

Zeitschrift: Bulletin de l'Association suisse des électriciens

Herausgeber: Association suisse des électriciens

Band: 42 (1951)

Heft: 1

Artikel: Logarithmisches Netz für komplexe und Schwingungsrechnungen

Autor: Beauclair, W. de

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-1056840>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 18.01.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Logarithmisches Netz für komplexe und Schwingungsrechnungen

Von W. de Beauclair, Stuttgart (Deutschland)

681.143.3:511.147

Die Gaußsche Zahlenebene zur Darstellung komplexer Zahlen wird in anschaulicher Weise logarithmisch verzerrt und dadurch einfache Multiplikation nur durch vektorielle Addition ermöglicht. Das so entstandene «komplex-logarithmische Netz» ist wie vorher zur Darstellung von Vektorplänen und Ortskurven geeignet; von besonderem Vorteil ist aber die aus dem Netz entwickelte «Komplex-Rechenwalze» als logarithmisch-instrumentelles Rechenhilfsmittel, das bei zweckdienlicher Gestaltung universell und gleich gut für skalare und komplexe Rechnungen brauchbar ist. Einige Richtlinien und Beispiele für die häufigsten Aufgabengebiete erläutern die Handhabung des Netzes und sollen seine eingehende Verwendung in der Praxis veranlassen.

Le plan numérique de Gauss destiné à représenter des nombres complexes, est ordonné logarithmiquement, ce qui permet de procéder à des multiplications par de simples additions vectorielles. Le réseau complexe-logarithmique obtenu de la sorte convient, lui aussi, à la représentation de plans vectoriels et de courbes locales. En partant de ce réseau, l'auteur a construit un tambour à calcul complexe, qui a le mérite d'être utilisable aussi bien pour le calcul vectoriel que pour le calcul scalaire. L'auteur donne quelques renseignements sur la marche à suivre et montre, par des exemples tirés des applications les plus fréquentes, qu'un tel réseau peut être utilisé dans de nombreux cas pratiques.

1. Einleitung

Ebenso nützlich wie der fast unentbehrliche logarithmische Rechenschieber für die Rechnung mit skalaren Grössen ist ein logarithmisch verzerrtes Netz der Gaußschen Zahlenebene für die Umrechnung und Multiplikation von komplexen Zahlen. Bei geeigneter Ausbildung des Netzes und handlicher Anordnung der Ablesehilfsmittel können viele in Zusammenhang mit komplexen Zahlen stehende Aufgaben der Elektrotechnik und Schwingungstechnik einfach und schnell gelöst werden, deren Bearbeitung mit dem Rechenschieber wesentlich langwieriger ist.

2. Aufgabenstellung

Komplexe Zahlen in Komponentenform $z = a + jb$ ¹⁾ oder in Polarform $z = r \cdot e^{j\varphi}$ lassen sich durch Punkte im Netz der Gaußschen Zahlenebene (Fig. 3) darstellen. Da sich die Kreisfunktionen, und damit Schwingungsvorgänge aller Art, als Projektionen, d. h. als Real- und Imaginärteil eines umlaufenden Drehzeigers ²⁾ auffassen lassen,

$$r \cdot \sin \omega t = \text{Im} (r \cdot e^{j\omega t})$$

$$r \cdot \cos \omega t = \text{Re} (r \cdot e^{j\omega t}) \text{ mit } \omega = 2 \pi f = \frac{2\pi}{T}$$

und man bei Drehzeigern gleicher Frequenz von ihrem Umlauf absehen kann (da sich dabei ihre gegenseitige Lage nicht verändert), kann man auch die Diagramme und Ortskurven der Elektrotechnik und Schwingungstechnik in eine Gaußsche Zahlenebene einzeichnen. Dadurch hat sie ihre grösste praktische Bedeutung. Aber viele andere auch rein mathematische Aufgaben sind in der komplexen Ebene gut darstellbar.

Man kann das Kartesische Koordinatennetz der Gaußschen Zahlenebene zur Darstellung komplexer Zahlen und das Polarkoordinatennetz zu ihrer Darstellung nach Betrag und Winkel übereinanderlegen; dann entsteht also ein doppeltes Netz: ein rechtwinkliges mit achsparallelen Geraden gleichen Realteiles $a = r \cdot \cos \varphi$ und gleichen Imaginärteiles

$b = r \cdot \sin \varphi$, und darüber ein polares mit konzentrischen Kreisen gleichen Betrages $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ und Radien gleichen Argumentes $\varphi = \arctg \frac{b}{a}$

[Phase, Winkel werden oft in Gradmass gemessen und geschrieben; sie sollen zu Berechnungen stets in Bogenmass ($360^\circ = 6,28\dots$) umgerechnet werden]. Diese Darstellung in der komplexen Ebene erlaubt also sofortiges Umlesen aus der Komponenten- in die Vektorform und umgekehrt. Dieses Umrechnen erfordert selbst in der bei dem Rechenschieber «Darmstadt» möglichen vorteilhaftesten Ausführungsart ³⁾ (Fig. 1) — für die allerdings beide

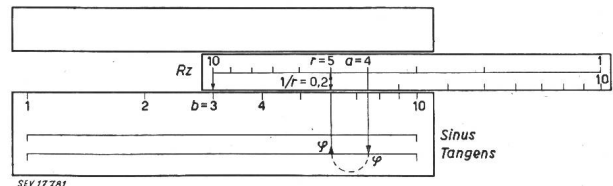


Fig. 1

Umrechnungsbeispiel von rechtwinkligen Koordinaten in Polarform mit Rechenschieber

$\bar{z} = a + jb = r \cdot e^{j\varphi}$; ($a > b$); am Beispiel $4 + 3j \triangleq 5 \cdot e^{j \cdot 36,9^\circ}$
 und $\frac{1}{z} = \frac{1}{a + jb} = \frac{1}{r} \cdot e^{-j\varphi}$; am Beispiel $\frac{1}{4 + 3j} \triangleq 0,2 \cdot e^{-j \cdot 36,9^\circ}$
 (ist $a > b$, so erhält man Komplementärwinkel $90^\circ - \varphi$)

Komponenten innerhalb einer Dekade liegen müssen, weil sonst ihr Verhältnis $< 0,1$ und ihr Argument $< 5,8^\circ$ nicht mehr auf der Rechenschieberteilung sind — mehrere Einstellungen und Zwischenablesungen. Durch einfache vektorielle Addition der Komponenten oder der Drehzeiger ist eine Addition von komplexen Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene erledigt. Leider aber ist eine zeichnerische Multiplikation (auch Division und Potenzierung) von komplexen Zahlen in diesem Netz nur durch umständliche geometrische Konstruktion möglich. Daher sind Produkte komplexer Zahlen und darauf zurückzuführende Aufgaben der Schwingungstechnik in der Gaußschen Zahlenebene nicht gut zu lösen; sie müssen durch numerische Rechnung mit dem Rechenschieber gesondert ermittelt und dann erst eingezeichnet werden. Die Gaußsche Zahlenebene ist also ein Koordinatensystem und kein Rechenhilfsmittel, denn gerade die Multiplikation sollte erleichtert sein. Dass dies

¹⁾ Im Gegensatz zur Elektrotechnik braucht man in der Mathematik ausschliesslich i als imaginäre Einheit.

