  und  $I$  dieselbe Richtung haben (wie hier), so wird elektrische Energie erzeugt,  $P_{el}$  erhält das positive Vorzeichen. Hätten wir  $P_{el}$  statt mit  $V$  mit Hilfe von  $U^*$  berechnen wollen, so hätten wir ein falsches Ergebnis, nämlich die Leistung Null erhalten. Man sieht, dass in der Platte  $P$  genau soviel elektrische Energie erzeugt, als mechanische verbraucht wird (Energieprinzip). Diese elektrische Energie wird durch den Poyntingschen Vektor nach dem Widerstande  $R$  transportiert. Zu seiner Berechnung bedürfen wir der elektrischen Feldstärke  $\vec{K}$  zwischen den Platten  $P_1$  und  $P_2$ , sowie der vom Strome  $I$  erzeugten magnetischen Feldstärke  $\vec{H}$ , die für den uns hier interessierenden Energiestromanteil allein in Frage kommt. Die elektrische Feldstärke  $\vec{K}$  zwischen den Platten  $P_1$  und  $P_2$  ergibt sich zu:

$$\underline{\vec{K}} = \frac{U_M^*}{h} = \frac{-6 \text{ V}}{0,12 \text{ m}} = \underline{-50 \text{ V/m}} \quad (25)$$

Der einfacheren Rechnung wegen wollen wir annehmen, dass nur zwischen den Platten  $P_1$  und  $P_2$  die magnetische Leitfähigkeit  $\mu$  gleich dem Leitwert der Luft (Vacuum) sei, während im äusseren Raume  $\mu = \infty$  sei, was in Wirklichkeit natürlich nicht der Fall ist. Für die magnetische Feldstärke  $\vec{H}$  zwischen den Platten  $P_1$  und  $P_2$  ergibt sich dann der Wert

$$\underline{\vec{H}} = \frac{I}{b} = \frac{100 \text{ A}}{0,08 \text{ m}} = \underline{1250 \text{ A/m}} \quad (26)$$

Die elektrische Feldstärke  $\vec{K}$  ist von oben nach unten, die magnetische  $\vec{H}$  von vorne nach hinten gerichtet. Hieraus ergibt sich nach der Linke-Hand-Regel die Richtung des Poyntingschen Vektors  $\vec{S}$  (Fig. 8a) von links nach rechts. Seine Grösse bestimmt sich nach Gl. (10) zu

$$\underline{\vec{S}} = \vec{H} \times \vec{K} = 1250 \text{ A/m} \cdot 50 \text{ V/m} = \underline{62500 \text{ W/m}^2} \quad (27)$$

Die totale, pro Sekunde von der Platte  $P$  nach  $R$  strömende Energie ergibt sich zu

$$\underline{P_S} = \vec{S} \cdot b \cdot h = 62500 \text{ W/m}^2 \cdot 0,08 \text{ m} \cdot 0,12 \text{ m} = \underline{600 \text{ W}} \quad (28)$$

Diese im Ohmschen Widerstande pro Sekunde ankommende elektrische Energie von

$$\underline{P_R} = V_R \cdot I = -6 \text{ V} \cdot 100 \text{ A} = \underline{-600 \text{ W}} \quad (29)$$

verwandelt sich dort in Wärme nach der Leistungsgleichung

$$\underline{P_{cal}} = I^2 \cdot R = + (100 \text{ A})^2 \cdot 0,06 \Omega = \underline{+600 \text{ W}} \quad (30)$$

Da der Ohmsche Widerstand ruht, wird die gesamte,

ihm durch den Poyntingschen Vektor zugeführte Energie in Wärme umgewandelt.

Die energetische Schluss-Bilanz für diesen Fall A lautet:

«Die Platte  $P$  arbeitet rein generatorisch, indem sie die ihr zugeführte mechanische Leistung restlos in elektrische Leistung umwandelt. Diese Energie wird durch den Poyntingschen Vektor dem Widerstande  $R$  zugeführt, in welchem sie restlos in Wärme umgesetzt wird.»

Fall B:

Nun wollen wir, ohne am System das geringste zu ändern, annehmen, dass der Beobachter mit seinem Messinstrument  $M$  relativ zur Platte  $P$  ruhe. Wir fragen uns: wie erscheint ihm nun von seinem veränderten Koordinatensystem aus gesehen der Induktionsvorgang?

Zuerst stellen wir fest, dass für den Beobachter das Instrument  $M$  und die Platte  $P$  ruhen, und dass der Ohmsche Widerstand  $R$  sich mit einer Geschwindigkeit  $v_R$  von 25 m/s von rechts nach links auf ihn zubewegt (Fig. 8b). Nach dem zweiten Induktionsgesetz kann somit nur im Widerstand  $R$  eine EMK  $E_{iR}$  induziert werden. Ihre Grösse ist  $-6$  V und ihre Richtung ergibt sich nach der Rechte-Hand-Regel von oben nach unten. Da sie die einzige EMK des Stromkreises ist, treibt sie durch diesen einen Strom  $I$  von 100 A, wie er in Fig. 8b eingezeichnet ist. Da in der Platte  $P$  keine EMK induziert wird, die im Stande wäre, einer allfälligen statischen Ladung das Gleichgewicht zu halten, so erscheinen dem Beobachter die Sammelschienen völlig ungeladen und deshalb spannungsfrei. Die Platte  $P$  bildet für das System einen vollkommenen Kurzschluss.  $U_{P^*}$  und  $U_{M^*}$  sind gleich Null, während  $U_{R^*}$  nach wie vor den Wert von  $-6$  V besitzt (Fig. 8b).

Für die dynamische Klemmspannung  $V_P$  der Platte  $P$  erhalten wir, da in  $P$  keine EMK induziert wird und  $U_{P^*} = \text{Null}$  ist, den Wert Null. Somit müssen auch  $V_M$  und  $V_R$  gleich Null sein. Tatsächlich ergibt die Gl. (12) für den Ohmschen Widerstand  $R$

$$V_R = E_{iR} - U_{R^*} = -6 \text{ V} - (-6 \text{ V}) = 0 \text{ V} \quad (31)$$

Da der Strom  $I$  in Fig. 8b gleiche Umlaufsrichtung und Grösse wie in Fig. 8a hat, so haben auch die mechanischen Kräfte  $F$  in Fig. 8b die gleiche Richtung und Grösse wie in Fig. 8a. Da sich nur der Widerstand  $R$  bewegt und zwar in der entgegengesetzten Richtung von  $F$ , so wird am Widerstande eine mechanische Leistung vernichtet, die sich berechnet zu

$$P_{mec} = F \cdot v_R = -24 \text{ N} \cdot 25 \text{ m/s} = -600 \text{ W} \quad (32)$$

