

**Zeitschrift:** Bulletin de l'Association suisse des électriciens  
**Herausgeber:** Association suisse des électriciens  
**Band:** 48 (1957)  
**Heft:** 6

**Artikel:** Universalkurven für elektrische Schwingungskreise in dimensionsloser Darstellung  
**Autor:** Frei, A. / Strutt, M.J.O.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-1058665>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 18.01.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# BULLETIN

DE L'ASSOCIATION SUISSE DES ELECTRICIENS

ORGANE COMMUN

DE L'ASSOCIATION SUISSE DES ELECTRICIENS (ASE) ET  
DE L'UNION DES CENTRALES SUISSES D'ELECTRICITE (UCS)

## Universalkurven für elektrische Schwingungskreise in dimensionsloser Darstellung

Von A. Frei und M. J. O. Strutt, Zürich

(Mitteilung aus dem Institut für höhere Elektrotechnik der Eidgenössischen Technischen Hochschule, Zürich)

538.565

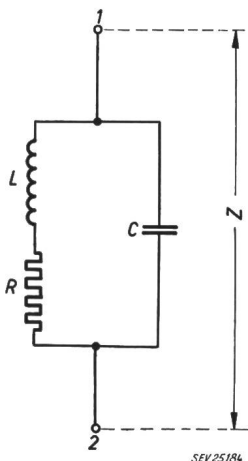
Bei der Behandlung der komplexen Impedanz eines Schwingungskreises nach Fig. 1 werden dimensionslose Veränderliche eingeführt. Der absolute Betrag und der Phasenwinkel der relativen komplexen Impedanz werden als Funktionen der relativen Frequenz und der Dämpfung diskutiert und kurvenmässig dargestellt. Die praktische Anwendung dieser Kurven wird angegeben.

Des variables sans dimension sont introduites pour la détermination de l'impédance complexe d'un circuit oscillant. La valeur absolue et l'angle de déphasage de l'impédance complexe relative sont discutés et représentés par des courbes en fonction de la fréquence relative et de l'atténuation. Les auteurs indiquent ensuite comment ces courbes peuvent être utilisées en pratique.

### I. Formelzusammenstellung

Betrachtet man den in Fig. 1 gezeichneten Schwingungskreis und berechnet die komplexe Impedanz  $Z$  zwischen den Punkten 1 und 2 bei der Kreisfrequenz  $\omega$ , so gilt für die Impedanz:

$$Z = \frac{R + j\omega [L(1 - \omega^2 LC) - R^2 C]}{(\omega RC)^2 + (1 - \omega^2 LC)^2} \quad (1)$$



Die Resonanzkreisfrequenz  $\omega_{0r}$  soll, unter Berücksichtigung des Verlustwiderstandes, so definiert werden, dass in Gl. (1) für  $\omega_{0r}$  der Imaginärteil von  $Z$  verschwinde:

Fig. 1  
Impedanz  $Z$  eines aus Widerstand  $R$ , Induktivität  $L$  und Kapazität  $C$  gebildeten Schwingungskreises

$$L(1 - \omega_{0r}^2 LC) - R^2 C = 0$$

$$\omega_{0r}^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2} \quad (2)$$

Für die Resonanzkreisfrequenz  $\omega_{0r}$  gilt:

$$Z = \frac{L}{RC} = Z_{0r} \quad (3)$$

Es sollen folgende Bezeichnungen eingeführt werden:

$$\left. \begin{aligned} \omega_0^2 &= \frac{1}{LC} \\ v &= \frac{\omega}{\omega_0} = \omega \sqrt{LC} \\ u &= R \sqrt{\frac{C}{L}} \\ z &= \frac{Z}{Z_r} = x + jy \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Die Grössen  $z$ ,  $x$ ,  $y$ ,  $u$  und  $v$  sind dimensionslos. Für die Resonanzkreisfrequenz  $\omega_{0r}$  ergibt sich:

$$\omega_{0r} = \omega_0 \sqrt{1 - u^2} \quad (5)$$

Die Grösse  $u$  (Dämpfung) hängt eng mit der Güte  $Q$  der Induktionsspule bei der Kreisfrequenz  $\omega_0$  zusammen:

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R},$$

$$u = \frac{1}{Q} \quad (6)$$

Für die Grösse  $z$  ergibt sich:

$$z = \frac{u^2 + jv(1 - u^2 - v^2)}{(1 - v^2)^2 + (uv)^2} \quad (7)$$

Diese dimensionslose Grösse  $z = x + jy$  ist komplex und hängt von zwei reellen dimensionlosen Grössen  $u$  und  $v$  ab. Man bezeichnet  $z$  als relative Impedanz des Kreises,  $v$  als relative Kreisfrequenz und  $u$  als Dämpfung oder reziproke Güte.