²⁾ Im folgenden werden zeitunabhängige komplexe Zahlen oder Vektoren einer Ebene als «Operatoren», zeitabhängige umlaufende Drehzeiger als «Zeitvektoren» bezeichnet, obwohl sie streng genommen keine Vektoren sind.

³⁾ siehe Edelmann, H.: Aus der Praxis des Rechenschiebers. Elektrotechn. Z. Bd. 61(1940), Nr. 45, S. 1015...1016.

durch logarithmische⁴⁾ Rechnungsweise zu erreichen sein müsste, zeigt der Vergleich mit dem Rechenschieber. Es handelt sich also darum, die Gaußsche Zahlenebene in ein logarithmisches Netz zu verzerren, ohne ihre Vorteile zu verlieren. Dies hat m. W. zuerst Reinhardt⁵⁾ mit Erfolg durchgeführt; seine Veröffentlichung ist jedoch nicht mehr so bekannt geworden, wie es die Sache verdient und ist zurzeit schwer zu erhalten.

3. Herleitung des Netzes

Ausser dem dort gefolgten formal-mathematischen Weg, dieses logarithmische Netz zu finden, gibt es einen recht anschaulichen, der leichter und ohne Kenntnis des Verfahrens der «konformen Abbildung» $\omega = \ln z$ zum Verständnis führt, und der deshalb im folgenden für eine breite Anwendung dieses Netzes werben soll, das des weiteren zu einem recht vorteilhaften Rechenhilfsmittel ausgestaltet wird.

Die Formel für die Ausführung der Multiplikation komplexer Zahlen ist bekanntlich:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a_1 + jb_1) \cdot (a_2 + jb_2) = r_1 e^{j\varphi_1} \cdot r_2 e^{j\varphi_2} \\ &= r_1 r_2 \cdot e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)} \end{aligned}$$

In Worten: Multiplikation der Beträge und Addition des Winkels.

Man erinnert sich daraufhin an halblogarithmisches Netzpapier, auf dem in Richtung der logarithmisch geteilten Achse durch Streckenaddition die durch deren Länge definierten Beträge multipliziert werden, während in Richtung der linear geteilten Achse Addition von Strecken eine Addition der entsprechenden Zahlen darstellt. Man wird also Be-

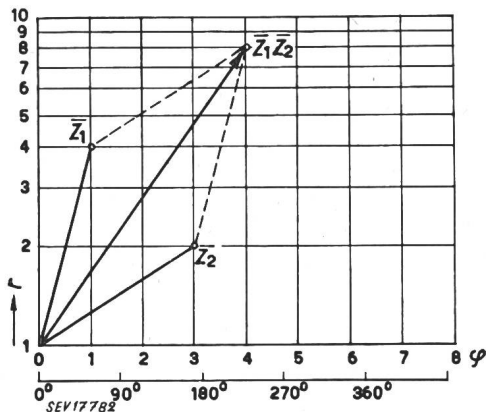


Fig. 2

Komplexe Zahlen im halblogarithmischen Netz

Beispiel zur Multiplikation:

$$\begin{aligned} z_1 &= 4 e^{j1}; \quad z_2 = 2 e^{j3}; \quad z_1 z_2 = 8 e^{j4} = e^{j \cdot 229^\circ} \\ &(\varphi \text{ im Bogenmass}) \end{aligned}$$

trag r und Argument φ einer komplexen Zahl in halblogarithmisches Netzpapier so eintragen, dass das Argument der linear geteilten Achse, der Be-

⁴⁾ Ein nur indirekt logarithmisches Verfahren zur Multiplikation bringt Oppelt, W.: Graphische Verfahren zur komplexen Multiplikation. Arch. f. elektr. Übertragung 2(1948), S. 76.

⁵⁾ siehe Reinhardt, F.: Rechentafel zum Umrechnen von rechtwinkligen in Polarkoordinaten. Druckschrift der Fa. Siemens & Halske: Messeinrichtungen für die Fernmeldetechnik, Berlin 1944.

trag der logarithmischen zugeteilt wird (Fig. 2), und zur Multiplikation zweier so durch ihre eingezeichneten Netzpunkte gegebener komplexer Zahlen die von Punkt 1 der logarithmischen Leiter zu ihnen führenden Zeiger vektoriell addieren, d. h. Argumentstrecke zu Argumentstrecke und Ordinatestrecke zu Ordinatestrecke (unter Berücksichtigung des Vorzeichens) ansetzen.

Damit wäre ein Schritt zur Lösung des Vorhabens, nämlich der einfachen Multiplikation, getan. Es bleibt der zweite, die Umrechnung aus der

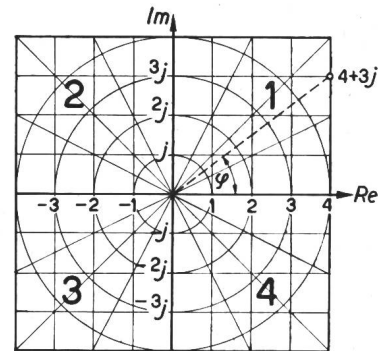


Fig. 3

Die vier Quadranten des doppelten Netzes der Gaußschen Zahlenebene

Die Kreise bedeuten Linien gleichen Betrages, die Radien solche gleichen Winkels. Die Senkrechten bedeuten Linien gleichen Realteiles, die Waagrechtens solche gleichen Imaginärteiles. (Die Maßstäbe beider Achsen müssen gleich sein.)