Die von  $E_{iR}$  erzeugte elektrische Energie wird aber in  $R$  unmittelbar wieder vernichtet, so dass die vom Widerstande total abgegebene elektrische Leistung

$$P_{el} = V \cdot I = 0 \text{ V} \cdot 100 \text{ A} = 0 \text{ W} \quad (33)$$

beträgt. Es kann also kein Energietransport durch den Raum stattfinden. Tatsächlich ist der Poyntingsche Vektor  $\vec{S}$  gleich Null, da zwischen den Sammelschienen kein elektrisches Feld  $\vec{K}$  herrscht. Die in  $R$  vernichtete elektrische Energie verwandelt sich vollkommen in Wärmeenergie. Die kalorische Leistung ist

Die energetische Schlussbilanz für diesen Fall B lautet:

$$P_{cal} = I^2 \cdot R = (100 \text{ A})^2 \cdot 0,06 \Omega = +600 \text{ W} \quad (34)$$

«Die Platte  $P$  verhält sich energetisch vollkommen neutral. Die dem Ohmschen Widerstande  $R$  zugeführte mechanische Energie verwandelt sich in ihm in elektrische Energie, die sich an derselben Stelle restlos in Wärme umsetzt. Eine äussere Aufnahme oder Abgabe von elektrischer Energie findet beim Widerstande  $R$  nicht statt.»

Fall C:

Von besonderem Interesse ist der dritte Fall, da wir hier annehmen, dass der Beobachter eine beliebige Geschwindigkeit zur Platte  $P$  bzw. zum Ohmschen Widerstande besitzt. Der Beobachter bewege sich so, dass sich die Platte  $P$  mit der relativen Geschwindigkeit  $v_P$  von 15 m/s von ihm weg, also von rechts nach links bewege. Dann scheint der Ohmsche Widerstand  $R$  sich mit  $v_R = 40$  m/s von rechts nach links nach dem Beobachter (mit dem relativ zu diesem ruhenden Instrument  $M$ ) hinzubewegen (Fig. 8c). Nach dem zweiten Induktionsgesetz entsteht in der Platte  $P$  eine induzierte EMK (nach Gl. 20)

$$E_{iP} = B \cdot h \cdot v_P = -2 \text{ Vs/m}^2 \cdot 0,12 \text{ m} \cdot 15 \text{ m/s} = -3,6 \text{ V} \quad (35)$$

welche nach der Rechte-Hand-Regel die Richtung von oben nach unten hat (Fig. 8c). In  $M$  wird natürlich nichts induziert und in  $R$  entsteht eine induzierte EMK von

$$E_{iR} = +2 \text{ Vs/m}^2 \cdot 0,12 \text{ m} \cdot 40 \text{ m/s} = +9,6 \text{ V} \quad (36)$$

die von oben nach unten gerichtet ist. Die Differenz dieser beiden EMKe von:  $-3,6 - (-9,6) \text{ V} = +6 \text{ V}$  treibt einen Strom von 100 A durch das System, der die in Fig. 8c eingezeichnete Umlaufsrichtung hat.

Wie gestalten sich nun die Spannungen  $U^*$  an den drei Objekten  $P$ ,  $M$  und  $R$ ?

Da  $P$  widerstandsfrei ist, ist seine Spannung  $U_{P^*}$  stets gleich Null. Die Spannung  $U_{M^*}$  ergibt sich aus der Gl. (9) zu

$$U_{P^*} - U_{M^*} = E_{iP} - E_{iM} \quad (37)$$

und da  $U_{P^*}$  und  $E_{iM} = \text{Null}$  sind,

$$U_{M^*} = +3,6 \text{ V} \quad (38)$$

wird nach Gl. (35)

$$U_{M^*} = +3,6 \text{ V} \quad (38)$$

Die Spannung  $U_{M^*}$  am Messinstrument  $M$  des Beobachters ist positiv geworden. Die Sammelschienen erscheinen also wieder elektrisch polarisiert, jedoch sind gegenüber dem Falle A ihre Pole vertauscht. Die obere Sammelschiene ist negativ, die untere positiv geworden.

Die Spannung  $U_R^*$  beträgt nach wie vor  $-6\text{ V}$ , d. h. sie wird von oben nach unten positiv gezählt. Ein relativ zu  $R$  ruhender Beobachter stellt gegenüber einem relativ zu  $M$  ruhenden Beobachter die entgegengesetzte Polarität der Sammelschienen fest. Der zweite Beobachter stellt auch die paradoxe Tatsache fest, dass beim Ohmschen Widerstand der Strom bei der negativen Klemme ein- und bei der positiven austritt. Für die *dynamischen Klemmenspannungen* der drei Objekte erhalten wir aus Gl. (12) die folgenden Werte:

$$V_P = -3,6 - 0 = -3,6\text{ V} \quad (39)$$

$$V_M = 0 - 3,6 = -3,6\text{ V} \quad (40)$$

$$V_R = -9,6 - (-6) = -3,6\text{ V} \quad (41)$$

Da der Strom  $I$  derselbe geblieben ist, sind auch die mechanischen Kräfte dieselben, dagegen haben sich die mechanischen Leistungen verändert. In  $R$  wird eine mechanische Leistung von

$$P_{mec} = F \cdot v_R = -24\text{ N} \cdot 40\text{ m/s} = -960\text{ W} \quad (42)$$

vernichtet, die sich in elektrische Leistung umwandelt, indem die induzierte EMK  $E_i = 9,6\text{ V}$  den Strom  $I = 100\text{ A}$  in dem System antreibt. Dabei wird eine elektrische Leistung von

$$P_{el} = E \cdot I = -9,6\text{ V} \cdot (-100\text{ A}) = +960\text{ W} \quad (43)$$

erzeugt, von welcher jedoch die im Widerstande  $R$  entstehende Joulesche Wärme

$$P_{cal} = I^2 \cdot R = (100\text{ A})^2 \cdot 0,06\ \Omega = 600\text{ W} \quad (44)$$

abzuziehen ist, so dass  $R$  noch eine restliche elektrische Leistung

$$P_{el} = V \cdot I = -3,6\text{ V} \cdot (-100\text{ A}) = +360\text{ W} \quad (45)$$

ans Netz abliefern, welche durch den Poyntingschen Vektor der Platte  $P$  zugeführt wird. Die zur Berechnung des *Poyntingschen Vektors* in Frage kommende elektrische Feldstärke  $\vec{K}$  beträgt:

$$\vec{K} = \frac{3,6\text{ V}}{0,12\text{ m}} = 30\text{ V/m} \quad (46)$$

und somit erhalten wir für  $\vec{S}$

$$\vec{S} = 1250\text{ A/m} \cdot 30\text{ V/m} = 37\,500\text{ W/m}^2 \quad (47)$$