**II. Absoluter Betrag der relativen Impedanz als Funktion der relativen Kreisfrequenz und der reziproken Güte**

Aus Gl. (7) ergibt sich:

$$x = \frac{u^2}{(1-v^2)^2 + (uv)^2}$$

und

$$y = \frac{uv(1-u^2-v^2)}{(1-v^2)^2 + (uv)^2}$$

$$|z|^2 = x^2 + y^2 = \frac{u^4 + u^2v^2(1-u^2-v^2)^2}{[(1-v^2)^2 + (uv)^2]^2} \quad (8)$$

Untersucht man die Kurven in der  $uv$ -Ebene, für welche  $z$  einen konstanten Wert  $k$  annimmt, so sind diese Kurven nach der Gl. (8) durch die Gl. (9) gegeben:

$$u^4 + u^2v^2(1-u^2-v^2)^2 = k^2 [(1-v^2)^2 + (uv)^2]^2 \quad (9)$$

Es sollen zunächst einige allgemeine Eigenschaften der durch die Gl. (9) gegebenen Kurvenschar erörtert werden:

Für  $u = 0, v = 1$  ist die Gl. (9) eine Identität.

Für  $v \ll 1, uv \ll 1, v^4 \ll 4k^2$  gilt angenähert:  $u^2 = k$ , also  $u = +\sqrt{k}$ , weil  $u$  und  $k$  stets positiv sein sollen. Die Kurven  $|z|^2 = k^2$  in der  $uv$ -Ebene werden also in diesem Fall angenähert durch Gerade parallel zur  $v$ -Achse dargestellt.

Für  $v \gg 1$  gilt angenähert:  $u^2/v^2 = k^2$ , oder  $u/v = k$ , da  $u$  und  $v$  ebenso wie  $k$  positiv sein sollen. Auch in diesem Bereich der  $uv$ -Ebene werden somit die Kurven  $|z|^2 = k^2$  durch Gerade dargestellt.

Für  $v = 1$  ergibt sich:  $1 + u^2 = k^2$ , oder  $u = \sqrt{k^2 - 1}$ . Damit  $u$  bei reellem  $k^2$  reell und positiv wird, muss somit  $k^2 > 1$  sein. Das heisst, dass die Gerade  $v = 1$  der  $uv$ -Ebene nur für  $k^2 > 1$  durch Kurven  $|z|^2 = k^2$  getroffen wird. Man kann für  $k^2 > 1$  den Winkel berechnen, unter welchem die Kurven  $|z|^2 = k^2$  die Gerade  $v = 1$  schneiden. Hiezu berechnet man  $dv/du$  für  $v = 1$  und findet:

$$\frac{dv}{du} = \frac{1}{u}$$

In logarithmischem Mass setzt man:

$$U = \log u, \quad V = \log v$$

Dann ergibt sich:

$$\frac{dV}{dU} = 1$$

Das Bild der Kurven  $|z|^2 = k^2$  für  $k^2 > 1$  auf der Geraden  $v = 1$  wird also sehr einfach.

Es sollen nun die Kurven in der  $uv$ -Ebene berechnet werden, für welche der Wert  $|z|^2$  ein Maximum aufweist. Hiezu berechnet man:  $\delta|z|^2/\delta v$  und setzt dann diesen Wert gleich Null. Damit ergibt sich die Kurvengleichung:

$$-u^6v^2 + u^4(-1 + 4v^2 - 3v^4) + u^2(2 - 5v^2 + 6v^4 - 3v^6) + 1 - 2v^2 + 2v^6 - v^8 = 0$$

Diese Gleichung lässt sich in der Umgebung des Punktes  $v = 1, u = 0$  vereinfachen. Man setze  $v = 1 - \epsilon$  und  $\epsilon \ll 1$ .

Dann ergibt sich:

$$\epsilon = \frac{u^4}{4(1+u^2)} \quad (10)$$

Der geometrische Ort der Punkte in der  $uv$ -Ebene, für welche der Imaginärteil von  $z$  verschwindet, ist bei  $y = 0$ . Für  $u \ll 1$  ergibt sich angenähert, mit  $v = 1 - \epsilon, \epsilon \ll 1$ :

$$\epsilon = \frac{u^2}{2} \quad (11)$$

In der Umgebung von  $v = 1, u = 0$ , hat man somit drei geometrische Örter:

1.  $v = 1$ , eine Gerade für welche  $\omega = \omega_0$
2. die Gl. (10). Hier hat  $|z|^2$  ein Maximum,
3. die Gl. (11). Hier ist  $y = 0$ .