Als Beispiel ist der Punkt $\bar{z} = 4 + 3j$ in die Fig. eingetragen.

eben gezeichneten Vektorform in die Komponentenform ebenso einfach wie in der Gaußschen Zahlenebene zu ermöglichen. Dazu ist eine Veranschaulichung nützlich, die eine Überführung der linearen Zahlenebene in die logarithmisch verzerrte versinnbildlicht. Sie geschieht in drei Schritten:

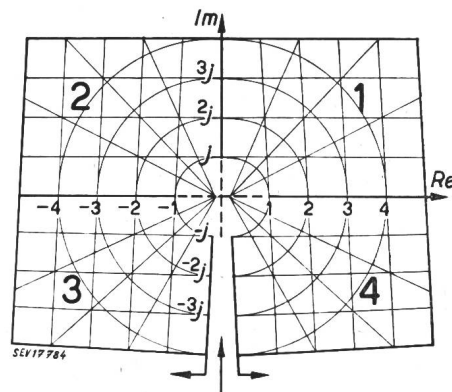


Fig. 4

Das aufgeschnittene Netz

a) Ausgang. Die vier Quadranten des doppelten Netzes der Gaußschen Zahlenebene⁶⁾ zeigt Fig. 3. Dieses Netz wird nun von unten her aufgeschnitten und aufgebogen (Fig. 4).

⁶⁾ Der verlockende kürzere Name «Gaussnetz» ist für ein Netzpapier zur geradlinigen Darstellung der Gaußschen Glockenkurve der Häufigkeitsverteilung vorbehalten (siehe Lorenz: Über die Analyse von Verteilungskurven. Die Technik, Bd. 2(1947), S. 83...88).

b) *Der Übergang.* Durch das Aufbiegen werden die Kreise flacher; die Radien bleiben gerade und die rechtwinkligen Netzlinien erhalten gleichartige Krümmung (Fig. 5).

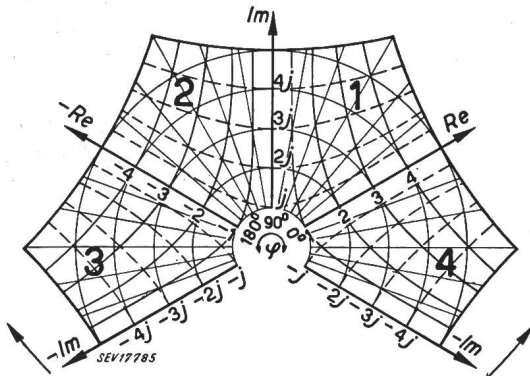


Fig. 5
Das aufgebogene Netz im Übergangsstadium

Bei weitergehender Verformung ergibt sich:

c) *Das aufgebogene Netz.* In diesem sind die Linien gleichen Betrages waagrecht, die Linien gleichen Winkels senkrecht. Die Linien gleichen Realteils und die Linien gleichen Imaginärteils sind kongruente Netzkurven. Die Maßstäbe der senkrechten Achsen sind einander gleich, der der Argumentachse kann beliebig gewählt werden (Fig. 6).

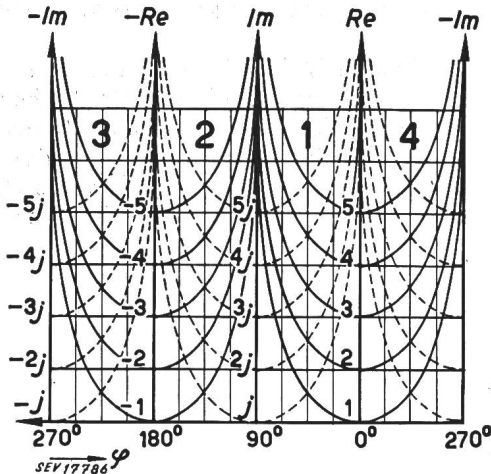


Fig. 6
Das fertig aufgebogene Netz

Da das Polarnetz in r und φ mit $\varphi = 360^\circ$, d. h. mit einem vollen Umlauf, periodisch war, ist auch das aufgeschnittene Netz mit linearer φ -Teilung mit $\varphi = 360^\circ$ periodisch, d. h. es ist nicht nötig, mehr als die vier Quadranten im logarithmischen Netz darzustellen. Zum Schluss drückt man die (bisher noch gleichmässige) Betragsteilung logarithmisch zusammen und erhält das gesuchte (halb-)logarithmische Netz, das die geforderten Rechenoperationen gestattet.

d) *Die logarithmisch verzerrte Gaußsche Zahlenebene* mit normal gerichtetem Achsensystem ist nun das «komplex-logarithmische Netz». Man erkennt in Fig. 7, Seite 21, dass die vorher geraden und rechtwinkligen Netzlinien zu Kurven («Netzkur-

ven») verbogen sind. Sie waren vorher Linien gleicher Komponente, ihre Gleichung in Polarkoordinaten war

$$\text{für } \text{Re} = \text{konst.}: r_a = \frac{b}{\sin \varphi} = \frac{b}{\cos(\varphi + 90^\circ)}$$

$$\text{für } \text{Im} = \text{konst.}: r_b = \frac{a}{\cos \varphi}$$

Zu gleichen Vektoren müssen immer gleiche Komponenten gehören, gleichgültig, in welchem verzerrten Netz sie dargestellt werden. Dieselbe Gleichung muss daher auch im logarithmischen Netz für die jetzt rechtwinkligen Koordinaten der Kurven gleicher Komponente gelten, sobald ihre Zahlenwerte in logarithmischem Maßstab abgemessen und aufgetragen werden (Fig. 8).

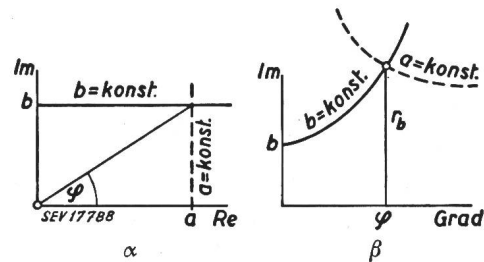


Fig. 8

Vergleich der Darstellung von Komponenten in der Gaußschen Zahlenebene (α) und im komplex-logarithmischen Netz (β) zur Ableitung der Netzlinien-Gleichung

Um das Netz zu zeichnen, braucht man also nur eine einzige Vorlage oder Schablone, mit deren Hilfe man die unter sich sämtlich gleichen und parallelen, um den Faktor b in Betragrichtung bzw. um 90° verschobenen Kurven gleicher Komponente leicht erhält. Am einfachsten ist es, dieses Kurvennetz in eines der käuflichen halblogarithmischen Papiere einzutragen, dessen vorhandenes Netz Betrag und Winkel ordnet⁷⁾.