Der *totale Energiestrom* berechnet sich zu:

$$P_S = S \cdot b \cdot h = 37\,500\text{ W/m}^2 \cdot 0,08\text{ m} \cdot 0,12\text{ m} = 360\text{ W} \quad (48)$$

in Übereinstimmung mit Gl. (45). Diese elektrische Leistung

$$P_{el} = V_P \cdot I = -3,6\text{ V} \cdot 100\text{ A} = -360\text{ W} \quad (49)$$

welche der Platte  $P$  zugeführt wird, verwandelt sich dort restlos in erzeugte *mechanische Leistung* ( $F$  und  $v_P$  haben dieselbe Richtung)

$$P_{mec} = F \cdot v_P = +24\text{ N} \cdot 15\text{ m/s} = +360\text{ W} \quad (50)$$

Die *energetische Schlussbilanz* für diesen Fall C lautet:

«Der *Ohmsche Widerstand* wird *mechanisch angetrieben*. Er arbeitet als ein *verlustreicher Generator*, der durch den Poyntingschen Vektor seine überschüssige elektrische Leistung an die als *Motor* arbeitende *Platte P* abgibt.»

Mit diesen Berechnungen haben wir nun zahlenmäßig die Richtigkeit des zweiten Induktionsgesetzes bewiesen. Wir überlassen es dem Leser, die elektrische Leistungsbilanz an Hand des Spannungsbegriffes « $U$ » nachzurechnen. Er wird zur Überzeugung gelangen, dass der « $U$ »-Begriff hierzu *völlig ungeeignet* ist.

Das folgende Beispiel dient dazu, eine wichtige, bei der Unipolarinduktion auftretende Frage eindeutig zu beantworten.

#### i) Modifikation der im Abschnitt h) behandelten Schaltung

In der Fig. 9 erkennen wir eine ähnliche Anordnung, wie sie in Fig. 7 dargestellt ist<sup>11)</sup>. Es besteht jedoch ein wichtiger Unterschied darin, dass sich nur die Platte  $P$  im magnetischen Felde befindet, während der Ohmsche Widerstand bereits im (prak-

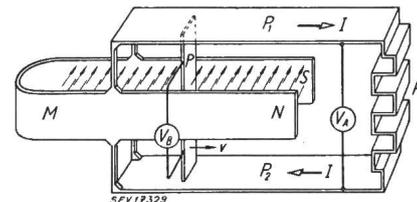


Fig. 9

Modifikation der in Fig. 7 dargestellten Anordnung, die zum Beweise dafür dient, dass in einem ruhenden Leiter niemals eine EMK durch «bewegte» Kraftlinien induziert wird  
Erläuterungen siehe im Text

tisch) feldfreien Raume liegt. Für uns stellen sich *zwei interessante Fragen*, die wir, gestützt auf die zwei Induktionsgesetze, im folgenden beantworten werden:

1) Wie gestaltet sich der Induktionsvorgang in diesem Stromkreise, wenn der Beobachter A relativ zum Magneten M, zum Widerstand R und zum Voltmeter  $V_A$  ruht und sich die Platte  $P$  mit dem Voltmeter  $V_B$  von links nach rechts bewegt?

2) Wie gestaltet sich der Induktionsvorgang in diesem Stromkreise, wenn der Beobachter B relativ zur Platte  $P$  und zum Voltmeter  $V_B$  ruht und sich der Magnet M, das Voltmeter  $V_A$  und der Ohmsche Widerstand R von rechts nach links bewegen?

Bei der Beantwortung der *ersten Frage* stellen wir vor allem fest, dass der Magnet relativ zum Beobachter A ruht. Das *magnetische Feld* erscheint ihm *zeitlich konstant*, und somit kann *keine Induktion durch zeitliche Flussvariation* auftreten. Es ist nur Induktion durch Bewegung im magnetischen Felde (nach dem zweiten Induktionsgesetz) möglich. Induzierte elektromotorische Kräfte können daher nur in der Platte  $P$  und zwar nur an denjenigen Stellen der Platte auftreten, wo diese sich *im magnetischen Felde bewegt*. An keiner andern Stelle im Strom-

<sup>11)</sup> Siehe auch Lit. Verz. Nr. 18, S. 356: Diskussion zwischen J. Jonas und A. von Brunn.

system können induzierte elektrische Felder entstehen. Bewegt sich die Platte  $P$  von links nach rechts, so hat die in ihr induzierte EMK  $E_i$  (nach der Rechte-Hand-Regel) die Richtung von unten nach oben, weil der magnetische Fluss von vorne nach hinten gerichtet ist. Diese EMK treibt durch den Stromkreis einen Strom  $I$  in der Umlaufrichtung des Uhrzeigers (Fig. 9). Damit ist die erste Frage bereits beantwortet.

Wenn wir die zweite Frage stellen, wird der Anhänger der Kraftlinien-«Schnitt»-Theorie sofort mit der Antwort bereit sein: «Wenn sich der Magnet  $M$  von rechts nach links bewegt, so ‚schneiden‘ seine mit-,bewegten‘ (in der Fig. 9 angedeuteten) Kraftlinien die Platte  $P$  und erzeugen in ihr die den Strom  $I$  antreibende EMK  $E_i$ . Dabei hat der Vertreter der Schnitttheorie etwas wichtiges übersehen. Für den Beobachter  $B$  ist das magnetische Feld nicht zeitlich konstant, sondern variabel. An denjenigen Stellen, zu denen der Magnet sich hinbewegt, entsteht ein magnetisches Feld, und in denjenigen Raumteilen, aus denen der Magnet sich hinwegbewegt, verschwindet das magnetische Feld. Es muss deshalb (nach dem ersten Induktionsgesetz) Induktion durch zeitliche Flussänderung auftreten. Um diejenigen Raumteile, in denen das von vorne nach hinten gerichtete Magnetfeld entsteht, bildet sich ein induziertes elektrisches Wirbelfeld, das entgegen dem Uhrzeigersinn umläuft, während um diejenigen Raumteile, in denen das magnetische Feld verschwindet, ein elektrisches Wirbelfeld induziert wird, das den Umlaufsinn des Uhrzeigers besitzt. Das erstgenannte Wirbelfeld erzeugt in unserem Stromkreis keine resultierende EMK, wohl aber das zweite. Dieses Wirbelfeld entsteht unmittelbar bei den Polen  $N$  und  $S$  und in deren näheren Umgebung. Es dringt in den gesamten aus  $P$ ,  $P_1$ ,  $R$  und  $P_2$  gebildeten Stromkreis ein und erzeugt den eingezeichneten Strom  $I$ . Es werden also für den Beobachter  $B$  nicht nur in der Platte  $P$ , sondern im ganzen Stromkreise EMKe induziert.