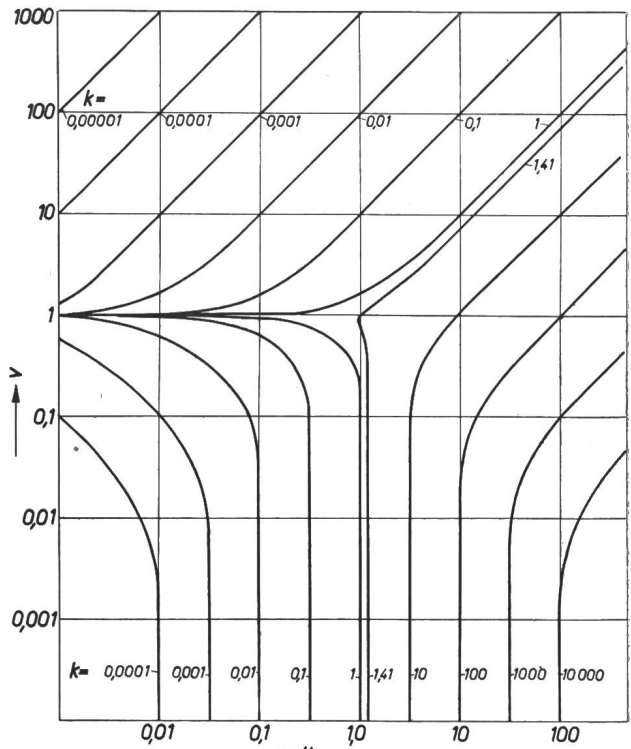


Fig. 2  
Absoluter Betrag  $k$  der relativen Impedanz als Funktion der relativen Kreisfrequenz  $v$  und der reziproken Dämpfung  $u$

Es ist nicht schwer festzustellen, dass hier die  $v$ -Werte der Örter 1, 2 und 3 bei konstantem  $u$  in der angegebenen Reihenfolge abnehmen.

Schliesslich zeigt die Fig. 2 in der  $uv$ -Ebene in logarithmischem Massstab den Gesamtverlauf der Kurven  $|z| = k$  nach Gl. (9).

**III. Kurven konstanten Argumentes der relativen Impedanz als Funktion der relativen Frequenz und der reziproken Güte**

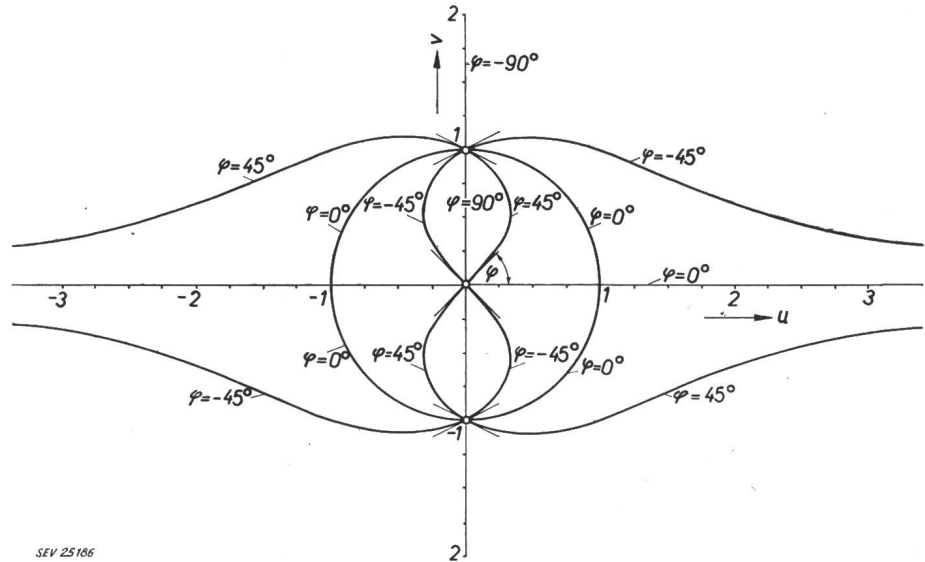
In der Schreibweise:  $z = |z|\exp(j\varphi)$  ist der Phasenwinkel  $\varphi$  durch

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x} = \frac{v(1-u^2-v^2)}{u} \quad (12)$$

gegeben. In dem besprochenen Problem haben nur die positiven  $u$ - und  $v$ -Werte einen Sinn. Zur Diskussion des Verlaufs der Kurven, die durch die Gl. (12) gegeben sind, ist es aber nützlich, auch negative Werte von  $u$  und  $v$  zuzulassen. In diesem Fall ist aus Gl. (12) ersichtlich, dass die Kurven um den Punkt  $u = 0, v = 0$  herum zentrisch symmetrisch verlaufen, denn wenn gleichzeitig  $u$  durch  $-u$  und  $v$  durch  $-v$  ersetzt werden, ändert sich  $\operatorname{tg}\varphi$  nicht.