Es würde an sich ausreichen, einen Quadranten des Netzes zu zeichnen, etwa für das Argument φ zwischen 0 und 90° . Es lassen sich nämlich alle komplexen Zahlen durch Erweitern mit passenden Potenzen von 10 und j in diesen Bereich bringen:

- $a + jb$ im Quadranten 2 entspricht $j(b + ja)$ im Quadranten 1,
- $a - jb$ im Quadranten 3 entspricht $-(a + jb)$ im Quadranten 1,
- $a - jb$ im Quadranten 4 entspricht $-j(b + ja)$ im Quadranten 1.

Beispiel: $125 - 18j = -100j \cdot (0,18 + 1,25j)$.

Es ist aber dennoch von grossem Vorteil, alle vier Quadranten vor sich zu haben; man gewinnt sehr an Anschaulichkeit und erspart sich Mühe und Fehler bei der Umrechnung, besonders bei Schwin-

⁷⁾ Im Notfall reicht es auch aus, sich eine einzige Netzkurve obiger Gleichung auf transparentes Papier zu zeichnen und als Deckblatt zum Ablesen der Komponenten der auf halblogarithmisches Papier eingetragenen Punkte zu verwenden.

gungs- und Ortskurvenberechnungen, die sich über alle vier Quadranten erstrecken. Für besonders genaue Darstellungen kann zusätzlich ein Quadrant in grossem Maßstab vorgesehen werden.

linder schiebt man einen durchsichtigen Ablesemantel (Fig. 10), der einige Ablesemarken und -linien trägt, die später noch besprochen werden. Über diesen legt man noch einen durchsichtigen

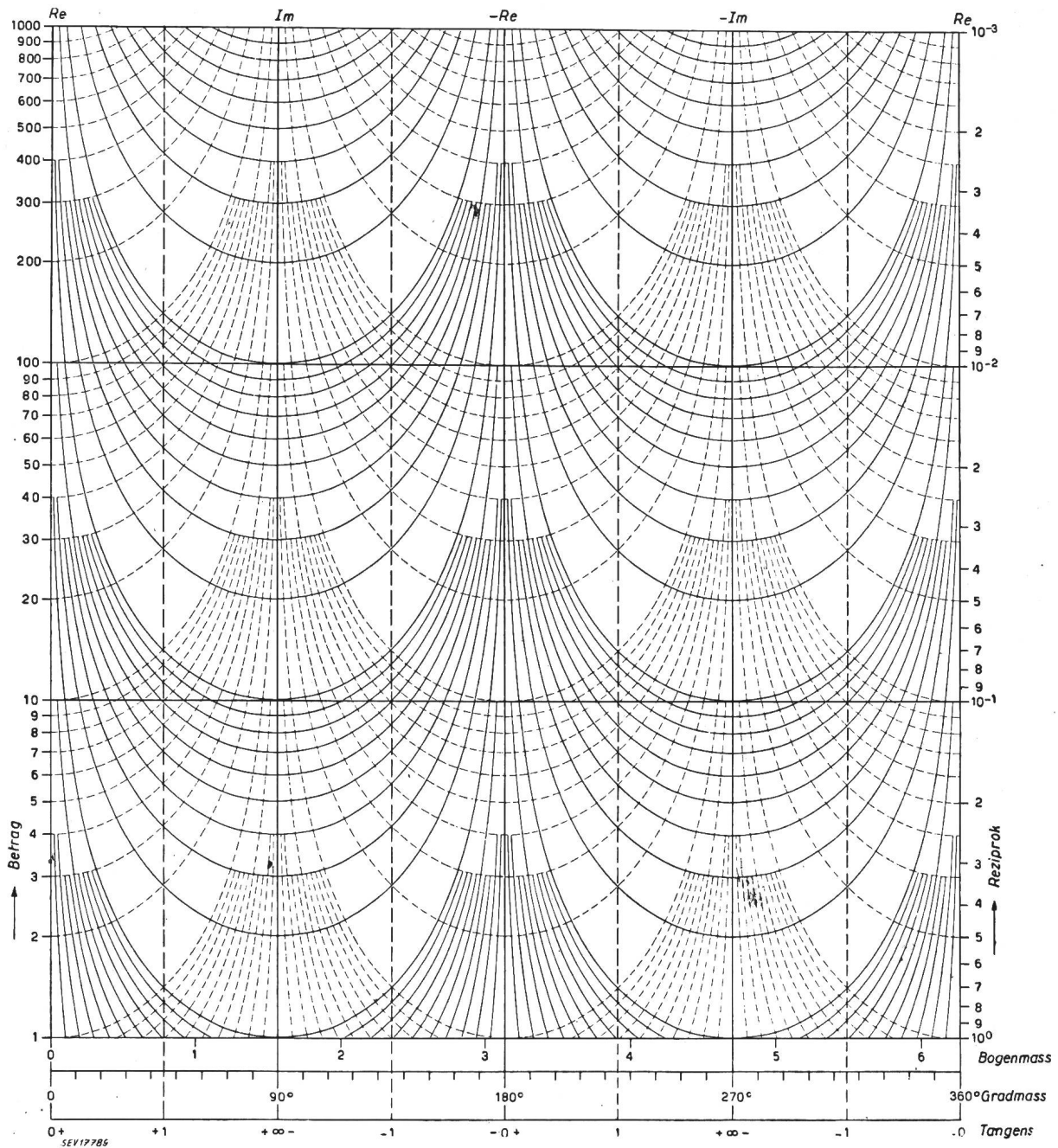


Fig. 7
Das komplex-logarithmische Netz

Erweiterung zur «Komplex-Rechenwalze»⁸⁾

Für die Verwendung des Netzes als Rechenhilfsmittel ist es jedoch am besten, die vier Quadranten zu einer Walze zusammenzubiegen, so dass die Winkelteilung fortlaufend wird⁹⁾ (Fig. 9). Über den Zy-

⁸⁾ nicht: komplexe Rechenwalze!

⁹⁾ Reinhardt bog einen Quadranten mit einer logarithmischen Dekade zur Walze zusammen, so dass die Betragteilung fortlaufend wurde; siehe «Der logarithmische Rechenzylinder für komplexe Zahlen». Elektrotechn. Z. Bd. 69(1948), Nr. 3, S. 78...82.

Ring mit einem Achsenkreuz als Ablesemarke, der dem Läufer beim Rechenschieber entspricht.