Nun wird der Vertreter der Schnitttheorie (scheinbar mit Recht) einwenden: «Wenn jetzt in der Platte  $P$  nur noch ein kleiner Teil der Umlauf-EMK induziert wird, dann muss aber das Voltmeter  $V_B$  (Fig. 9) bedeutend weniger Spannung anzeigen als das Voltmeter  $V_A$ , während es doch nahezu gleichviel anzeigt». Dieser Forscher hat übersehen, dass die Platte  $P$  und der Voltmeterdraht von  $V_B$  einen elektrischen Stromkreis bilden, aus dem der vordere Magnetschenkel (mit dem Nordpol) herausgezogen wird. Da der Magnet im Joch am meisten, im Pol am wenigsten Fluss enthält, so entsteht beim Herausziehen des Schenkels eine zeitliche Flussänderung, die auch in diesem Stromkreis eine EMK induziert und das Voltmeter  $V_B$  zum nahezu gleichen Ausschlag wie  $V_A$  bringt.

Träte nun im Falle, wo der Beobachter  $B$  relativ zur Platte  $P$  ruht, ausser der durch zeitliche Flussänderung hervorgerufenen EMK  $E_i$  noch eine zweite gleich grosse EMK auf, die durch «bewegte» und die Platte  $P$  «schneidende» magnetische Kraftlinien in der Platte  $P$  induziert würde, so müsste

für den Beobachter  $B$  im Stromkreise der doppelte Strom ( $2 I$ ) fließen, und die beiden Voltmeter  $V_A$  und  $V_B$  müssten die doppelte Spannung anzeigen. Da dies erfahrungsgemäss nicht der Fall ist, so folgt aus diesem, für uns sehr lehrreichen Beispiel:

«In einem relativ zum Beobachter ruhenden Leiter entstehen keine durch ‚bewegte‘ Kraftlinien induzierten elektromotorischen Kräfte».

#### 4. Die Betrachtung der elektrischen Induktion an einigen typischen Beispielen an Hand der beiden Induktionsgesetze

Um den Theoretiker und Forscher mit der Anwendung der beiden Induktionsgesetze vertraut zu machen, betrachten wir die Induktionsvorgänge an einigen typischen Beispielen.

##### a) Elektrische Induktion durch einen bewegten Magneten in einem einfachen Stromkreis

In Fig. 10 a und 10 b ist ein Magnet  $M$  dargestellt, der senkrecht auf der Zeichnungsebene steht, dessen magnetischer Fluss von vorne nach hinten gerichtet ist, und der unter einer geschlossenen Drahtschleife  $S$  von unten nach oben bewegt wird. In der Fig. 10 a befindet sich der Beobachter  $B$  auf der Schleife  $S$ . Er sieht (wie oben geschildert) den Magneten  $M$

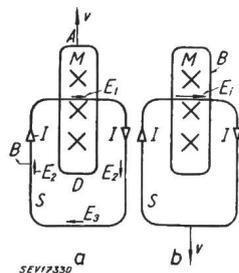


Fig. 10  
Elektrische Induktion durch Relativbewegung zwischen einem Magneten und einer Drahtschleife  
 $M$  Magnet  
 $S$  geschlossene Drahtschleife  
 $B$  Beobachter  
 $E_1 \dots E_3$ ;  $E_i$  induzierte EMKe  
 $I$  Strom  
 $v$  Geschwindigkeit

sich von unten nach oben bewegen. In der Fig. 10 b jedoch befindet sich der Beobachter  $B$  auf dem Magneten  $M$ . Von diesem aus gesehen, bewegt sich die Schleife  $S$  von oben nach unten.

Wir stellen uns die folgenden Fragen:

Wie gestalten sich die Induktionsvorgänge in diesem System, wenn sich der Beobachter  $B$ :

- 1) Auf der Schleife  $S$  und
- 2) auf dem Magneten befindet? Und schliesslich fragen wir uns noch:
- 3) Wird in der Schleife  $S$  eine resultierende EMK  $E_i$  und damit ein Strom  $I$  erzeugt?

Zu 1): Wenn der Beobachter  $B$  auf der Schleife  $S$  sitzt, so ruht diese relativ zu ihm, und es kann somit in ihr keine EMK der Bewegung induziert werden. Wenn der Magnet  $M$  bewegt wird, so entsteht bei  $A$  ein magnetisches Feld, während ein solches bei  $D$  verschwindet. Bei  $A$  bildet sich ein elektrisches Wirbelfeld, das entgegen dem Drehsinn des Uhrzeigers rotiert. Dieses Feld dringt auch in den Draht der Schleife  $S$  ein; die algebraische Summe aller (in der Fig. 10 a nicht eingezeichneten) induzierten EMKe ist jedoch Null. Bei  $D$  bildet sich ebenfalls ein elektrisches Wirbelfeld, das den Drehsinn des Uhrzeigers hat. Dieses Feld dringt in den

Draht der Schleife  $S$  ein; die algebraische Summe aller (in der Fig. 10a eingezeichneten) EMKe ist

$$E_1 + 2 E_2 + E_3 = E_i \quad (51)$$

also *nicht* gleich Null und es wird somit ein Strom  $I$  induziert.

Zu 2): Wenn der Beobachter  $B$  auf dem Magneten  $M$  sich befindet (Fig. 10b) so ist für ihn das magnetische Feld *zeitlich konstant*: Eine EMK der Flussänderung ( $E_{tr}$ ) kann somit nicht auftreten. Dagegen *bewegt* sich ein Teil der Schleife  $S$  *im magnetischen Felde*, und es wird deshalb in diesem Teilstück die EMK  $E_i$  der Bewegung induziert, welche den Strom  $I$  zur Folge hat (Fig. 10b).

Diese EMK  $E_i$  ist genau so gross wie die resultierende EMK  $E_i$  der Transformation in Fig. 10a. Damit ist auch die Frage 3) beantwortet.

b) Die Lösung eines sehr umstrittenen Problems

Fig. 11a und 11b zeigen die bekannte Schaltung der Fig. 1, die wir schon am Anfang dieser Arbeit betrachtet haben. Es soll nun gezeigt werden, wie klar und einfach solche und ähnliche Fragen an Hand unserer zwei Induktionsgesetze beantwortet werden können. Man kann die Lösung sehr vereinfachen, wenn man gleich von Anfang an den Standort des Beobachters zweckmässig wählt.