Für  $u = 0$  und gleichzeitig  $v = 0$  wird der Wert von  $\operatorname{tg}\varphi$  unbestimmt. In

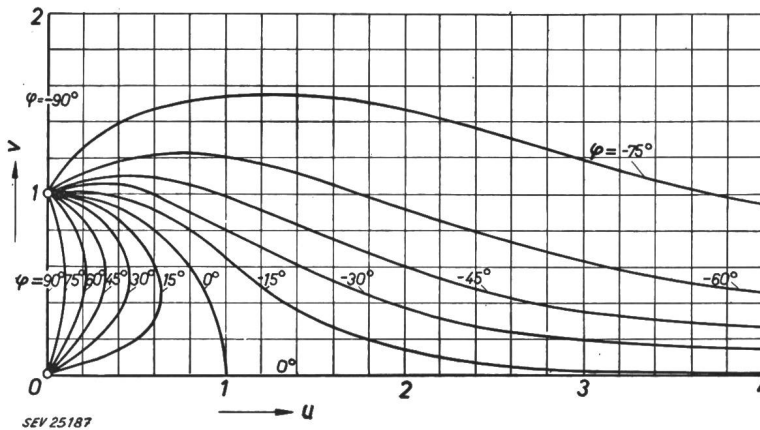
Fig. 3  
Kurven konstanten Argumentes der relativen Impedanz als Funktion der relativen Frequenz  $v$  und der reziproken Dämpfung  $u$



der unmittelbaren Umgebung dieses Ursprungs der  $uv$ -Ebene gilt angenähert nach Gl. (12):

$$\operatorname{tg}\varphi \approx \frac{v}{u}$$

Für  $u = 0, v = 1$  ergibt sich aus Gl. (12), dass alle Kurven konstanten Argumentes durch diesen Punkt hindurch gehen. In diesem Punkt ergibt sich:



Wenn für gegebene Werte der Kreisfrequenzen  $\omega$  und  $\omega_0$  sowie für einen gegebenen Phasenwinkel  $\varphi$  der Impedanz die zugehörige Dämpfung  $u$  gesucht ist, so kann sie mit Hilfe der Fig. 3 und 4 sofort ermittelt werden.

Bei praktischen HF-Aufgaben ist oft nur die Impedanz in Resonanznähe

Fig. 4  
Kurven konstanten Argumentes der relativen Impedanz im Bereich positiver relativer Frequenz  $v$  und positiver reziproker Dämpfung  $u$

$$\frac{dv}{du} = -\frac{1}{2} \operatorname{tg}\varphi$$

Dadurch ist die Richtung der Argumentkurven in diesem Punkt festgelegt.

Durch den Punkt  $v = 0, u = 1$  geht eine Kurve  $\operatorname{tg}\varphi = 0$  hindurch. Untersucht man die Gestalt der Kurven  $\operatorname{tg}\varphi = 0$  in der  $uv$ -Ebene, so ergibt sich aus Gl. (12) folgendes Gleichungspaar:

$$1 - u^2 - v^2 = 0; \quad v = 0$$

Das bedeutet, dass die eine Kurve durch den Einheitskreis mit dem Zentrum  $u = 0, v = 0$  dargestellt wird und die zweite durch die Achse  $v = 0$ .

Die Darstellung der Kurven konstanten Argumentes in der  $uv$ -Ebene führt auf die Fig. 3 und 4.

#### IV. Praktische Anwendungen der Universalkurven

Bei gegebenen Werten von  $L, C, R$  und  $\omega$  können aus den Gl. (4) die Grössen  $u, v$  und  $Z_{0r}$  berechnet werden. Bei Benützung der Kurven der Fig. 2, 3

und 4 können dann in einfacher Weise  $|z|$  und  $\varphi$  aus  $u$  und  $v$  ermittelt werden. Aus  $z$  ergibt sich die Impedanz  $Z$ .

Ist bei einem Schwingungskreis gemäss Fig. 1 bei bestimmter Frequenzabweichung  $v \neq 1$  der Abfall der Impedanzbeträge  $k$  gegeben, so kann mit Hilfe der Fig. 2 sofort die zugehörige Dämpfung  $u$  bestimmt werden.

wichtig. Dieser Bereich bildet einen Ausschnitt der Fig. 2, 3 und 4, der im Bedarfsfall vergrössert dargestellt werden kann.

Durch die obige dimensionslose Behandlung und Darstellung wird ein Überblick über alle Eigenschaften der komplexen Impedanz eines Schwingungskreises nach Fig. 1 ermöglicht.

#### Literatur

[1] Kämpf Müller, Karl: Einführung in die theoretische Elektrotechnik. 5. Aufl. Berlin: Springer 1955. S. 306.

Adresse der Autoren:

A. Frei, Institut für höhere Elektrotechnik der ETH, Zürich; Prof. Dr. M. J. O. Strutt, Institut für höhere Elektrotechnik der ETH, Zürich.