4. Die Eigenschaften der Netzlinien

Die senkrechten Achsen des Netzes verkörpern rein reelle oder rein imaginäre Zahlen und tragen je eine logarithmische Teilung in gleichem Maßstab, deren Bezifferung auch für den Betrag r gilt. Punkte einer Waagrechten haben gleichen Betrag r .

Die waagrechte Achse trägt eine lineare, nach dem Argument φ im Winkel- oder Bogenmass bezifferte

Teilung: 0...360° oder 0...6,28..., sowie eine Tangente.

Netzkurven, die die reellen Achsen (Re) schneiden, sind Linien gleicher Cosinuskomponente (in Fig. 9 gestrichelt). Netzkurven, die die imaginären Achsen (Im) schneiden, sind Linien gleicher Sinuskomponente (in Fig. 9 ausgezogen).

Die Schnittpunkte der Betragswaagrecht 1 mit den Netzkurven geben die Ordinaten der Kreisfunktionen sin und cos in Abhängigkeit vom Argument; die

Der Quotient von Sinus- und Cosinuskomponente in einem Punkt r, φ des Netzes, d. h. der Tangens des zugehörigen Winkels φ , lässt sich als Differenzstrecke der Minimalpunkte auf den Re- und Im-

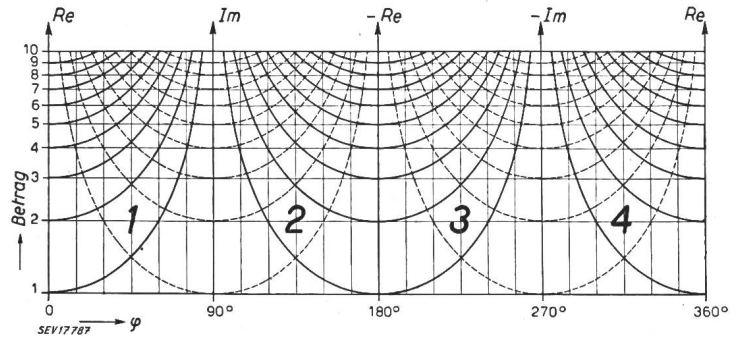


Fig. 9
Das Netz der Komplex-Rechenwalze

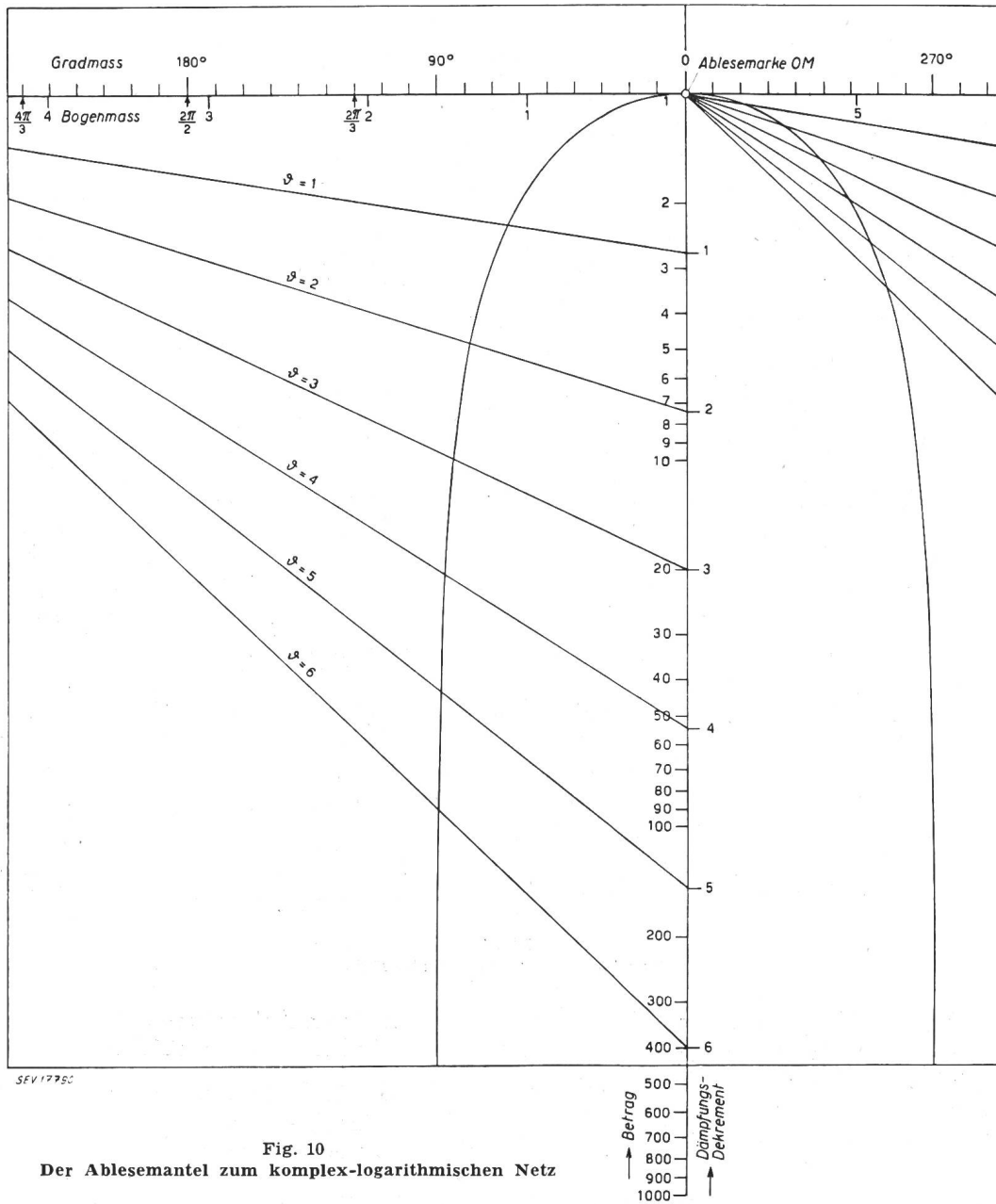


Fig. 10
Der Ablesemantel zum komplex-logarithmischen Netz

Schnittpunkte einer anderen Waagrecht konstanten Betrages geben die Ordinaten von Sinus- und Cosinuswellen der Amplitude r .

Achsen der sich in diesem Punkt schneidenden Netzkurven in logarithmischem Betragesmaßstab abmessen (Fig. 11), sein Reziprokwert ist der Co-

tangens. Eine grobe Tangente ist ausserdem parallel zur Winkelteilung des Arguments angebracht.