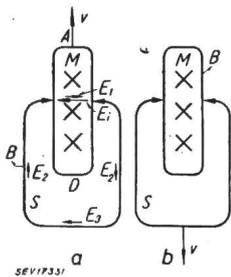


Fig. 11  
Die Lösung des Problems nach Fig. 1 an Hand der zwei Induktionsgesetze  
Weitere Legenden siehe Fig. 10

Wir nehmen zuerst an, der Beobachter  $B$  befindet sich auf der Schleife  $S$  (Fig. 11a). Für ihn ruht der grösste Teil des Stromkreises, nicht aber der ganze. Ein Teil des Stromkreises besteht nämlich aus dem Magneten  $M$ , und dieser bewegt sich relativ zum Beobachter  $B$ . Da er sich *in seinem eigenen Felde* bewegt, so entsteht in ihm eine EMK  $E_i$  der Bewegung (Fig. 11a), die nach der Rechte-Hand-Regel von rechts nach links gerichtet ist. Im Stromkreise der Schleife  $S$  entstehen aber ausser  $E_i$  (analog wie im Falle der Fig. 10a) noch die EMKe  $E_1$ ,  $E_2$  und  $E_3$  der *zeitlichen Flussänderung*, die den entgegengesetzten Umlaufsinn von  $E_i$  haben. Es lässt sich zeigen, dass die Gleichung besteht

$$E_1 + 2 E_2 + E_3 - E_i = 0 \quad (52)$$

Die *resultierende induzierte EMK* des ganzen Stromkreises ist (nach Gl. 52) gleich *Null* und somit kann bei dieser Anordnung kein Strom in der Schleife  $S$  induziert werden.

Bedeutend einfacher und rascher lässt sich die Frage, ob bei dieser Anordnung ein Strom induziert wird, beantworten, wenn wir uns den Beobachter  $B$  auf dem Magneten  $M$  befindlich denken. Für diesen Beobachter ist das magnetische Feld zeitlich kon-

stant; eine EMK der zeitlichen Flussänderung kann somit nicht auftreten. Eine EMK der Bewegung ist aber auch ausgeschlossen, da sich die Schleife  $S$  *nicht im magnetischen Felde* bewegt. Somit kann in  $S$  kein Strom induziert werden.

Dieses Beispiel zeigt überzeugend, wie bequem an Hand der obigen zwei Induktionsgesetze, Probleme aus dem Gebiete der Induktion gelöst werden können.

Wir wollen nun noch einige weitere Probleme aus dem Gebiete der Unipolarinduktion betrachten:

c) Eine einfache Form der Unipolarmaschine und ihre Energetik

Die Fig. 12a stellt die einfachste Form eines Unipolargenerators dar. In einem homogenen von oben nach unten gerichteten magnetischen Felde rotiert eine Kupferscheibe  $S$  um eine vertikale Achse  $a$  im Uhrzeigersinne (von oben nach unten betrachtet). Ein induzierter Strom  $I$  kann mittels Gleitkontakten ( $K_1$  und  $K_2$ ) vom äusseren Rande der Scheibe abgenommen, über einen Widerstand  $R$  geleitet und der Rotationsachse  $a$  wieder zugeführt werden (Fig. 12a).

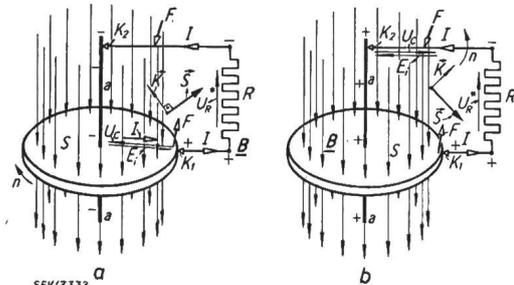


Fig. 12  
Einfache Form eines Unipolargenerators und seine Energetik bei verschiedenen Standorten des Beobachters  
Erläuterungen siehe im Text

Wir wollen die Induktionsvorgänge und die Energetik des Systems betrachten, wenn der Beobachter  $B$  sich:

- 1) beim Ohmschen Widerstand  $R$  und
- 2) auf der Kupferscheibe (Fig. 12b) befindet.

Da das homogene Magnetfeld beiden Beobachtern zeitlich konstant erscheint, so ist eine EMK der zeitlichen Flussänderung ausgeschlossen. Es können nur EMKe der Bewegung auftreten.

1) Für den bei  $R$  befindlichen Beobachter  $B$  (Fig. 12a) rotiert die Scheibe  $S$  im magnetischen Felde, und es treten in ihr (nach der Rechte-Hand-Regel) EMKe  $E_i$  der Bewegung auf, die von der Achse  $a$  nach ihrer Peripherie gerichtet sind (Fig. 12a). Da alle andern Teile des Systems relativ zum Beobachter ruhen, so kann in ihnen nichts induziert werden. Denken wir uns den ganzen Stromkreis (mit Ausnahme von  $R$ ) widerstandsfrei, so muss in jedem dieser Leiterteile die resultierende Feldstärke Null sein und somit muss für den Beobachter  $B$  zwischen dem Kontakt  $K_1$  und der Achse  $a$  ausser der induzierten EMK  $E_i$  noch eine, durch Stauung hervorgerufene Spannung  $U_c$  auftreten (Fig. 12a), die der induzierten EMK  $E_i$  genau das Gleichgewicht hält. Dem Beobachter  $B$  erscheinen somit die Achse  $a$ , der Kontakt  $K_2$  und die Verbindungs-

dung von diesem bis zu  $R$  negativ, die Verbindung von  $K_1$  bis zu  $R$  jedoch positiv geladen. Der Poyntingsche Vektor  $\vec{S}$  hat die Richtung von der Scheibe  $S$  nach dem Widerstand  $R$ , denn die elektrische Feldstärke  $K$  ist ungefähr von  $K_1$  nach  $K_2$ , und die von  $I$  herrührende magnetische Feldstärke  $\vec{H}$  ist von hinten nach vorne gerichtet. (Aus Gründen einer ungünstigen perspektivischen Darstellung haben wir den Vektor  $\vec{H}$  in Fig. 12a nicht eingezeichnet.) Energetisch erscheinen dem Beobachter  $B$  in Fig. 12a die Verhältnisse folgendermassen:

Die Kupferscheibe des Unipolargenerators wird entgegen der Kraft  $F$ , die der Strom  $I$  im Magnetfelde auf diese Scheibe ausübt, angetrieben. Mechanische Energie verschwindet und es entsteht elektrische Energie, weil  $E_i$  den Strom  $I$  (da mit ihm gleichgerichtet) antreibt. Die Scheibe arbeitet generatorisch. Ihre erzeugte elektrische Energie wird durch den Poyntingschen Vektor  $\vec{S}$  nach dem Widerstand  $R$  transportiert, wo sie sich restlos in Wärme umwandelt.

2) Für den auf der Scheibe  $S$  befindlichen Beobachter  $B$  bleibt die Scheibe stehen, dagegen rotiert der Ohmsche Widerstand  $R$  mit seinen Anschlüssen  $K_1$  und  $K_2$  von oben gesehen im Gegenuhrzeigersinn.

Da sich nur die Verbindung von  $K_2$  nach dem Widerstand  $R$  im magnetischen Felde bewegt, so tritt nur in ihr die induzierte EMK  $E_i$  der Bewegung auf (Fig. 12b). Sie hat nach der Rechte-Hand-Regel die Richtung vom Widerstand  $R$  zur Achse  $a$  und erzeugt im Kreise den Strom  $I$ . Da die Verbindung von  $K_2$  nach  $R$  vollkommen widerstandsfrei ist, so muss in ihr die Spannung  $U_c$  auftreten, die der induzierten EMK  $E_i$  genau das Gleichgewicht hält (Fig. 12b). Diese Spannung  $U_c$  rührt von elektrischen Ladungen her, die durch Stauung entstanden sind. Bei  $K_2$  bildet sich der positive und am oberen Ende von  $R$  der negative Pol. Da im ganzen Stromkreisteil von  $K_2$  über  $S$  und  $K_1$  bis zum untern Ende von  $R$  nirgends eine elektrische Feldstärke auftritt, so sind alle Punkte dieses Stromkreisteiles äquipotentiell und positiv (Fig. 12b). Während dem Beobachter  $B$  in Fig. 12a die Achse  $a$  negativ geladen erscheint, stellt der Beobachter  $B$  in Fig. 12b eine positive Ladung der Achse  $a$  fest.

Da in Fig. 12b das elektrische Feld  $\vec{K}$  von der Scheibe  $S$  nach dem oberen, negativen Pol des Widerstandes  $R$  gerichtet ist, und die von  $I$  erzeugte magnetische Feldstärke  $\vec{H}$  nach wie vor von hinten nach vorne verläuft, so hat der Poyntingsche Vektor  $\vec{S}$  die Richtung von der oberen Verbindung zwischen  $K_2$  und  $R$  nach dem Widerstand  $R$ .

Energetisch ergibt sich das folgende Bild: Die Verbindung von  $K_2$  nach  $R$  wird entgegen der vom magnetischen Felde infolge des Stromflusses  $I$  auf sie ausgeübten Kraft  $F$  um die Achse  $a$  gedreht. Mechanische Energie wird vernichtet, und es entsteht elektrische Energie, die durch den Poyntingschen Vektor nach dem Ohmschen Widerstand transportiert wird, wo sie sich restlos in Wärme umsetzt.

d) Elektrische Induktion in einem Magnetstabe, der sich um seine eigene Achse dreht und die Energetik dieses Systems

In den Figuren 13a und 13b sehen wir einen permanenten Stahlmagneten  $M$ , der um seine vertikale Achse  $a$  drehbar angeordnet ist. Von einer elektrischen Batterie  $Ba$  wird durch den Magneten  $M$  ein Strom  $I$  geleitet, der oben in die Achse  $a$  eindringt, und aus einem Kupferringe, der in der neutralen Zone des Magneten liegt, wieder austritt. Es interessiert uns, ob der Magnet durch den Strom  $I$ , der durch dessen eigenes Feld fliesst, in Rotation versetzt wird, und wenn dies der Fall sein sollte, wie sich die Energetik des ganzen Systems gestaltet, wenn der Beobachter sich das eine Mal bei der Batterie, das andere Mal auf dem Magneten befindet.

Die Frage, ob beim Stromdurchfluss durch den Magneten in diesem eine mechanische Kraft entsteht, ist rasch entschieden. Man muss nur wissen, ob bei der Rotation des Magneten relativ zum Beobachter  $B$  eine induzierte EMK  $E_i$  entsteht. Ist nämlich dies der Fall, so wird durch  $E_i$  und  $I$  eine elektrische Leistung je nach der relativen Stromrichtung von  $E_i$  zu  $I$  erzeugt, oder vernichtet, und es muss nach dem Energieprinzip eine mechanische Leistung vernichtet oder erzeugt werden, was nur dann der Fall sein kann, wenn eine mechanische Kraft auftritt.

Nun wissen wir nach einem oben ausgesprochenen Satze, dass in einem Magneten, der relativ zu einem Beobachter rotiert (oder sich translatorisch bewegt), eine EMK  $E_i$  der Bewegung auftritt, folglich muss beim Stromdurchtritt von  $I$  im Magneten eine mechanische Kraft  $F$  (Fig. 13a und 13b) auftreten, welche den Magneten im Uhrzeigersinne in Rotation versetzt.

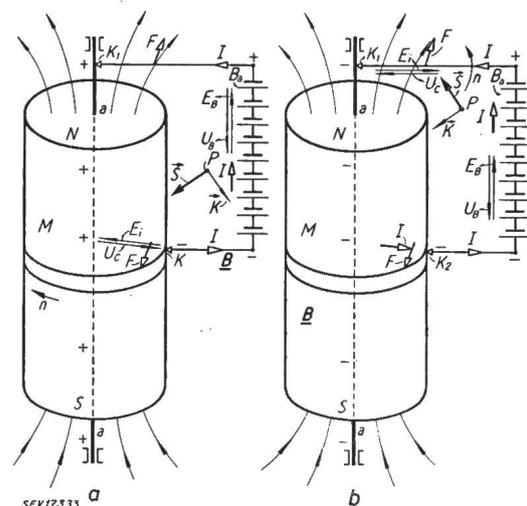


Fig. 13

Unipolarinduktion eines Magneten, der in seinem eigenen Felde rotiert und die Energetik dieser Anordnung bei verschiedenen Standorten des Beobachters

Erläuterungen siehe im Text

Wie gestalten sich nun die elektrischen und energetischen Verhältnisse in diesem Systeme:

1) Wenn sich der Beobachter  $B$  bei der Batterie befindet (Fig. 13a).

Bei der angenommenen Magnetfeld- und Strom-Richtung muss der Magnet  $M$  so rasch (im Sinne des Uhrzeigers) rotieren, bis (da wir den Stromkreis praktisch widerstandsfrei angenommen haben) die EMK  $E_i$  der Rotation entgegengesetzt gleich ist der chemischen EMK  $E_B$  der Batterie. Durch die EMK  $E_i$  entsteht im Stromkreise eine elektrische Stauung, die bewirkt, dass sich die Magnetachse positiv lädt, und eine Spannung  $U_c$  zwischen dieser und dem negativen Pol der Batterie auftritt (Fig. 13 a). Das elektrische Feld  $\vec{K}$  im Raumpunkte  $P$  hat die in Fig. 13 a eingezeichnete Richtung. Der vom Strom  $I$  erzeugte (in Fig. 13 a nicht eingezeichnete) Feldvektor  $\vec{H}$  hat die Richtung von hinten nach vorne, und so ergibt sich für den Poyntingschen Vektor  $\vec{S}$  die Richtung von der Batterie zum Magneten  $M$  (Fig. 13 a). Die Energetik lautet: Da der Strom beim positiven Pol der Batterie austritt, arbeitet diese *generatorisch*. Die Energie strömt durch den Poyntingschen Vektor zum Magneten, der *motorisch* arbeitet und *mechanische Leistung* erzeugt.

2) Wenn sich der Beobachter  $B$  auf dem Magneten befindet?

Der Beobachter  $B$  sieht von seinem Standpunkte aus die Batterie mit ihren Anschlüssen sich im Gegenuhrzeigersinne drehen. Dabei bewegt sich die obere Verbindung im magnetischen Felde, und es entsteht eine vom Magneten zur Batterie gerichtete induzierte EMK  $E_i (= -E_B)$  der Bewegung. Durch elektrische Stauung bildet sich auch hier eine Spannung  $U_c$ , die von rechts nach links positiv gezählt wird. Dadurch wird die Achse  $a$  des Magneten zum negativen Pol, dessen sämtliche Punkte äquipotentiell sind, da keine elektrischen Felder in ihm auftreten. Das elektrische Feld  $\vec{K}$  im Punkte  $P$  hat die in Fig. 13 b eingezeichnete Richtung und der Poyntingsche Vektor  $\vec{S}$  weist von der Batterie zum oberen Verbindungsstück.

Die Energetik lautet: Elektrische Energie, die in der Batterie  $Ba$  erzeugt wird, strömt von dieser nach der oberen Verbindungsleitung, die *motorisch* arbeitet und *mechanische Leistung* abgibt.

#### e) Eine kollektorlose Gleichstrom-Hochspannungsmaschine

Fig. 14 stellt eine seltsame Gleichstrommaschine ohne Kollektor dar, die in analoger Bauart zu einer Unipolarmaschine hätte imstande sein sollen, hochgespannten Gleichstrom abzugeben. Nach der Ansicht des Erfinders arbeitet die Maschine folgendermassen:

Um eine horizontale Achse  $a$  rotiert ein Polrad, das in der Mitte durch eine Erregerspule  $E$  magnetisiert wird. Rechts hat das Polrad seinen Nordpol, links seinen Südpol. Die «mitrotierenden» Kraftlinien  $k$  treten in das zylindrische Statoreisen rechts ein und verlassen es links, um dort wieder in den Südpol des Polrades einzutreten und den magnetischen Kreis zu schliessen. Bei ihrer «Rotation» «schneiden» die Kraftlinien die im Luftspalt liegenden Statorleiter  $l$  und erzeugen in ihnen elektromotorische Kräfte  $E_i$ , die dank der Anordnung der

Wicklung sich nicht gegenseitig aufheben, sondern unterstützen. Da die im Statoreisen zur Führung der Wicklung vorgesehenen Löcher  $L$  praktisch feldfrei sind, und die Kraftlinien sich nur im Eisen «bewegen», so kann in denjenigen Wicklungsteilen, welche sich in den Löchern befinden, keine Gegen-EMK induziert werden. Die Maschine sollte also bei genügend grosser Windungszahl der Wicklung, der Erwartung des Erfinders entsprechend, hochgespannten Gleichstrom abgeben.

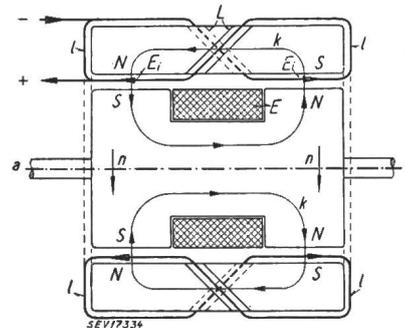


Fig. 14

Gleichstrom-Hochspannungs-Unipolarmaschine  
Erläuterungen siehe im Text

Die Theorie zeigt, dass dies nicht der Fall ist:

Befindet sich der Beobachter relativ zum Stator in Ruhe, so ist für ihn das magnetische Feld im Stator und Rotor zeitlich konstant, eine EMK der Flussänderung kann somit nicht auftreten. Da aber die Wicklung selbst ruht, so kann auch keine EMK der Bewegung auftreten. Es wird also in der Wicklung überhaupt keine EMK induziert.

Etwas komplizierter gestaltet sich die Sachlage, wenn sich der Beobachter auf dem Polrad befindet. Dann bewegt sich von ihm aus gesehen ein Teil der Statorwicklung im magnetischen Felde, und es wird in ihr eine EMK der Bewegung induziert. Während aber für diesen Beobachter das Rotorfeld zeitlich konstant ist, erfährt das Statorfeld zeitliche Pulsationen, weil die Löcher  $L$  im Statoreisen relativ zum zweiten Beobachter rotieren. In diesen Löchern bestehen für den zweiten Beobachter (nicht aber für den ersten) durch zeitliche Flussänderung hervorgerufene radial nach aussen gerichtete induzierte elektrische Felder, die in die Wicklung eindringen. Es entsteht in der Statorwicklung also noch eine EMK der zeitlichen Flussänderung, die der EMK der Bewegung genau das Gleichgewicht hält, so dass auch für den zweiten Beobachter keine resultierende EMK induziert wird.

#### f) Elektrische Induktion einer Ankerwicklung einer Gleichstrommaschine mit glattem Anker

Zum Abschluss unserer Betrachtungen stellen wir uns die Fragen:

1) Wie erscheint einem Beobachter, der relativ zu den Polen ruht, die elektrische Induktion in der Ankerwicklung einer Gleichstrommaschine, wenn sie einen glatten Anker hat?

2) Wie erscheint der Induktionsvorgang bei der gleichen Maschine einem Beobachter, der sich auf dem rotierenden Anker befindet, also relativ zu diesem ruht?

Zu 1): Für diesen Beobachter ist das magnetische Feld zeitlich konstant. Eine EMK der Flussänderung

tritt nicht auf, sondern es entsteht nur eine EMK der Bewegung und zwar in denjenigen Wicklungsteilen, die sich im Felde bewegen. *In den Wicklungsköpfen wird nichts induziert.*

Zu 2): Für den auf dem Anker befindlichen Beobachter ist das magnetische Feld *zeitlich variabel*, aber die Leiter bewegen sich nicht im Felde. Es tritt nur eine EMK  $E_i$  der Flussänderung auf, und zwar in der *ganzen* Wicklung, also auch in den *Wicklungsköpfen*.

### Schlussbemerkung

Die hier angestellten allgemeinen Betrachtungen und die Berechnung von Zahlenbeispielen haben dem Leser gezeigt, dass unser *Einblick in das Wesen der Induktionsvorgänge* und in deren Energetik an Hand der oben formulierten zwei relativistischen Induktionsgesetze eine *wesentliche Vertiefung* erfahren hat. Auch wird er erkannt haben, welche Bedeutung dem Begriffe der *dynamischen Klemmenspannung* bei der Energetik elektrischer Vorgänge zukommt.

### Literatur

- [1] Maxwell, James Clerk M. A.: Electricity and Magnetisme. Vol. II. 2nd ed. Oxford 1881.
- [2] Benischke, G.: Die wissenschaftlichen Grundlagen der Elektrotechnik. 6. Aufl., Berlin 1922.
- [3] Emde, F.: Die Überbrückung des Zwischenraumes beim Induktionsvorgang. Elektrotechn. u. Maschinenbau Bd. 42(1924), Nr. 5, S. 58...59.
- [4] Richter, R.: Elektrische Maschinen. Bd. 1. Berlin, Springer, 1924.
- [5] Abraham-Becker: Theorie der Elektrizität. Leipzig, Teubner, 2 Bd., 1920, 1933.

- [6] Joos, G.: Lehrbuch der theoretischen Physik. Leipzig, Akad. Verlagsges., 1932.
- [7] Brunn, Albert von: Vektordiagramm und Energiebilanz des elektrischen Stromkreises. Elektrotechn. u. Maschinenbau Bd. 52(1934), Nr. 18, S. 205...208; Nr. 19, S. 216...221; Nr. 20, S. 225...230.
- [8] Brunn, Albert von: Graphische Methoden zur Lösung von Wechselstromproblemen. Basel, Schwabe, 1938.
- [9] Küpfmüller, K.: Einführung in die theoretische Elektrotechnik. 3. Aufl., Berlin, Springer, 1941.
- [10] Stratton, J. A.: Electromagnetic Theory. New York and London, McGraw-Hill, 1941.
- [11] Zorn, M.: Gleichstrommaschinen ohne Stromwender. Elektrotechn. u. Maschinenbau Bd. 60(1942), Nr. 23/24, S. 252...255.
- [12] Herrmann, Imm. u. M. Zorn: Briefe an die wissenschaftliche Leitung. Elektrotechn. u. Maschinenbau Bd. 61(1943), Nr. 39/40, S. 491...492.
- [13] Kneissler-Maixdorf, L.: Theorie der Unipolarmaschine. Elektrotechn. u. Maschinenbau Bd. 61(1943), Nr. 39/40, S. 479...486.
- [14] Pohl, R. W.: Einführung in die Elektrizitätslehre. 8. Aufl., Berlin, Springer, 1943.
- [15] Herrmann, J. u. M. Riepe: Briefwechsel über die Gleichstrommaschine ohne Stromwender. Elektrotechn. u. Maschinenbau Bd. 62(1944), Nr. 31/32, S. 389...390.
- [16] Kübler, E., L. Kneissler-Maixdorf u. F. Emde: Briefwechsel über die Theorie der Unipolarmaschine. Elektrotechn. u. Maschinenbau Bd. 62(1944), Nr. 31/32, S. 390...392.
- [17] Bödefeld, Th. u. H. Sequenz: Elektrische Maschinen. 3. Aufl., Wien, Springer, 1945.
- [18] Brunn, Albert von: Zur Energetik elektrischer Stromkreise. Bull. SEV Bd. 38(1947), Nr. 5, S. 109...125. Hierzu die Diskussion: J. Jonas u. Albert von Brunn. Bull. SEV Bd. 38(1947), Nr. 12, S. 356...358.

Adresse des Autors:

A. von Brunn, Wachterweg 7, Zürich 6.

## Neue Betonmasten-Leitungen der St. Gallisch-Appenzellischen Kraftwerke A.-G.

Von W. Mürli, St. Gallen

621.315.668.3

Die fast 40 Jahre alten Holzmastenleitungen zwischen der Zentrale Kubel der St. Gallisch-Appenzellischen Kraftwerke A.-G. und dem Unterwerk Winkeln der Nordostschweizerischen Kraftwerke A.-G. mussten im Querschnitt verdreifacht und dementsprechend in mechanischer Hinsicht verbessert werden, da sie den heutigen Anforderungen nicht mehr genügen. Weil Eisenmaste zur Zeit des Baues schwer erhältlich und sehr teuer waren, wurden die Tragmaste aus Schleuderbeton erstellt, nur die Winkelpunkte bestehen aus Eisen. Die Beschreibung behandelt die Bedingungen für die Ausführung des Leitungsbaues, die Herstellung von Schleuderbetonmasten im Werk der SACAC in Bodio und anschliessend den Bau der Leitung.

Les lignes sur poteaux en bois, installées depuis une quarantaine d'années entre l'usine de Kubel de la S. A. des Forces Motrices Saint-Galloises et la sousstation de Winkeln de la S. A. des Forces Motrices du Nord-Est Suisse, ne répondaient plus aux exigences actuelles. Leur section devait être triplée et leurs supports devaient être renforcés en conséquence. A l'époque de cette transformation, les poteaux en fer ne pouvaient être que difficilement obtenus et leur prix était très élevé. Pour cette raison, les poteaux d'alignement ont été fabriqués en béton centrifugé. Seuls les pylônes d'ancrage sont en fer. L'auteur décrit les conditions d'installation de ces lignes, la fabrication des poteaux en béton centrifugé dans l'usine de la SACAC, à Bodio, ainsi que l'établissement des lignes.

Die 50-kV-Leitungen Kubel-Winkeln der St. Gallisch-Appenzellischen Kraftwerke A.-G. (SAK) verbinden deren Zentrale Kubel mit dem Unterwerk Winkeln der Nordostschweizerischen Kraftwerke A.-G. (NOK). Ursprünglich dienten sie dem Energiebezug der SAK ab Unterwerken Wattwil-Grynau (seit 1911) und ab Unterwerken Wil-Sirnach (seit 1919). Das Unterwerk Winkeln wurde nach dessen Bau im Jahre 1932 der Hauptabgabepunkt für NOK-Energie; die Doppelleitung dient heute dem Transport von jährlich 80...100 GWh an die Zen-

trale Kubel, welche die Energie ihrerseits in 50 und 10 kV weiter verteilt. Als Leitermaterial wurde  $6 \times 8 \text{ mm } \varnothing \text{ Cu}$  verwendet, die Leitungslänge beträgt rund 2 km. Die maximale Belastung beläuft sich auf rund 28 MW, was bei 45 kV Betriebsspannung und  $\cos \varphi = 0,8$  ungefähr 450 A für die Doppelleitung entspricht. Die thermische Leiterbelastung ist damit an der oberen Grenze, was mit ein Grund für den Ersatz der Leitung war. Als Tragwerke dienten Holzmasten in Regelspannweite; die Winkelpunkte waren als Gittermaste ausgebildet.