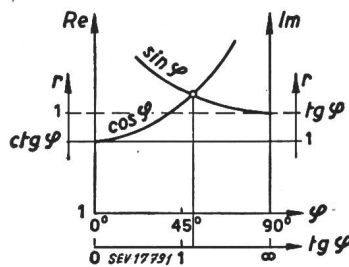


Fig. 11
Das Ablesen des Tangens
und des Cotangens

Die Netzkurven sind weiterhin logarithmierte Sinus- oder Cosinuslinien der Amplitude r , deren negative Halbperioden-Äste zu den positiven gleichlaufend umgeklappt sind und die sich auf die Reziprokteilung des Betrages beziehen (Fig. 12).

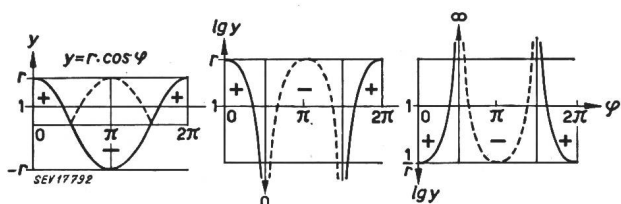


Fig. 12
Entstehung der Netzkurve aus der Cosinuskurve

5. Die Komplex-Rechenwalze als Rechenhilfsmittel und ihre Anwendung

Die einfachen Aufgaben, die mit dem beschriebenen Netz oder der Rechenwalze gelöst werden können, ergeben sich aus den Eigenschaften des Netzes und der Aufgabenstellung seiner Herleitung. Sie sind ohne weitere Erläuterung auszuführen. Darüber hinaus aber gibt es eine Menge von Sondermöglichkeiten, die nicht so unbedingt auf der Hand liegen und auf die daher im einzelnen hingewiesen werden soll. Eine Anzahl von Ablesehilfsmitteln ist zur bequemen Benutzung noch nötig; sie werden bei der Behandlung der entsprechenden Aufgaben erwähnt und erläutert. Natürlich kann nicht jede in der Praxis vorkommende Aufgabe hier im einzelnen vorgeführt werden; eine volle Ausnutzung aller Vorteile der Rechenwalze wird erst durch Übung und Erfahrung gewährleistet — wie es beim üblichen Rechenschieber auch der Fall ist.

a) *Multiplizieren* von zwei oder mehreren Vektoren geschieht durch vektorielle Addition. Dazu stellt man die Ablesemarke $0M$ des durchsichtigen Mantels auf den einen Faktor kennzeichnenden Netzpunkt, die Marke des Läufers $0L$ auf $Re = 1$ und verschiebt dann beide gemeinsam, bis $0L$ auf den zweiten Faktor zeigt: dann steht $0M$ über dem Produkt. Dessen Betrag und Phase sind am Schnitt der Reziprokteilung des Mantels mit der Argumentteilung zu finden. (Siehe hierzu das Netz Fig. 9 und dessen Deckblatt Fig. 10, das dem Ablesemantel entspricht.)

Der Leser lasse es sich nicht verdriessen und zeichne das Achsenkreuz des Ablesemantels nach Fig. 10 auf transparentes Papier durch. Dann lässt

sich die Multiplikation in Fig. 9 leicht ausführen, wie sie anhand des dort eingezeichneten Beispiels aus Fig. 2 nochmals erläutert werde:

$$\bar{z}_1 = 4 e^{j1}, \quad \bar{z}_2 = 2 e^{j3}, \quad \bar{z}_1 \bar{z}_2 = 8 e^{j4}$$

Man legt das Transparent des Ablesemantels so auf das Netz, dass seine waagrechte (Winkel-)Achse in Höhe des Betrages $r_1 = 4$ (Teilung am linken Rand) verläuft und seine senkrechte (Betrags-)Achse gleichzeitig auf den Winkel $\varphi_1 = 1$ in Bogenmass (Teilung an der unteren Netzkante) zeigt. Dann deckt der Achsenschnittpunkt, die Ablesemarke $0M$, den dem Vektor \bar{z}_1 entsprechenden Netzpunkt. Den linken unteren Netzpunkt $Re = 1$ markiert man (mangels des bei der Rechenwalze vorgesehenen Läufers) mit einem Bleistiftpunkt auf dem transparenten Deckblatt, so die fehlende Marke $0L$ des Läufers ersetzend. Dann verschiebt man das Deckblatt parallel zu sich selbst, bis diese Bleistiftmarke über dem Netzpunkt \bar{z}_2 mit den Werten $r_2 = 2$ und $\varphi_2 = 3$ liegt. Der Achsenschnittpunkt $0M$ zeigt dann auf das Produkt $\bar{z}_1 \bar{z}_2$, dessen Betrag $r = 8$ und Winkel $\varphi = 4$ man leicht an den Teilungen des Netzes oder der Mantelachsen abliest.

b) *Dividieren* und *Potenzieren* erfolgen sinngemäss. Beim

c) *Wurzelziehen* sind ausser dem Vektor des Betrages $\sqrt[n]{r}$ und des Argumentes $\frac{\varphi}{n}$ noch die $n-1$ weiteren Wurzeln gleichen Betrages gültig, die um die Winkel $\frac{360}{n}$ gegenseitig verdreht sind. Zum Ablesen der zweiten und der dritten Wurzeln trägt die Argumentteilung des Mantels die zugehörigen Ablesemarken bei $\frac{2\pi}{2}$, $\frac{2\pi}{3}$ und $\frac{4\pi}{3}$.

Wohlgermerkt dürfen diese Operationen nur zwischen zeitunabhängigen Vektoren oder zwischen einem Operator und einem Zeitvektor ohne weiteres vorgenommen werden; Zeitvektoren ändern durch Multiplikationen und dergleichen miteinander ihre Umlauffrequenz und sind daher nicht mehr mit ihren Faktoren gemeinsam in einem Vektorplan darzustellen, weil sie ja dann mit der Zeit ihre gegenseitige Lage verändern.

d) Die *konjugiert komplexe Zahl* $z^* = a - jb = re^{-j\varphi}$ hat umgekehrtes Vorzeichen des Imaginärteiles oder des Winkels.

e) Die *Inversion*, das Bilden der reziproken komplexen Zahl, geschieht nach

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a^2 + b^2} - j \frac{1}{a^2 + b^2} = \alpha - j\beta = \frac{1}{r} e^{-j\varphi}$$

diese hat reziproken Betrag und umgekehrtes Vorzeichen des Winkels (Fig. 13).

Man kann diese Punktspiegelung durch Einstellen von \bar{z} und $Re = 1$ mit den beiden Ablesemarken wie beim Multiplizieren vornehmen. Einfacher ist es, mit der auf dem Mantel angebrachten Reziprokteilung den Betrag von $1/\bar{z}$ abzulesen. Die Kom-

ponenten liest man mit Hilfe der reziproken Ablesekurve auf dem Mantel an der Betragsteilung ab (Fig. 14).

f) Eine waagrechte Gerade stellt einen umlaufenden Drehzeiger konstanten Betrages dar, ist also Ortskurve einer *ungedämpften Schwingung* $y = r e^{j\omega t}$.

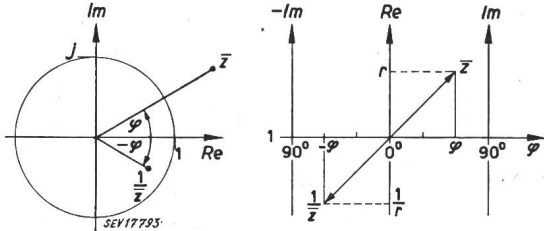


Fig. 13
Inversion

(Spiegelung am Einheitskreis und an der reellen Achse; im logarithmischen Netz Punktspiegelung an $Re = 1$).

g) Eine schräge Gerade im Netz repräsentiert eine exponentiell *gedämpfte Schwingung* $y = r e^{(-\delta + j\omega)t}$. Der Dämpfungsfaktor im Exponenten der Schwingungsgleichung ist

$$\delta = \frac{\vartheta}{2\pi}$$

Das logarithmische Dekrement ϑ der Dämpfung darin ist der natürliche Logarithmus des Verhältnisses zweier aufeinanderfolgender Maximalamplituden,

$$\vartheta = \ln \frac{u_t}{u_{t+\tau}}$$

Ein Bündel solcher schräger Geraden¹⁰⁾ für einige Dekrementwerte und nach ihnen beziffert ist auf dem Mantel angebracht; Zwischenwerte können leicht interpoliert werden. Mit ihrer Hilfe können einerseits die Ordinaten gedämpfter Schwingungen einfach abgelesen werden, deren Berechnung sonst

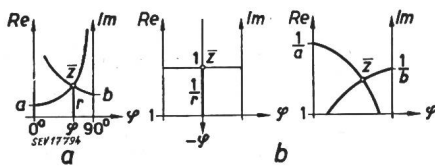


Fig. 14

Ablesen von z und $\frac{1}{z}$ nach Betrag und Komponenten
a im Netz; b mittels des Ablesemantels

einige Rechenschieberarbeit erfordert, andererseits kann aus mindestens zwei Werten einer gedämpften Welle, die nicht um eine volle Periode versetzt zu sein brauchen, die wirksame Dämpfung bestimmt werden. Beides ist je eine kleine, aber wesentliche Erleichterung für die praktische Schwingungsrechnung und -analyse und rechtfertigt diese von *Reinhardt* abweichende Gestaltung der Rechenwalze.

Zur Amplitudenänderung einer Sinusschwingung wird die waagrechte oder schräge Gerade um die

¹⁰⁾ Umgekehrt entsprechen solchen schrägen Geraden im polaren Netz logarithmische Spiralen; daher kann das Multiplikationsparallelogramm dort durch ein Viereck aus Spiralenstücken ersetzt werden; siehe *Oppelt*, Fussnote 4.

dem Faktor entsprechende Strecke achsenparallel verschoben. Zur Addition eines Phasenwinkels wird die Argumentteilung als Ganzes verschoben. Zur Multiplikation mit einem Frequenzfaktor n wird die Argumentteilung um diesen Faktor verzerrt, d. h. statt bei dem Argument t wird bei dem Produkt nt abgelesen.

h) Die reziproke Ablesekurve auf dem Mantel ist in bezug auf die Betragsteilung eine *Sinusquadratkurve* und erlaubt ein Ablesen der Funktionswerte $r \sin^2 \varphi$ und $r \cos^2 \varphi$.

i) Differenzieren eines Zeitvektors geschieht bekanntlich durch Vordrehen um 90° und Multiplizieren mit ω gemäss:

$$\vec{z}' = j\omega \vec{z}$$

k) Integrieren verlangt umgekehrt Rückdrehen um 90° und Dividieren durch ω :

$$\int z dt = -\frac{j}{\omega} \cdot \vec{z} = \frac{1}{j\omega} \cdot \vec{z}$$

Beides geschieht im logarithmischen Netz, indem man die Argumentteilung des Mantels mit $+90^\circ$ oder -90° auf den Netzpunkt einstellt und neben der Betragsteilung des Mantels bei dem Skalenwert ω oder $1/\omega$ nach Betrag oder Komponenten abliest.

6. Beispiel für die Anwendung des Netzes als Rechenhilfsmittel

Ein *Kettenbruch* im Komplexen. Für die Kaskadschaltung zweier Induktionsmaschinen lässt sich ein einphasiges Ersatzschaltbild nach Fig. 15 aufstellen. Darin sind Widerstände und Reaktan-

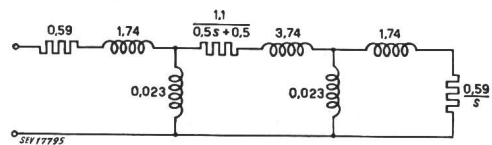


Fig. 15

Schaltschema zum Zahlenbeispiel

zen in Ohm, Querwiderstände und Admittanzen in Siemens angegeben. Der Schlupf s sei 3% . Die resultierende Impedanz Z lässt sich sofort als Kettenbruch aufschreiben:

$$Z = 0,59 + j1,74 + \frac{1}{-j0,023 + \frac{1}{2,14 + j3,47 + \frac{1}{-j0,023 + \frac{1}{19,67 + j1,74}}}}$$

(Kettenbrüche entstehen auch bei der Berechnung von Bandfiltern.)

Hieraus ermittelt man in üblicher Weise mit dem Rechenschieber «Darmstadt» den Wert

$$Z = 10,39 + j14,1 = 17,5 e^{j53,6^\circ} \text{ und damit den Strom}$$

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{220}{Z} = 12,6 e^{-j53,6^\circ} \text{ und seine Komponenten.}$$

Bei dieser Rechnung muss man, vom letzten Nenner ausgehend, die Komponenten nach Betrag und Winkel umrechnen, die Inversion durchführen und wieder in Komponenten auflösen. Wenn wie hier die Komponenten nicht innerhalb einer Dekade liegen, der Winkel also klein ist, kann diese Umrechnung auch nicht in der gezeigten einfachsten Weise geschehen, in der schon für diesen einen Nenner allein acht Einstellungen und Ablesungen nötig wären: a und $b \rightarrow \varphi$; $\varphi \rightarrow \frac{1}{r}$; $\frac{1}{r}$ und $\varphi \rightarrow \frac{1}{a}$ und $\frac{1}{b}$.

Nach der Addition des Summanden wird diese ganze Umrechnung erneut vorgenommen, insgesamt viermal.

Bei Verwendung des logarithmischen Netzes ist der Arbeitsgang viel einfacher: man sucht den den Komponenten entsprechenden Netzpunkt und liest seine reziproken Komponenten mittels der Mantelkurve ab. Das erfordert vier gegen anders mindestens acht Ablesungen, und für den viermal zu wiederholenden Vorgang insgesamt nur etwa drei Minuten. Eine gewiss bedeutende Erleichterung des Rechnungsganges! Allerdings sei zugegeben, dass die erreichbare Genauigkeit bei handlichem Format der Rechenwa ze nicht ganz die des Rechenschiebers ist, besonders für die Bereiche kleiner Winkel. Ob das aber die Anwendung dieses schnellen Verfahrens ausschliesst, ist von Fall zu Fall zu entscheiden. Dann bleibt immer noch der Ausweg, ein grossformatiges Blatt eines Quadranten als Netz zu verwenden.

7. Die Ortskurve im komplex-logarithmischen Netz

Bisher wurden im wesentlichen einzelne mathematische Operationen an zeitunabhängigen Operatoren oder Zeitvektoren behandelt, d. h. das Netz als Rechenhilfsmittel verwendet. Dabei konnten Zeitvektoren und Operatoren gemischt und verknüpft werden, solange dadurch eine Änderung der Umlauffrequenz nicht eintrat oder beachtet wurde. Benutzt man jedoch das Netz als Koordinatensystem zum Einzeichnen von Vektorplänen oder Ortskurven, dann ist auf die Frequenzgleichheit aller Vektoren zu achten. Ein Produkt zweier Zeitvektoren, z. B. die Leistung, darf nicht im gleichen Vektorplan mit den Faktoren Strom und Spannung auftreten.

Vektorpläne, d. h. additive Aneinanderreihungen von komplexen Zahlen, lassen sich im logarithmischen Netz ebenso leicht zeichnen wie im linearen. Durch die logarithmische Teilung sind grosse Zahlenwerte immer noch in handlichen Formaten unterzubringen, und der nicht erreichbare Nullpunkt ist mit beliebiger Genauigkeit anzunähern. Eine Addition ist hier zahlenmässig ohne Hilfsmittel und eine Multiplikation zeichnerisch durchzuführen, und leichter als umgekehrt im linearen Netz, wo die Multiplikation einen Rechenschieber als zweites Hilfsmittel erfordert.

Auch *Ortskurven* (d. h. die zeitmarkierte Bahn des Endpunktes eines zeitveränderlichen Vektors) lassen sich im logarithmischen Netz mit besonderem Vorteil darstellen, da die im normalen Netz häufigen einfachen Formen Gerade und Kreis hier meist zu ebenso einfachen Geraden und Netzkurven werden, deren Einzeichnung in das Netz oft noch leichter ist. Es ist dabei bequem und praktisch, das Netz als Transparentblatt auf eine Unterlage zu legen, die die auf dem Mantel der Rechenwalze vorhandenen Teilungen und Marken trägt, so dass diese durchscheinen und leicht durchgezeichnet werden können.

Zum Einzeichnen von Ortskurven ist das komplex-logarithmische Netz schon bekannt geworden u. a. durch die Bücher von Bode¹¹⁾ und von Strecker¹²⁾, der es benutzt, um mehrfach durchlaufende Kurven ähnlich den «Riemannschen Blättern» voneinander zu trennen und sie einzeln aneinanderzureihen. Beide erkennen jedoch nicht die besondere Eignung des Netzes zum einfachen Multiplizieren.

Im Zuge der hier beabsichtigten Einführung in die Vorteile des komplex-logarithmischen Netzes im Interesse einer Förderung der praktischen Analysis allgemein kann natürlich nicht tiefer auf die speziell in der Elektrotechnik und neuerdings auch für die Darstellung von Stabilitätsproblemen in der Regeltechnik gebräuchlichen Ortskurvendarstellungen eingegangen werden.

Adresse des Autors:

Dr.-Ing. W. de Beauclair, Stuttgart-Degerloch, Böhmstrasse 11.

¹¹⁾ Bode, H. W.: Network Analysis and Feed-back Amplifier-Design. van Nostrand Verlag, New York 1945.

¹²⁾ Strecker, F.: Die elektrische Selbsterregung. Hirzel-Verlag, Stuttgart 1947.

Technische Mitteilungen — Communications de nature technique

Commission Electrotechnique Internationale

Extrait du Rapport du Secrétaire Général concernant la période de mai 1949 à mai 1950

061.2: 621.3 (100)

I. Introduction

Au cours des douze derniers mois, l'activité d'ensemble de la Commission s'est maintenue à un niveau élevé, se traduisant par des progrès sensibles dans la plupart des domaines où elle s'exerce. Pour mettre en évidence le développement soutenu des travaux des Comités d'Etudes, il paraît utile de citer tout d'abord quelques faits et chiffres.

24 Comités d'Etudes sont actuellement en pleine activité, contre 18 en 1948; plusieurs autres sont sur le point de reprendre le travail.

230 documents, y compris les comptes rendus de réunions, ont été diffusés au cours de l'année 1949, contre 170 en 1948.

Le nombre de réunions techniques internationales, y compris celles de divers comités préparatoires et comités de rédaction, a atteint 17 pendant la période à l'examen, contre 11 pour la période correspondante précédente. 21 réunions sont prévues au cours des seuls mois de juin et juillet 1950.

Un nouveau fascicule intitulé «Recommandations internationales concernant les culots et douilles ainsi que les calibres pour le contrôle de l'interchangeabilité» est en instance de publication, l'enquête en vue de son approbation suivant la règle des six mois ayant pris fin récemment.

Des recommandations portant sur les sujets suivants sont maintenant à l'état de projets avancés: