Zur Frage der Permittivität und Permeabilität des leeren Raumes

Von *R. Rădulet,* Bukarest

537.226.1:538.213

1. Problemstellung

Die in den letzten Jahren im Rahmen des Comité d'Etudes 24 der Commission Electrotechnique Internationale geführten, eine einwandfreie Definition der elektrischen und magnetischen Feldkonstante (ε_0 und μ_0) betreffenden Besprechungen haben die Aufmerksamkeit auf die nichtlinearen Verallgemeinerungen der linearen Elektronentheorie gelenkt. Die Permittivität und Permeabilität [1]) des leeren Raumes (ε_v und μ_v) sind nach diesen Verallgemeinerungen von den entsprechenden Feldkonstanten zu unterscheiden; sie werden universelle Funktionen der momentanen örtlichen Zustandsgrössen des elektromagnetischen Feldes und hängen zusammen mit der sog. Polarisation des Vakuums, bzw. mit der Feldabhängigkeit der Ausbreitungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Wellen im Vakuum. Zur Klarlegung des Unterschiedes zwischen den Feldkonstanten ε_0 und μ_0 einerseits und den entsprechenden Grössen ε_v und μ_v anderseits werden in Rahmen der klassischen linearen Theorien des elektromagnetischen Feldes die mit ihnen unvereinbaren physikalischen Tatsachen dargelegt, die zur Bildung der neuen, nichtlinearen Feldtheorien der elektromagnetischen Vorgänge im Vakuum und der Elementarteilchen Anlass gegeben haben; anschliessend werden die experimentellen Belege für die Nichtlinearität erörtert, die von den quantenphysikalischen Theorien suggeriert wurden, und dann die Eigenheiten der wichtigsten nichtlinearen Theorien, soweit sie für die genannte Frage von Belang sind, umrissen.

2. Stellung und Fortschritte der Frage im Rahmen der linearen Theorien des elektromagnetischen Feldes

Nachdem die Maxwellsche Theorie des elektromagnetischen Feldes in *ruhenden* Körpern die bezüglichen bei ihrer Aufstellung bekannten Erscheinungen und Abhängigkeiten erklärt hatte, wofür der von *Maxwell* bewiesene und von der Erfahrung bestätigte Ausdruck der Abhängigkeit der Ausbreitungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Wellen von den örtlichen Materialeigenschaften [1] [2]) ein Beispiel ist, wurde das Verlangen nach einer phänomenologischen Theorie der elektromagnetischen Vorgänge in *bewegten* Körpern immer reger.

Die Hertzsche Erweiterung der Maxwellschen Theorie zu einer Elektrodynamik bewegter Körper [2] beruhte im wesentlichen auf zwei Annahmen. Nach der ersten wird von der vom elektromagnetischen Feld auf geladene Teilchen ausgeübten Kraft definitionsgemäss derjenige Anteil, der auch bei gegen das umgebende körperliche Medium *ruhenden* Teilchen bestehen bleibt, dem elektrischen Feld und ihr zusätzlicher, bei gegen das umgebende Medium *bewegten* Teilchen auftretender Anteil dem magnetischen Feld zugeschrieben. Nach der zweiten werden die in der Maxwellschen Formulierung der Integralform der Gesetze der Erzeugung des elektromagnetischen Feldes vorkommenden partiellen Änderungsgeschwindigkeiten der elektrischen und magnetischen Flüsse durch von gewissen Punktmengen der Körper realisierte Flächen, durch Änderungsgeschwindigkeiten ersetzt, die in der Annahme berechnet sind, dass diese Flächen vom körperlichen Medium bei seiner etwaigen Bewegung vollständig mitgeführt werden. Von den über die Maxwellsche Theorie hinausgehenden und von der Erfahrung bestätigten Konsequenzen der Hertzschen Elektrodynamik absehend, sei hier nur erwähnt, dass nach dieser der Maxwellsche Ausdruck die auf das örtliche körperliche Medium bezogene *relative* Ausbreitungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Wellen — und also auch des Lichtes — darstellt, was von den Physikern des vorigen Jahrhunderts als *vollständige* «Mitführung des Äthers» durch bewegte Körper ausgelegt wurde und durch den bekannten Versuch von *Fizeau* [3] — der nur eine *teilweise*, durch den sog. Fresnelschen Koeffizienten ausgedrückte «Mitführung» bestätigte — *widerlegt* wird.

Um solche Unstimmigkeiten auszuschalten und der Existenz von Elementarteilchen Rechnung zu tragen, wurde bekanntlich von *Lorentz* in den neunziger Jahren des vorigen Jahrhunderts die vorrelativistische Elektronentheorie geschaffen. In dieser wird das elektromagnetische Feld definitionsgemäss in neuer Weise in ein elektrisches und ein magnetisches Feld «aufgespalten» — und zwar so, dass der Quotient aus der elektromagnetischen Kraft auf ein mit der elektrischen Ladung Q geladenes und gegen das sog. «*Lorentzsche*» *Inertialsystem ruhendes* Teilchen als (mikroskopische) *elektrische Feldstärke* $\vec{E}$ definiert wird. Dagegen wird die zusätzliche elektromagnetische Kraft, falls sich das betrachtete Teilchen gegen das Lorentzsche Inertialsystem mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ *bewegt*, definitorisch der *magnetischen Induktion* $\vec{B}$ zugeschrieben, derart, dass allgemein die vom elektromagnetischen Feld auf das Teilchen ausgeübte Kraft als

$$\vec{F} = Q\,(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \tag{1}$$

angesetzt wird [4].

In der Einsteinschen (relativistischen) Elektrodynamik wird die «Aufspaltung» des elektromagnetischen Feldes in elektrisches und magnetisches Feld im Sinne des Relativitätsprinzips in Bezug auf jedes Inertialsystem so vorgenommen, dass der Quotient aus der Newtonschen elektromagnetischen Kraft und der Ladung des Teilchens als entsprechende elektrische Feldstärke $\vec{E}$ definiert wird, wenn das Teilchen im eben betrachteten (und nicht im Lorentzschen) Inertialsystem ruht — während der Überschuss der Newtonschen elektromagnetischen Kraft, wenn sich das Teilchen gegen das betrachtete Inertialsystem mit einer Geschwindigkeit $\vec{v}$ bewegt, als vom entsprechenden magnetischen Feld herrührend definiert wird [5; 6]. Mit dieser Umdeutung wird Gl. (1) der Lorentzkraft, die nun einen anderen physikalischen Sinn hat, von allen relativistischen Theorien übernommen und daraus die *Transformationseigenschaften* der umdefinierten elektrischen Feldstärke $\vec{E}$ und magnetischen Induktion $\vec{B}$ beim Übergang von ihrem Beziehen auf ein Inertialsystem zu ihrem Beziehen auf ein anderes abgeleitet. Werden nun in den mathematischen Ausdrücken der allgemeinen Gesetze der vorrelativistischen Physik unter den in ihnen vorkommenden vorrelativistischen Grössen die entsprechenden relativistischen verstanden, so erlauben die relativistischen Transformationseigenschaften unter den allgemeinen Gesetzen der vorrelativistischen Physik diejenigen ausfindig zu machen, die ihre mathematische Form beim Übergang von ihrem Beziehen auf ein Inertialsystem zu ihrem Beziehen auf ein anderes Inertialsystem beibehalten, also

[1]) von Körpern
[2]) Siehe Literatur am Schluss des Aufsatzes.

relativistisch invariant sind und gemäss dem sog. relativistischen Korrespondenzprinzip ohne Änderung ihrer Form von den relativistischen Theorien übernommen werden können.

In allen Theorien der elektromagnetischen Vorgänge und der Elementarteilchen können vier Klassen von Gesetzen unterschieden werden. Zur ersten Klasse gehört das Gesetz [Gl. (1)] der Lorentzkraft, das elektromagnetische Zustandsgrössen sowohl der Körper (Q und $Q\vec{v}$) als auch des elektromagnetischen Feldes ($\vec{E}$ und $\vec{B}$) mit mechanischen Grössen ($\vec{F}$) verbindet. Zu einer zweiten Klasse gehört das Gesetz der Erhaltung der Ladung, das nur die elektromagnetischen Zustandsgrössen der Körper betrifft, und zu einer dritten die Gesetze der elektromagnetischen Induktion und des magnetischen Flusses, die nur elektromagnetische Zustandsgrössen des elektromagnetischen Feldes betreffen. Die Gesetze dieser drei Klassen sind relativistisch invariant und haben in allen Theorien die gleiche mathematische Form, aber die in ihnen vorkommenden Grössen $\vec{F}$, Q, $Q\vec{v}$, $\vec{E}$ und $\vec{B}$ werden in den verschiedenen Theorien unterschiedlich ausgelegt, was für den Fall der Maxwellschen, der Lorentzschen und der Einsteinschen Theorie bereits angegeben wurde.

Da die etwa mit der Dichte ϱ verteilte elektrische Ladung Q samt $Q\vec{v}$ nach den mikroskopischen elektromagnetischen Theorien die einzigen elektromagnetischen Zustandsgrössen der Körper darstellen, sind nach ihnen alle «Leitungsströme» Konvektionsströme — und das Gesetz der Erhaltung der Ladung erhält folgende Differentialform:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho \vec{v}) = 0 \tag{2}$$

in der sich die partielle Ableitung nach der Zeit auf das Lorentzsche bzw. auf irgendein Inertialsystem bezieht und $\varrho\vec{v}$ die Dichte des Konvektionsstromes in Bezug auf dieses darstellt.

Um den Unterschied zwischen den linearen und nichtlinearen Theorien genauer beschreiben zu können, soll dieses Gesetz mittels zweier als geeignete Orts- und Zeitfunktionen definierter Vektorfelder ausgedrückt werden, die indirekt die Ladungs- und Stromverhältnisse der Körper ausdrücken. Es existiert nämlich offensichtlich jederzeit ein Vektorfeld $\vec{D}_v$, das vektorielle Divergenzfeld der elektrischen Ladungsdichte, derart dass:

$$\varrho = \operatorname{div} \vec{D}_v \tag{3}$$

ist. Es entsteht also aus Gl. (2) die Beziehung:

$$\operatorname{div}\left(\varrho\vec{v} + \frac{\partial \vec{D}_v}{\partial t}\right) = 0$$

aus der folgt, dass die in Klammer stehende «Gesamtstromdichte» aus einem als geeignete Orts- und Zeitfunktion definierten Vektorpotentialfeld $\vec{H}_v$ der Gesamtstromdichte ableitbar ist:

$$\varrho\vec{v} + \frac{\partial \vec{D}_v}{\partial t} = \operatorname{rot} \vec{H}_v \tag{4}$$

was zusammen mit Gl. (3) nur eine andere Ausdrucksweise des Gesetzes in Gl. (2) der Erhaltung der Ladung darstellt.

Das Gesetz der elektromagnetischen Induktion wird von allen mikroskopischen Theorien in rationaler Schreibweise in folgender Differentialform der Maxwellschen Theorie entnommen:

$$\operatorname{rot} \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \tag{5}$$

wobei sich die partielle Ableitung nach der Zeit auf das Lorentzsche bzw. auf irgend ein anderes Inertialsystem bezieht.

Wird noch zusätzlich angenommen, dass durch geeignete Mittel wenigstens je einmal in endlichen Raumbereichen der Zustand fehlenden magnetischen Feldes ($\vec{B} = 0$) hergestellt werden kann, so folgt aus Gl. (5) folgende Differentialform des Gesetzes der Erhaltung des magnetischen Flusses:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \tag{6}$$

Die Gesetze der bisher erörterten drei Klassen genügen jedoch nicht um alle elektromagnetischen Vorgänge zu beschreiben, denn es fehlen noch die Gesetze einer vierten Klasse, die die elektromagnetischen Zustandsgrössen der Körper und des elektromagnetischen Feldes miteinander verbinden, nach denen also die Grössen ϱ und $\varrho\vec{v}$ der Körper, bzw. die mit ihnen verbundenen Grössen $\vec{D}_v$ und $\overleftarrow{H}_v$, die das Feld beschreibenden Grössen $\vec{E}$ und $\vec{B}$ bedingen. Die verschiedenen Theorien des elektromagnetischen Feldes unterscheiden sich nun durch die Form der die Grössenpaare $\vec{D}_v$, $\vec{H}_v$ und $\vec{E}$, $\vec{B}$ verbindenden Gesetze. Sie werden linear bzw. nichtlinear genannt, je nachdem sie die diese Gesetze ausdrückenden Beziehungen als linear (und homogen) bzw. als nichtlinear in den Grössenpaaren $\vec{H}_v$, $\vec{D}_v$ und $\vec{E}$, $\vec{B}$ ansetzen.

Die lineare klassische Theorie des elektromagnetischen Feldes ist durch folgende universellen linearen und homogenen Abhängigkeiten zwischen dem Divergenzfeld der Ladungsdichte und dem Vektorpotential der Gesamtstromdichte einerseits und der elektrischen Feldstärke und der magnetischen Induktion im Vakuum anderseits:

$$\vec{D}_v = \varepsilon_0 \vec{E} = \vec{D} \tag{7}$$

und

$$\vec{H}_v = \mu_0^{-1} \vec{B} = \vec{H} \tag{8}$$

gekennzeichnet. Dabei ist ε_0 die elektrische Feldkonstante, die zuerst im Coulombschen Ausdruck der Kraft $\vec{F}_{12}$ auftrat, die von einem Körper mit der Ladung Q_1 im Vakuum auf einen Körper mit der Ladung Q_2 ausgeübt wird, der den gegen die linearen Dimensionen der zwei Körper sehr langen Leitstrahl $\vec{R}_{12}$ in Bezug auf den ersten hat:

$$\vec{F}_{12} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{R}_{12}}{R_{12}^3} \tag{9}$$

während μ_0 die magnetische Feldkonstante darstellt. In diesem Zusammenhang heisst $\vec{D}$ elektrische Induktion und $\vec{H}$ magnetische Feldstärke des elektromagnetischen Feldes (und nicht der Körper, wie die Grössen $\vec{D}_v$ und $\vec{H}_v$ ursprünglich definiert wurden).

Berücksichtigt man die Gl. (7) und (8), so entsteht aus Gl. (3) die aus der linearen Theorie bekannte Differentialform des Gesetzes des Flusses der elektrischen Feldstärke:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\varrho \tag{3a}$$

aus dessen Integralform die elektrische Feldkonstante ε_0 unabhängig vom Coulombschen Gesetz experimentell ermittelt werden kann:

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{Q}\int_{\Sigma} \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{A} \tag{3b}$$

wenn Q die in der Hülle Σ enthaltene Ladung ist und $\mathrm{d}\vec{A}$ das nach aussen gerichtete vektorielle Oberflächenelement der Hülle darstellt. Der Coulombsche Satz in Gl. (9) stellt sich als eine Folge der Gl. (1), (5) und (3a) heraus.

Berücksichtigt man Gl. (7) und (8), so entsteht aus Gl. (4) die aus der linearen Theorie bekannte Differentialform des Gesetzes der Durchflutung:

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \left(\varrho \vec{v} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \tag{4a}$$

aus dessen auf eine geschlossene Kurve Γ bezogenen Integralform die magnetische Feldkonstante μ_0 experimentell ermittelt werden kann:

$$\mu_0 = \frac{\oint\limits_{\Gamma} \vec{B} \, \mathrm{d}\vec{r}}{\int\limits_{S_\Gamma} (\varrho \vec{v} + \varepsilon_0 \, \partial \vec{E}/\partial t) \, \mathrm{d}\vec{A}} \tag{4b}$$

Gl. (3a) folgt auch aus Gl. (2) und (4a), wenn zusätzlich angenommen wird, dass durch geeignete Mittel wenigstens je einmal in endlichen Raumbereichen der Zustand fehlenden elektrischen Feldes ($\vec{E} = 0$) hergestellt werden kann.

Nach den linearen Theorien des elektromagnetischen Feldes folgt also aus Gl. (7) und (8), dass die durch

$$\vec{D} \equiv \varepsilon_\mathrm{v} \vec{E}$$

und

$$\vec{H} \equiv \mu_\mathrm{v}^{-1} \vec{B}$$

definierte Permittivität bzw. Permeabilität des Vakuums mit den entsprechenden Feldkonstanten ε_0 und μ_0 zusammenfallen:

$$\varepsilon_\mathrm{v} = \varepsilon_0$$

$$\mu_\mathrm{v} = \mu_0$$

Sollte sich aus einer Theorie nicht $\varepsilon_\mathrm{v} = \varepsilon_0$ und $\mu_\mathrm{v} = \mu_0$ ergeben, so würden die Grössen:

$$\vec{P}_\mathrm{v} = \vec{D}_\mathrm{v} - \varepsilon_0 \vec{E} \tag{7a}$$

und

$$\vec{M}_\mathrm{v} = \vec{B} - \mu_0 \vec{H}_\mathrm{v} \tag{7b}$$

die elektrische und magnetische Polarisation des Vakuums darstellen. In der linearen, durch Gl. (7) und (8) definierten Theorie, sind sie beide gleich Null.

Aus den Gesetzen der linearen Theorien folgt bekanntlich [8] für die Energiedichte w des elektromagnetischen Feldes (im Vakuum) der Ausdruck:

$$w = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{2} \mu_0^{-1} \vec{B}^2 \tag{10}$$

und für die Dichte des elektromagnetischen Energieflusses der Ausdruck:

$$\vec{s} = \vec{E} \times \vec{H} \tag{11}$$

während für die Ausbreitungsgeschwindigkeit c_0 der elektromagnetischen Wellen – und also auch des Lichtes – im Vakuum der bekannte Maxwellsche Ausdruck folgt:

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \tag{12}$$

Als Anfang unseres Jahrhunderts *M. Abraham* auf Grund der linearen Theorie das Verhalten des als starre Kugel vom Halbmesser a_0 und z. B. mit gleichmässiger Oberflächendichte seiner Ladung Q_0 behaftet angenommenen Elektrons [7] (nach der damaligen Benennung der geladenen Elementarteilchen) untersuchte, stellte er fest, dass (bei der für quasistationäre Verhältnisse gültigen Näherung), um die Energie des vom bewegten Elektron erzeugten magnetischen Feldes zu decken, wenn man es vom Zustand der Ruhe auf die Geschwindigkeit $\vec{v}$ beschleunigt, ihm eine magnetische (kinetische), $\vec{v}^2$ proportionale Energie zugeführt werden muss, als ob es folgende zusätzliche (elektromagnetisch genannte) träge Masse besässe:

$$\Delta m = \frac{4}{3} \cdot \frac{W_\mathrm{e}}{c_0^2} \tag{a}$$

in der

$$W_\mathrm{e} = \frac{Q_0^2}{8 \pi \varepsilon_0 a_0} \tag{b}$$

die elektrostatische Energie des mit der Ladung Q_0 behafteten Teilchens ist. Damit wurde die erste Beziehung zwischen Masse und Energie aufgestellt.

Besitzt das Teilchen noch die «mechanische» träge Masse m_m, so hat es also, falls es mit der Ladung Q_0 geladen ist, folgende «scheinbare» träge Masse:

$$m_\mathrm{e} = m_\mathrm{m} + \frac{4}{3} \cdot \frac{W_\mathrm{e}}{c_0^2} \tag{c}$$

Diese Beziehung liess die Idee einer (linearen) rein elektromagnetischen Theorie der trägen Masse auftauchen. Ist die ganze Masse m_e der Elementarteilchen elektromagnetischen Ursprungs ($m_\mathrm{m} = 0$), so folgt aus Gl. (b) und (a) als Bedingung für den «klassischen» Teilchenhalbmesser:

$$a_0 = \frac{\mu_0}{6 \pi m_\mathrm{e}} Q_0^2 \tag{d}$$

was beim negativen Elektron ($m_\mathrm{e} = 9{,}107 \cdot 10^{-31}$ kg; $Q_0 = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C) auf $a_0 = 1{,}9 \cdot 10^{-15}$ m und beim Proton ($m_\mathrm{e} = 1{,}672 \cdot 10^{-27}$ kg; $Q_0 = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C) auf $a_0 = 1{,}04 \cdot 10^{-18}$ m führt.

Da man bei anderen Annahmen über die Ladungsverteilung über die als kugelförmig angenommenen Teilchen nur wenig davon abweichende Werte ihrer klassischen Halbmesser erhält, waren all ihre so klein ausfallenen Werte keiner unmittelbaren experimentellen Nachprüfung zugänglich und also auch die Hypothese der Masse rein elektromagnetischen Ursprungs nicht experimentell direkt entscheidbar. Abraham erhöhte die Genauigkeit der Berechnungen durch Betrachtung nichtstationärer Vorgänge, d. h. auch grosser Geschwindigkeiten, wobei er eine merkliche Abhängigkeit der zusätzlichen trägen Masse von der Geschwindigkeit der Teilchen hauptsächlich bei grossen Geschwindigkeiten erhielt. Da man die «mechanische» Masse m_m als von der Geschwindigkeit unabhängig annahm, konnte man hoffen, auf dieser Grundlage experimentell die «scheinbare» Masse in «mechanische» und «elektromagnetische» aufteilen zu können, um dann indirekt die klassischen Halbmesser der Teilchen zu berechnen. Durch Ablenkungsversuche an raschen Betastrahlen in elektrischen und magnetischen Feldern unternahm es *Kaufmann* [9] und später zahlreiche andere Physiker die Folgen der Abrahamschen Theorie nachzuprüfen. Die Versuchsergebnisse widersprachen jedoch der von ihm berechneten Geschwindigkeitsabhängigkeit der Masse, unabhängig vom Wert einer etwaigen mechanischen Masse und liessen die ersten Zweifel an der strengen Gültigkeit der linearen Theorie des elektromagnetischen Feldes aufkommen.

Nach den linearen rein elektromagnetischen Feldtheorien der Elementarteilchen müssten aber diese bei endlichem Halbmesser auch instabil sein. Sie müssten unter der Wirkung der elektrischen (Coulombschen) Abstossungskräfte zwischen ihren Teilen barsch auseinanderfliessen, falls sie durch keine

Druckkräfte nichtelektrischen Ursprungs zusammengehalten wären. Man kann dem Schluss der Instabilität auch nicht dadurch entgehen, dass man die Elementarteilchen als Massenpunkte auffasst, d. h. $a_0 = 0$ annimmt. Es würde nämlich dabei aus Gl. (a) und (b) folgen, dass die Elementarteilchen mit ihrem endlichen, experimentell ermittelten elektrischen Elementarquantum Q_0, im Gegensatz zur Erfahrung, eine unendliche scheinbare Masse haben müssten (Divergenz der Masse), was den Zweifel an der strengen Gültigkeit der linearen Theorie nur erhöhte. Bei endlichem Halbmesser der Elementarteilchen muss man aber nicht nur auf den rein elektromagnetischen Charakter der linearen Feldtheorie verzichten — und also neben dem elektromagnetischen noch (mindestens) ein andersartiges Feld annehmen und auch auffinden —, sondern die so vervollständigte Theorie müsste notwendigerweise im Ganzen wenigstens teilweise auch im Vakuum auf nichtlineare Feldgleichungen führen. Jedes lineare Gleichungssystem würde nämlich für punktförmige Elementarteilchen auf eine unendliche Eigenmasse führen — und zu jeder Lösung dieses Systems würden, bei gleicher Gestalt der als nichtpunktförmig angenommenen Teilchen, unendlich viele andere mögliche Lösungen gehören, die beliebigen anderen Ladungen und Massen entsprechen würden. Lineare Feldgleichungen würden also Elementarteilchen mit beliebiger Ladung und Masse zulassen, im Widerspruch mit dem experimentellen Befund, nach dem es nur wenige Klassen gleicher Elementarteilchen gibt.

Ferner hat die Relativitätstheorie einen allgemeinen Lehrsatz der Äquivalenz von Energie und träger Masse aufgestellt, gemäss welchem jedes physikalische System, das eine gewisse Energie W besitzt, unabhängig von ihrer Art und vom linearen oder nichtlinearen Charakter der Theorien, notwendigerweise eine ihr universell proportionale (mit der Geschwindigkeit wachsende) Masse m hat und umgekehrt, wobei der Proportionalitätsfaktor das Quadrat der Vakuumlichtgeschwindigkeit c_0 ist:

$$W = c_0^2 \, m \tag{13}$$

Diese Beziehung, nach der die Elementarteilchen als besonders energiereiche, gegebenenfalls vom übrigen Feld nicht genau abgegrenzte Energieknoten erscheinen können, hat erstens die gleiche Abhängigkeit der trägen Masse der physikalischen Systeme nicht nur von der elektromagnetischen Art, sondern von der Summe aller Arten ihres Energieinhaltes zur Folge und entzieht also dadurch jede Grundlage dem oben angegebenen Prinzip der erhofften Aufteilung der Masse der Elementarteilchen in «mechanische» und «elektromagnetische» Masse.

Zweitens ermöglicht die relativitätstheoretische Beziehung von Gl. (13) die Aufstellung der allgemeinen Bedingung der relativistischen Kohärenz einer Theorie, an der direkt ihre Zulässigkeit nachgeprüft werden kann. Soll nämlich in einer Feldtheorie das Prinzip der Erhaltung der Energie für das betrachtete Feld erfüllt sein, so muss es eine allein von den momentanen örtlichen Zustandsgrössen des Feldes abhängige (skalare) Energiedichte w des Feldes sowie eine allein von diesen Grössen abhängige (vektorielle) Energiestromdichte $\vec{s}$ des Feldes geben, so, dass der je Zeit- und Volumeneinheit erfolgte Zuwachs der Feldenergie gleich ist der in letztere pro Zeiteinheit einströmenden Feldenergie, vermindert um die in ihr pro Zeiteinheit in andere Formen verwandelte Feldenergie p_t, d. h.:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\operatorname{div} \vec{s} - p_t \tag{14}$$

Dividiert man die zwei Seiten von Gl. (14) durch c_0^2 und beachtet die Äquivalenz von Masse und Energie, in Gl. (13) so folgt daraus der relativistische Satz von der Erhaltung der Masse:

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = -\operatorname{div} \vec{g} - \nu_t \tag{14a}$$

mit

$$\mu = \frac{w}{c_0^2}\,; \qquad \vec{g} = \frac{\vec{s}}{c_0^2} \qquad \text{und} \qquad \nu_t = \frac{p_t}{c_0^2}$$

als Massendichte, Impulsdichte und als pro Zeit- und Volumeneinheit in andere Masseformen verwandelte Feldmasse.

In jeder Feldtheorie eines Elementarteilchens ist nun nach Gl. (12) das durch c_0^2 dividierte, sich als endlich herauszustellende Volumenintegral der Energiedichte seiner Felder die Masse m des Teilchens — und das durch c_0^2 dividierte, sich auch als endlich herauszustellende Volumenintegral der Summe der Energiestromdichten dieser Felder der Impuls des Teilchens. Dieser ist aber gleich dem Produkt der Masse m in die Geschwindigkeit $\vec{v}$ des Teilchens gegen das Inertialsystem, auf das sich die Feld-Zustandsgrössen beziehen, d. h. es muss folgende Bedingung erfüllt sein:

$$\vec{v} \int w \, \mathrm{d}v = \int \vec{s} \, \mathrm{d}v \tag{15}$$

wobei die Integrale über die ganzen Felder zu erstrecken sind (relativistische Kohärenz einer Feldtheorie), die nach Gl. (14) auch wie folgt geschrieben werden kann:

$$\vec{v} \int \mu \, \mathrm{d}v = \int \vec{g} \, \mathrm{d}v \tag{15a}$$

Theorien, in denen diese minimale Bedingung mit nur von den Zustandsgrössen des elektromagnetischen Feldes abhängiger Energiedichte w und Energiestromdichte $\vec{s}$ nicht erfüllt werden kann, setzen ausser elektromagnetischer Masse auch Masse anderer Natur voraus und lassen keine rein elektromagnetische Feldtheorie der Elementarteilchen zu.

Wird nun zur Vereinfachung der Rechnung die vorrelatistische Näherung benutzt und das ruhende Elementarteilchen mit der Ladung q_0 als eine mit gleichmässiger Oberflächendichte der Ladung behaftete Kugel vom Halbmesser a_0 betrachtet, so erhält man statt Gl. (15a) die Beziehung:

$$\vec{v} \int \mu \, \mathrm{d}v = \frac{3}{4} \int \vec{g} \, \mathrm{d}v \tag{e}$$

Dies beweist, dass nur drei Viertel der Eigenmasse der Elementarteilchen elektromagnetischer Natur sein könnte, d. h. ein Viertel davon anderen Ursprungs sein müsste. Daraus folgt wiederum die Unzulässigkeit der linearen, rein elektromagnetischen Feldtheorien der Elementarteilchen. Dieser Schluss gilt übrigens unabhängig von der Näherung und der angenommenen Verteilung der Ladung des Elementarteilchens.

Diese allen linearen Feldtheorien gemeinsamen Widersprüche mit der Erfahrung und der relativistischen Kohärenz führten erstens zum Versuch der Entwicklung nichtlinearer, rein elektromagnetischer Feldtheorien der Elementarteilchen, in der diese als Energieknoten der Felder weniger diskreter Klassen von Lösungen ihrer Feldgleichungen auftreten sollen, zwischen denen es unter gewöhnlichen Bedingungen keine kontinuierlichen Übergänge geben soll (Stabilität) und für die aus den Feldgleichungen die tatsächlichen Ladungen, Massen usw. der Teilchen folgen sollen. Die aufzustellenden Gesetze dieser Theorie sollen weitab von den Elementarteilchen in diejenigen der linearen Feldtheorie übergehen (Korrespondenzprinzip), denn bei den dort herrschenden schwachen Feldern wird der lineare Charakter der Feldgleichungen durch die Erfahrung vorgetäuscht. In den Elementarteilchen und in ihrer unmittelbaren Nähe, wo starke Felder herrschen, sollen aber die nichtlinearen von den linearen Gesetzen derart stark abweichen, dass dort den Coulombschen Abstossungskräften zwischen den Teilen der Teilchen durch Druckkräfte, die auch elektromagnetischer Natur sind, das Gleichgewicht gehalten wird — und bei punktförmigem Elementarteilchen soll sich die Energie des Feldes als endlich herausstellen und die Bedingung (15) erfüllen. Zweitens liessen es diese Widersprüche als wünschenswert erscheinen, experimentelle Belege für die Nichtlinearität zu bringen.

3. Polarisation des Vakuums nach quantenphysikalischen Theorien von Elementarteilchen und experimentelle Belege für die Nichtlinearität der Feldgleichungen des Elektromagnetismus

Es ist in diesem Zusammenhang bedeutsam, dass die relativistische (lineare) Quantentheorie Gründe für die Polarisation des Vakuums und die entsprechende, in klassischer Beschreibung auftretende Nichtlinearität angibt, nach der das Superpositionsprinzip auch im Vakuum nicht anwendbar ist.

In der klassischen Feldtheorie teilte man die physischen Systeme in die Klasse der mit endlicher Ruhmasse behafteten diskreten Teilchensysteme (Körper) und die Klasse der mit verschwindender Ruhmasse behafteten kontinuierlichen Feldsysteme (elektromagnetisches Feld) ein und versuchte, die Systeme der ersten auf die Systeme der zweiten Klasse zurückzuführen. Die Experimentalphysik hat jedoch festgestellt, dass sich die harmonische elektromagnetische Strahlung im lichtelektrischen Effekt wie ein Teilchensystem aus mit der Energie $W_f = hf$ behafteten Photonen mit verschwindender Ruhmasse verhalten [10] — wobei h das aus der Plankschen Theorie der schwarzen Strahlung [11] bekannte Wirkungsquantum und f die Frequenz der klassisch als Feld beschriebenen Strahlung ist — und dass sich diese Photonen im Compton-Effekt [12] als mit dem Impuls $p = h : \lambda$ behaftet [13] verhalten, wobei λ die Wellenlänge der klassisch als Feld beschriebenen Strahlung ist. In Versuchen, in denen nach und nach nur je ein Photon ins Spiel kam, brachte man auch dieses eine unter Bedingungen, in denen es sich als Wellenfeld verhielt, in denen also auch jedes einzelne Photon den Teilchen-Welle-Dualismus aufwies. Später konnte man durch Versuche nachweisen, dass auch die Elementarbausteine mit nicht verschwindender Ruhmasse, wie Elektronen, Protonen, Neutronen usw. — ja ganze Atome und Moleküle —, den Teilchen-Welle-Dualismus aufweisen, mit den gleichen Beziehungen wie beim Photon zwischen den zwei Eigenschaften Energie und Impuls des Teilchens (Quants) einerseits und den zwei Eigenschaften Frequenz und Wellenlänge des entsprechenden Feldes anderseits.

Es gelang *W. Heisenberg* [14] und *G. Schroedinger* [15], die klassisch formulierten, mit der Erfahrung in Widerspruch stehenden Gesetze der Mechanik durch ein Verfahren, das Quantelung genannt wird, so abzuändern, dass sie sowohl dem Wellenverhalten als auch dem Teilchenverhalten der Elementarbausteine in gleicher Weise gerecht werden. Das allgemeine Verfahren wird Quantelung des Teilchenbildes und die Theorie Quantenmechanik bzw. Quantelung des Wellenbildes und die Theorie Quantenfeldtheorie genannt, je nachdem man von das klassische Teilchenverhalten bzw. das klassische Feldverhalten beschreibenden Gesetzen ausgeht.

Aus dem so abgeänderten Gesetz der Bewegung — das in der Schroedingerschen Formulierung eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung einer von den Koordinaten und der Zeit abhängigen Wellenfunktion ist — folgt nun unter anderem, dass die statistischen Streuungen ΔW und Δt der Energie W und der Zeit t, zu der dem Teilchen diese Energie zukommt, folgender, nach *Heisenberg* benannten Unschärfebeziehung [16] genügen:

$$\Delta W \cdot \Delta t \geqq \frac{h}{4\pi} \tag{16}$$

Weder die von der klassischen vorrelativistischen, noch die von der klassischen relativistischen Mechanik ausgehende Quantenmechanik, konnte aber vom sog. Spin der Elementarbausteine Rechenschaft geben. Eine Quantenmechanik kann auch keine Vorgänge beschreiben, während deren sich die Zahl der Teilchen einer beliebigen Art ändert — wie während der auch experimentell entdeckten Erzeugung und Vernichtung von Elektron-Positron-Paaren, die eine Polarisation des «Vakuums» und also auch eine Nichtlinearität der klassisch aufgefassten Feldgleichungen des Elektromagnetismus bedingen könnten und damit für das zu behandelnde Problem in Frage käme —, da diese Zahl gleich der in der klassischen Bewegungs-Ausgangsgleichung vorkommenden Teilchenzahl bleibt und also konstant ist. Deshalb ist es bedeutsam, dass die durch Quantelung des Wellenbildes erhaltenen relativistischen Quantenfeldtheorien auch Emissions- und Absorptionsvorgänge beschreiben können [17], während deren sich die Zahl der verschiedenen Teilchenarten ändert.

Um ein Wellenbild quanteln zu können, müssen die klassischen Ausgangs-Feldgleichungen bekannt sein, die aber nur im Falle der Photonen — als Maxwellsche Differentialgleichungen erster Ordnung — bekannt sind. Um sie auch für Elementarteilchen mit nicht verschwindender Ruhmasse zu erhalten — z. B. für Elektronen und Positronen, für die man sie von vornherein nicht kannte, da diese, klassisch dargestellt, Teilchen sind —, schlug man folgendes Verfahren ein: Man stellte die der Bewegungsgleichung einer dieser Bausteine entsprechende Wellengleichung durch Quantelung ihrer Bewegungsgleichungen auf, die eine partielle Differentialgleichung im dreidimensionalen Raum darstellt, und deutete sie als eine klassische Feldtheorie der betreffenden Klasse von Bausteinen.

Die in der Frage der Permittivität und Permeabilität des Vakuums interessierende derartige Theorie ist die Quantenfeldtheorie der sich im elektromagnetischen Feld befindenden Elektronen und Positronen, d. h. des mit diesem Feld gekoppelten Elektron-Positron-Feldes.

Beim Aufstellen den Spin beschreibender Differentialgleichungen erster Ordnung der Wellenfunktion, aus denen durch einen gewissen Prozess die den Spin nicht berücksichtigende Schroedingersche Gleichung zweiter Ordnung der Quantenmechanik folgen soll (ähnlich wie die Differentialgleichung zweiter Ordnung der elektromagnetischen Wellen durch einen Eliminationsprozess aus den Maxwellschen Gleichungen erster Ordnung folgt), gelangte *Dirac* [17] zur Schlussfolgerung, dass aus diesen Gleichungen die Existenz von Zuständen negativer Energie in bezug auf die Ruhenergie als Nullpunkt folgt, mit denen die Physiker, hauptsächlich beim

Einteilchenproblem, nichts anzufangen wussten. Quantelte man nun diese als Gesetz der klassischen Feldtheorie der Elektronen und Positronen aufgefasste lineare Differentialgleichung der Diracschen Quantenmechanik eines Elektrons, so folgte wieder, dass es Zustände mit negativer Energie in bezug auf die Ruhenenergie als Nullpunkt geben muss. Diese Schwierigkeit verschwand aber, wenn man annahm, dass im «Vakuum» jeder der vorhandenen Zustände negativer Energie mit je einem Elektron besetzt ist, d. h. nach dem Pauliverbot all diese Zustände voll besetzt und alle Zustände positiver Energie leer sind. Wird nämlich z. B. durch elektromagnetische Strahlung genügend hoher Frequenz ein solches anfänglich unbeobachtbares Elektron über längere Zeit aus seinem Zustand negativer in einen solchen (leeren) positiver Energie gehoben, so erscheint dieser Vorgang der Absorption eines Photons genügend hoher Energie durch das Elektron negativer Energie als Erzeugung eines nun beobachtbaren Elektrons und eines «Loches» in der Energie und elektrischen Ladung des «Vakuums» — das wie ein Elektron positiver Ladung beobachtbar ist und später entdeckt und Positron genannt wurde (Paarerzeugung nach der Diracschen Löchertheorie). Die Rückkehr eines Elektrons in einen (leeren) Zustand negativer Energie erscheint entsprechend als Wiedervereinigung des Elektrons mit einem Positron und Zerstrahlung als Photon (Paarvernichtung).

In Anwesenheit eines impulsaufnehmenden Teilchens kann aber auch ein Photon eines angelegten elektromagnetischen Feldes, das die der Gesamtmasse 2 m_e eines Elektrons und eines Positrons entsprechende, zu ihrer Erzeugung ausreichende Energie 2 $m_e c_0^2$ nicht hat, dennoch ständig Elektron-Positron-Paare im Vakuum «virtuell» trennen, d. h. für hinreichend kurze Zeit Δt, nach der das Paar wieder als elektromagnetisches Feld zerstrahlt; dabei ist die Zeit Δt nur so kurz, dass die Schwankung ΔW der Energie — die bei jedem dieser virtuellen Vorgänge eintritt und mindestens den Fehlbetrag von der Masse des Protons bis zur Masse 2 m_e des Paares nach der Gleichung $W = 2\, m_e\, c_0^2$ decken muss — die Heisenbergsche Unschärfebeziehung [Gl. (16)] nicht verletzt. Obwohl die virtuell getrennten Elektronen und Positronen nicht direkt beobachtbar sind, wirken sie sich doch indirekt, z. B. durch die von ihnen bedingte Polarisation des Vakuums, aus, also — klassisch dargestellt — durch die vom Vorgang bedingte Nichtlinearität der klassischen Feldgleichungen des elektromagnetischen Feldes. Diese wird also durch den experimentellen Nachweis der relativistischen Quantenfeldtheorie eigentümlichen Umwandelbarkeit der Elementarbausteine bei ihrem Vorkommen in virtuellen Vorgängen direkt bzw. indirekt gestützt, je nachdem die betreffenden Bausteine Elektronen oder Photonen sind.

Es sei der Vollständigkeit halber noch abschliessend erwähnt, dass auch in der linearen Quantenfeldtheorie Schwierigkeiten auftraten, als es sich um die Berechnung der Selbstenergie des von Elementarbausteinen erzeugten Feldes (z. B. des von Elektronen erzeugten elektromagnetischen Feldes) handelte, mit der dieses zur Ruhenergie des erzeugenden Bausteines beiträgt — und ebenso bei der Berechnung des durch die ungleichförmige Polarisation des Vakuums bedingten Polarisationsladungs-Beitrages des elektromagnetischen Feldes zu seiner elektrischen Gesamtladung. Bei klassisch als punktförmig angenommenen erzeugenden Bausteinen divergiert nämlich sein Selbstenergiebeitrag und sein Polarisationsladungsbeitrag zur Gesamtenergie bzw. zur Gesamtladung des Elementarbausteines. Die beim Elektron auftretenden Divergenzschwierigkeiten treten auch bei der Berechnung der Selbstenergie des Photons auf, das virtuell Elektron-Positron-Paare erzeugen kann. Es wurde versucht, die beim Elektron auftretenden Schwierigkeiten durch die der Quantentheorie eigentlich fremde, sog. Masse-Ladungs-Renormierung und die beim Photon auftretenden durch die sog. Regularisierung zu beseitigen. Die Renormierung beruhte auf der Annahme, dass die Masse m_e des punktförmigen Elektrons teilweise (Δm) elektromagnetischer und teilweise (m_m) anderer (mechanischer oder von anderen Feldern herrührender) Natur ist, deren Summe die beobachtbare Masse des Teilchens darstellt, sowie auf der Annahme, dass sich die beobachtbare Ladung q_0 des Elektrons aus der Summe seiner «Eigenladung» q_e und der durch die Polarisation des Vakuums bedingten Ladung Δq_e zusammensetzt. Da sich für die elektromagnetische Masse und die Polarisationsladung unendliche Werte ergaben, wurde angenommen, dass ihre mechanische Masse und Eigenladung so beschaffen sind, dass ihre Summen mit der elektromagnetischen Masse bzw. der Polarisationsladung die empirisch beobachteten Grössen liefern. Die Überlagerung der beiden Anteile wurde als Renormierung (der Masse bzw. der Ladung) bezeichnet. Als Grund für die in der Theorie noch verbliebenen — z. B. bei der Selbstenergie des Photons antretenden — Singularitäten wurden die in der Quantentheorie vorkommenden uneigentlichen, der Diracschen Deltafunktion verwandten und teilweise willkürlich behandelbaren Funktionen betrachtet — und diese wurden durch das Regularisierung benannte Rechenverfahren gewissermassen in reguläre umgestaltet. Es ist erst später *Tomonaga* [19] und *Schwinger* [20] durch die kovariante, d. h. in allen Rechnungsschritten explizit relativistisch formulierte Quantenelektrodynamik gelungen, die auftretenden Divergenzschwierigkeiten weitgehend zu beseitigen.

Drei der quantentheoretischen, die klassisch gemeinte Nichtlinearität der Feldgleichungen des elektromagnetischen Feldes indirekt stützenden prinzipiell beobachtbaren Effekte sind durch die für die quantentheoretische Behandlung gekoppelter Felder zur Verfügung stehenden, hauptsächlich störungstechnischen Methoden theoretisch berechnet und experimentell mit grosser Schärfe sichergestellt worden: die mikrofeinstrukturell nachgewiesene Lamb-Verschiebung (Lamb-shift) des Energieniveaus von Elektronen in gewissen Atomen, die Anomalie des magnetischen Momentes der Elektronen und Müonen — und die doppelte Compton-Streuung des Photons.

Beim ersten Effekt handelt es sich um folgendes: nach der Diracschen Theorie des Elektrons und Positrons haben die als 2 S $\frac{1}{2}$ und 2 P $\frac{1}{2}$ bekannten Zustände des Wasserstoff- oder des ionisierten Heliumatoms verschiedene Wellen-Eigenfunktionen, aber gleiche Energie, wenn man die Wechselwirkung der Elektronen mit den Vakuumschwankungen des elektromagnetischen Feldes ausser acht lässt, d. h. diese Zustände sind «entartet». Berücksichtigt man aber die Wechselwirkung der Elektronen und Positronen mit dem aus Heisenbergschen Unschärfebeziehungen folgenden Vakuumschwankungsfeld des elektromagnetischen Feldes, d. h. die entsprechenden Absorptionen und Reemissionen virtueller Quanten dieses Feldes (Photonen), so kommt eine entsprechende Wechselwirkungsenergie hinzu, die für den 2 S $\frac{1}{2}$-Zustand grösser ausfällt als für den 2 P $\frac{1}{2}$-Zustand. Das ergibt also zwei auch energetisch verschiedene Zustände 2 S $\frac{1}{2}$ und 2 P $\frac{1}{2}$. Der mit

Heranziehung der Renormierung von Masse und Ladung und der Regularisierung quantentheoretisch berechnete Wert der entsprechenden Energiedifferenz, von der ein geringer Bruchteil bei schwachen Feldern als von der Vakuumpolarisation herrührend zu betrachten ist, war in Übereinstimmung mit den experimentellen, radiospektroskopisch ermittelten Ergebnissen von *Lamb* und *Retherford* [21]. Der Effekt wurde auch bei den müonischen Kalcium- und Titanatomen festgestellt.

Beim zweiten Effekt ist von Bedeutung, dass einem in einem konstanten magnetischen Feld befindlichen Elektron mit seinem (bei halbzahligem Spin) einem Bohrschen Magneton $M_B = q_0 h/2 m_e c_0$ gleichen magnetischen Moment eine gewisse magnetische Energie entspricht. Durch die Wechselwirkung des Elektrons mit dem Vakuumschwankungsfeld des elektromagnetischen Feldes — bzw. durch die entsprechende virtuelle Absorption und Reemission von Photonen — gewinnt es aber eine zusätzliche Energie, die nach der Diracschen Theorie des Elektrons proportional dem Bohrschen Magneton und der Induktion des magnetischen Feldes ist, was klassisch auf ein zusätzliches magnetisches Moment des Elektrons hinauskommt (Anomalie des magnetischen Momentes M_e des Elektrons). Die Schwingersche Berechnung [20] ergab:

$$M_e = M_B \left(1 + \frac{q_0^2}{2 h c_0}\right) \qquad \text{(f)}$$

in bester Übereinstimmung mit dem experimentellen Befund *Rabis*, seiner Mitarbeiter und anderer Physiker [22].

Die doppelte Compton-Streuung besteht in der durch Wechselwirkung zwischen einem Photon und einem Elektron mit Ausstrahlung zweier gestreuten Photonen und wurde von *Cavanagh* [23] experimentell nachgewiesen. Andere prinzipiell beobachtbare quantenphysikalische Effekte, die die Nichtlinearität der Feldgleichungen des elektromagnetischen Feldes direkt stützen, sind so klein, dass sie entweder von der Grössenordnung der kleinsten bisher erreichbaren Messfehler oder gegen diese vernachlässigbar sind, so dass sie nicht mit einiger Sicherheit experimentell nachgewiesen werden können.

Die am meisten besprochenen sind die infolge der Nichtlinearität (Unanwendbarkeit des Superpositionsprinzips) eintretende Streuung von Licht an Licht (Photon an Photon mit virtueller Elektron-Positron-Erzeugung und nachfolgender Reemission zweier Photonen), die sog. Wawilow-Halpern-Streuung [24], die intensitätsabhängige Frequenzverschiebung in der Compton-Streuung von Photonen an freien Elektronen, die der doppelten Compton-Streuung ähnliche Spaltung eines Photons in zwei Photonen an einem Atomkern, die Paarerzeugung durch Zusammenstoss zweier Photonen, sowie die Doppelbrechung und der Dichroismus des Vakuums wegen des Tensorcharakters seiner Permittivität und Permeabilität.

Eine Zwischenstellung nimmt die Streuung des Lichtes an einem (starken) unveränderlichen elektrischen Feld (etwa eines Atomkerns), als Delbrück-Streuung bekannt, für die sowohl eine Streuung als auch eine Absorption berechnet wurde und bisher nur die Absorption experimentell nachgewiesen werden konnte [25].

4. Nichtlineare Theorien des elektromagnetischen Feldes

Aus den am Ende des 2. Kapitels erwähnten Bedenken gegen die lineare Theorie der elektromagnetischen Vorgänge erwuchs den Physikern schon frühzeitig die Aufgabe, nichtlineare relativistisch kohärente Theorien aufzustellen, was *M. Born* in den dreissiger Jahren ohne Bezugsnahme auf die Quantenphysik gelang. Auf quantentheoretischer Grundlage gelang nachher *W. Heisenberg* und Mitarbeitern die Aufstellung einer physikalisch besser gestützten Theorie.

Auf der Suche nach der allgemeinsten nichtlinearen möglichen Form der das Grössenpaar $\vec{D}_v, \vec{H}_v$ mit dem Grössenpaar $\vec{E}, \vec{B}$ verbindenden Gesetze liessen sich die Physiker durch die Darstellbarkeit [Gl. (14)] des Energieprinzips und durch die Forderung der relativistischen Invarianz leiten.

Multipliziert man skalar die zwei Seiten von Gl.(5) mit $\vec{H}_v$ und diejenigen der Gl. (4) mit $\vec{E}$, so erhält man nach Subtrahieren:

$$\vec{H}_v \operatorname{rot} \vec{E} - \vec{E} \operatorname{rot} \vec{H}_v \equiv \operatorname{div} (\vec{E} \times \vec{H}_v) = - \vec{H}_v \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{E} \frac{\partial \vec{D}_v}{\partial t} -$$

$$- \varrho \vec{v} \cdot \vec{E} = - \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \vec{D}_v) + \left(\vec{D}_v \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \vec{H}_v \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) - \vec{f} \vec{v} \qquad \text{(14b)}$$

wobei die der Gl. (1) entsprechende Kraftdichte $\vec{f}$ berücksichtigt wurde. Da der letzte Ausdruck die pro Zeit- und Volumeneinheit in mechanische Energie verwandelte Feldenergie p_t darstellt, folgt aus dem Vergleich der Gl. (14b) mit (14), dass diejenigen Abhängigkeiten des Grössenpaares $\vec{D}_v, \vec{H}_v$ vom Grössenpaar $\vec{E}, \vec{B}$ mit dem Prinzip der Erhaltung der Energie verträglich sind, für die der Ausdruck $\vec{H}_v \cdot d\vec{B} - \vec{D}_v \cdot d\vec{E}$ das totale Differential einer universellen skalaren Funktion der veränderlichen $\vec{E}$ und $\vec{B}$ und von der Dimension einer Energiedichte, etwa $L_0 (\vec{E}, \vec{B})$, darstellt, d. h. für die folgende Beziehung gilt:

$$\vec{H}_v \cdot d\vec{B} - \vec{D}_v \cdot d\vec{E} = dL_0 (\vec{E}, \vec{B}) \qquad \text{(14c)}$$

Die spezielle Relativitätstheorie erlaubt eine nähere Bestimmung der aus dem Energieprinzip folgenden universellen skalaren Funktion $L_0 (\vec{E}, \vec{B})$, die nämlich relativistisch invariant sein muss und also direkt nur von relativistisch invarianten Kombinationen der Zustandsgrössenkomponenten abhängen kann. Es können nun im Falle des elektromagnetischen Feldes aus seinen zwei vektoriellen Zustandsgrössen $\vec{E}, \vec{B}$ folgende zwei unabhängige relativistische Invarianten gebildet werden, wie mit Hilfe der Transformationsregeln dieser Grössen nachgewiesen werden kann [6; 26; 27]:

$$\Lambda_1 = \frac{\mu_0^{-1}}{2} \left(\vec{B}^2 - \frac{1}{c_0^2} \vec{E}^2 \right) \qquad (17)$$

$$\Lambda_2 = \varepsilon_0 \mu_0^{-1} (\vec{E} \vec{B})^2 \qquad (18)$$

Die universelle Funktion $L_0 (\vec{E}, \vec{B})$ kann also gemäss der Relativitätstheorie nur folgende Form haben:

$$L_0 (\vec{E}, \vec{B}) = L_0 (\Lambda_1, \Lambda_2)$$

und es folgt aus Gl. (14c):

$$\vec{H}_v \cdot d\vec{B} - \vec{D}_v \cdot d\vec{E} = dL_0 (\Lambda_1, \Lambda_2) \qquad \text{(14d)}$$

Hieraus erhält man für die je drei kartesischen Komponenten H_{vk} und D_{vk} der Grössen $\vec{H}_v$ und $\vec{D}_v$ folgende allgemeine Abhängigkeitsbeziehungen von $L_0 (\Lambda_1, \Lambda_2)$:

$$H_{vk} = \frac{\partial L_0 (\Lambda_1, \Lambda_2)}{\partial B_k}$$

$$D_{vk} = - \frac{\partial L_0 (\Lambda_1, \Lambda_2)}{\partial E_k}$$

$$k = 1, 2, 3, \ldots$$

die folgenden leicht verständlichen vektoriellen Abhängigkeiten äquivalent sind:

$$\vec{D}_v = -\operatorname{grad}_{\vec{E}} L_0(\Lambda_1, \Lambda_2) \tag{19}$$

$$\vec{H}_v = \operatorname{grad}_{\vec{B}} L_0(\Lambda_1, \Lambda_2) \tag{20}$$

Für die in Gl. (14) vorkommende Dichte w der Feldenergie ergibt der Vergleich mit Gl. (14b) und (14d) folgenden allgemeinen Ausdruck:

$$w = L_0(\Lambda_1, \Lambda_2) - \vec{E} \operatorname{grad}_{\vec{E}} L_0(\Lambda_1, \Lambda_2) \tag{21}$$

und für die in Gl. (14) vorkommende Energiestromdichte folgenden, ebenfalls allgemeinen Ausdruck:

$$\vec{s} = \vec{E} \times \operatorname{grad}_{\vec{B}} L_0(\Lambda_1, \Lambda_2) \tag{22}$$

Eine nähere Bestimmung der universellen Funktion $L_0(\Lambda_1, \Lambda_2)$ erlauben jedoch das Prinzip der Erhaltung der Energie und das Prinzip der Relativität nicht. Deshalb gibt es mehrere nichtlineare Theorien. Dem Spezialfall der linearen Theorie entspricht $L_0 = \Lambda_1$.

Die nichtlineare relativistische Theorie von *Born* und *Infeld* [28] beruht auf folgender Form der Funktion L_0 die, unabhängig vom Wert einer neu einzuführenden Universalkonstante w_0 von der Dimension einer Energiedichte, die Bedingung (23) erfüllt:

$$L_{0\mathrm{BI}} = w_0 \left[\sqrt{1 + w_0^{-1}\Lambda_1 - w_0^{-2}\Lambda_2} - 1\right] \tag{23}$$

Für verhältnismässig schwache Felder strebt die Funktion $L_{0\mathrm{BI}}$ gegen die früher von *Born* [29] vorgeschlagene Form der universellen Funktion:

$$L_{0\mathrm{B}} = w_0 \left[\sqrt{1 + w_0^{-1}\Lambda_1} - 1\right] \tag{23a}$$

und für sehr schwache Felder ($w_0^{-1}\Lambda_1 \ll 1$), wie verlangt, gegen die universelle Funktion Λ_1 der linearen Theorie — und ε_v gegen ε_0 und $(1/\mu)_v$ gegen $1/\mu_0$.

Die Summe aus der angegebenen Funktion L_0 und einem gewissen Zusatzglied kommt als Lagrange-Dichte in den Variationsprinzipien der Elektrodynamik vor, die *Born* beim Aufbau seiner nichtlinearen Theorie verwendete. Dabei wurde ihm das Verhältnis der Formen (23a) und $L_0 = \Lambda_1$ der universellen Funktion L_0 für die nichtlineare bzw. lineare Theorie vom Verhältnis nahegelegt, das zwischen der relativistischen und der vorrelativistischen Form der Lagrange-Dichte für mechanische Vorgänge besteht.

In der Born-Infeldschen Theorie sind im allgemeinen nach Gl. (19) und (20) die Induktionen in starken Feldern nicht parallel zu den Feldstärken:

$$\vec{D}_v = \varepsilon_0 \frac{\vec{E} + w_0^{-1}\vec{B}\sqrt{\varepsilon_0^{-1}\mu_0^{-1}\Lambda_2}}{\sqrt{1 + w_0^{-1}\Lambda_1 - w_0^2\Lambda_2}} \equiv \overline{\overline{\varepsilon}}_v \vec{E} \tag{19a}$$

und

$$\vec{H}_v = \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{\vec{B} - w_0^{-1}\vec{E}\sqrt{\varepsilon_0\mu_0\Lambda_2}}{\sqrt{1 + w_0^{-1}\Lambda_1 - w_0^2\Lambda_2}} \equiv \overline{\overline{\left(\frac{1}{\mu}\right)}} \vec{B} \tag{20a}$$

d. h. die Permittivität und der Kehrwert der Permeabilität des Vakuums sind keine Skalare, sondern von den Feldkonstanten ε_0 und $1/\mu_0$ verschiedene (symmetrische) Tensoren zweiter Ordnung, die mit $\overline{\overline{\varepsilon}}_v$ und $\overline{\overline{(1/\mu)}}$ bezeichnet wurden.

In der Bornschen Näherung in Gl. (23a) fehlen in Gl. (19a) und (20a) die Glieder in Λ_2. Es sind also in dieser Näherung die Permittivität und die Permeabilität des Vakuums skalare Grössen:

$$\varepsilon_v = \frac{1}{E}\left|\operatorname{grad}_{\vec{E}} L_0\right| = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{1 + w_0^{-1}\Lambda_1}} \tag{19b}$$

und

$$\mu_0 = \frac{B}{\left|\operatorname{grad}_{\vec{B}} L_0\right|} = \mu_0\sqrt{1 + w_0^{-1}\Lambda_1} \tag{20b}$$

Sie erfüllen also die Bedingung:

$$\varepsilon_v\,\mu_v = \varepsilon_0\,\mu_0 \equiv c_0^2 \tag{24}$$

wie in der linearen Theorie, obwohl sie von den entsprechenden Feldkonstanten ε_0 und μ_0 verschieden sind.

Nach der Born-Infeldschen Theorie wird aus Gl. (19a) für den elektrostatischen Fall ($\vec{B} = 0$):

$$\vec{D}_v = \frac{\varepsilon_0 \vec{E}}{\sqrt{1 - \varepsilon_0 w_0^{-1} E^2/2}} \tag{f}$$

d. h. die elektrische Feldstärke kann den kritischen Wert

$$E_{cr} = \sqrt{2\varepsilon_0^{-1} w_0} \tag{g}$$

nicht überschreiten, auch wenn die elektrische Induktion $\vec{D}_v$ gegen unendlich streben würde. Das bedingt einen überall endlichen Wert auch für das elektrische Feld einer Punktladung q_0. Für die kugelsymmetrische Lösung von Gl. (3) und mit Beachtung von Gl. (5) erhält man nämlich:

$$\vec{D}_v = \frac{q_0}{4\pi} \cdot \frac{\vec{R}}{R^3} \tag{h}$$

und also nach Gl. (f):

$$\vec{E} = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{R}}{R^3} \frac{1}{\sqrt{1 + a_0^4/\mathrm{R}^4}} \tag{i}$$

mit

$$a_0 = \sqrt{\frac{q_0}{4\pi\sqrt{\varepsilon_0 w_0}}} = \sqrt{\frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 E_{cr}}} \tag{j}$$

als nichtlinearem «Wirkungshalbmesser» des punktförmigen Elementarteilchens, da für $R > a_0$ die Feldstärke in Gl. (i) rasch gegen die Feldstärke der linearen Theorie strebt. Berechnet man aus Gl. (21) die entsprechende Energiedichte, so stellt sich heraus [26; 27; 28], dass der nichtlineare Wirkungshalbmesser der Elementarteilchen etwa 1,85 mal so gross als der klassische ist. Mit $q_0 = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$C und $\varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12}$ Fm^{-1} erhält man also aus Gl. (19d) für die kritische Feldstärke den ausserordentlich hohen Wert:

$$E_{cr} = 1{,}18 \cdot 10^{20}\ \mathrm{V/m}$$

Man kann auch nachweisen, dass die Born-Infeldsche Theorie für ein Elementarteilchen die Bedingung (15) erfüllt, was die Möglichkeit dieser nichtlinearen rein elektromagnetischen Theorie von stabilen geladenen Elementarteilchen beweist. Auch ist nach ihr die Lichtgeschwindigkeit nur in unmittelbarer Nähe der Elementarteilchen etwas kleiner als c_0, was makroskopisch unwesentlich ist.

Obwohl formal unanfechtbar, leidet die Born-Infeldsche Theorie unter dem Mangel, dass, ausgenommen das angegebene, stabile und mit endlicher Masse behaftete Modell des Elementarteilchens, keine ihrer spezifischen Konsequenzen direkt experimentell nachprüfbar ist, und dass sie als klassische Theorie für die Polarisation des Vakuums keinen Grund an-geben kann, diese als nackte Tatsache hinnimmt, sie eigentlich unter den oben erwähnten Bedingungen zu berechnen gestatten würde, falls sie vorhanden wäre.

In der schon vor Ausarbeitung des kovarianten Formalismus unter Leitung von *Heisenberg* auf quantenphysikalischer Grundlage entwickelten, klassisch ausgelegten, nichtlinearen relativistisch kohärenten Theorie des elektromagnetischen Feldes von *Euler* und *Kockel* [30] wurde nur gefordert, dass ihre universelle Funktion nach Potenzen der in Gl. (17) und (18) angegebenen relativistischen Invarianten Λ_1 und Λ_2 entwickelbar sein soll und keine sonstigen Hypothesen gemacht, d. h. es wurde:

$$L_{0\mathrm{H}} = \Lambda_1 + \frac{1}{2\,w_0}(\alpha_1 \Lambda_1^2 + \alpha_2 \Lambda_2) + \ldots \tag{25}$$

gesetzt und aus der Diracschen Theorie der virtuellen Paartrennung die Koeffizienten α_1 und α_2 der Entwicklung in der Annahme berechnet, dass die vorkommenden Wellenlängen gross sind gegen die sog. Compton-Wellenlänge des Elektrons:

$$\lambda_c = \frac{h}{m_e\, c_0} = 2{,}43 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{m}$$

Es wurden folgende Ausdrücke abgeleitet:

$$\alpha_1 = \frac{w_0}{90\,\pi^2} \cdot \frac{q_0}{m_e^4} \cdot \frac{h^5}{c_0^7}$$

$$\alpha_2 = 7\,\alpha_1 \tag{k}$$

Für die Grössen $\vec{D}_v$ und $\vec{H}_v$ erhielt man also aus Gl. (19) und (20):

$$\vec{D}_v = \varepsilon_0 \left[\vec{E} + \frac{1}{w_0}(\alpha_1 \Lambda_1 \vec{E} - \alpha_2 \sqrt{\Lambda_2}\, c_0 \vec{B}) + \ldots\right] \tag{19d}$$

und

$$\vec{H}_v = \frac{1}{\mu_0}\left[\vec{B} + \frac{1}{w_0}(\alpha_1 \Lambda_1 \vec{B} + \alpha_2 \sqrt{\Lambda_2}\, c_0 \vec{E}) + \ldots\right] \tag{20d}$$

woraus sich wiederum eine von ε_0 bzw. μ_0 verschiedene nicht skalare und von beiden Feldern $\vec{E}$ und $\vec{B}$ abhängige Permittivität und Permeabilität des Vakuums ergab.

In einer Weiterentwicklung der Theorie [31] konnte neben den zwei in Gl. (25) vorkommenden Gliedern der Entwicklung noch ein drittes berechnet und mit den ersten zwei in eine geschlossene Form zusammengezogen werden. Durch Aufnahme in den Feldgrössen biquadratischer Glieder in die universelle Funktion konnte ferner *Weisskopf* [32] auch andersartig veränderliche elektromagnetische Felder in Betracht ziehen.

Klassisch betrachtet, haben demnach alle rein elektromagnetischen und relativistisch kohärenten Feldtheorien der Elementarteilchen nichtlinearen Charakter. Nach diesen sind die elektrische und magnetische Feldkonstante ε_0 und μ_0 notwendig von der Permittivität ε_v und der Permeabilität μ_v des Vakuums, die universelle Funktionen der momentanen örtlichen elektromagnetischen Zustandsgrössen sind, verschieden. Die Feldkonstanten erscheinen nur als von den örtlichen Zustandsgrössen unabhängige Grenzwerte dieser universellen Funktionen in Gebieten sehr schwacher Felder und müssen daher füglich von diesen Funktionen unterschieden werden. Obwohl eine exakte, eindeutige und willkürfreie Bestimmung dieser zwei Universalfunktionen noch aussteht, können durch Methoden der Störungsrechnung quantentheoretisch u. a. vier der experimentell erfassbaren und die Nichtlinearität direkt oder indirekt stützenden Effekte berechnet werden, von denen drei vollständig und einer teilweise durch Versuche bestätigt ist, womit die Unumgänglichkeit der klassischen Nichtlinearität nachgewiesen ist.

Literatur

[1] *J. C. Maxwell:* A Treatise on Electricity and Magnetism. Oxford, Clarendon Press, 1873, 2 volumes.

[2] *H. Hertz:* Über die Grundgleichungen der Elektrodynamik für bewegte Körper. Annalen der Physik und Chemie 41(1890)–, S. 369...399.

[3] *H. Fizeau:* Sur les hypothèses relatives à l'éther lumineux et sur une expérience, qui paraît démontrer que le mouvement des corps change avec la vitesse avec laquelle la lumière se propage dans leur intérieur. Comptes rendus hébdomadaires de l'académie des sciences 33(1851)–, S. 349...355.

[4] *H. A. Lorentz:* Weiterbildung der maxwellschen Theorie. Elektronentheorie. In: Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss der Anwendungen. Leipzig, Teubner, 1904, Bd. V/2, S. 145...280.

[5] *A. Einstein:* Zur Elektronendynamik bewegter Körper. Annalen der Physik 17(1905)10, S. 891...921.

[6] *H. Weyl:* Raum, Zeit, Materie. Berlin, Springer, 1923, 5. Auflage.

[7] *M. Abraham:* Dynamik des Elektrons. Nachrichten der Gesellschaft für Wissenschaften, Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse 1(1902)–, S. 20...41.

[8] *M. Abraham:* Theorie der Elektrizität. Berlin, Teubner, 1923, 7. Auflage.

[9] *W. Kaufmann:* Über die «Elektromagnetische Masse» der Elektronen. Nachrichten der Gesellschaft für Wissenschaften, Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse 3(1903)–, S. 90...103.

[10] *A. Einstein:* Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt. Annalen der Physik 17(1905)6, S. 132...148.

[11] *M. Planck:* Zur Theorie des Gesetzes der Energieverteilung im Normalspektrum. Verhandlungen der deutschen physikalischen Gesellschaft 2(1900)17, S. 237...245.

[12] *A. Compton:* A Quantum Theory of the Scattering of X-Rays by Light Elements. Physical Review 21(1923)5, S. 483...502.

[13] *L. de Broglie:* Recherches sur la théorie des quanta. Thèse, Sarbonne, Paris 1924.

[14] *W. Heisenberg:* Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen. Zeitschrift für Physik 33(1925)–, S. 879...893.

[15] *G. Schrödinger:* Quantisierung als Eigenwertproblem. Annalen der Physik 79(1926)–, S. 361...376 und S. 489...527, 80(1926)13, S. 437...490 und 81(1926)18, S. 109...139.

[16] *W. Heisenberg:* Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik. Zeitschrift für Physik 43(1927)–, S. 172...198.

[17] *P. A. M. Dirac:* Principles of Quantum Mechanics. Oxford, Clarendon Press, 1930.

[18] *G. Wentzel:* Einführung in die Quantentheorie der Wellenfelder. Wien, Deuticke, 1943.

[19] *T. Tati* and *S. Tomonaga:* A Self-Consistent Substraction Method in the Quantum Field Theory. I. Progress of Theoretical Physics 3(1948)4, S. 391...406.

[20] *J. Schwinger:* Quantum Electrodynamics. I: A Covariant Formulation. Physical Review 74(1948)10, S. 1439...1461.

[21] *W. E. Lamb* and *R. C. Retherford:* Fine Structure of the Hydrogen Atom by a Microwave Method. Physical Review 72(1947)3, S. 241...243.

[22] *S. H. Koenig, A. G. Prodell* and *P. Kusch:* The Anomalous Magnetic Moment of the Electron. Physical Review 88(1952)2, S. 191...199.

[23] *P. E. Cavanagh:* The Double Compton Effect. Physical Review 87(1952)6, S. 1131.

[24] *O. Halpern:* Scattering Processes Produced by Electron in Negative Energy States. Physical Review 44(1933)5, S. 855...856.

[25] *J. A. Moffat* and *M. W. Stringfellow:* The Small-Angle Scattering of Photons of about 100 MeV Energie. Proc. Royal Soc. Series A 254(1960)1277, S. 242...258.

[26] *D. Ivanenko* und *A. P. Sokolov:* Klassische Feldtheorie. Berlin, Akademie-Verlag, 1954.

[27] *A. Sommerfeld:* Vorlesungen über theoretische Physik. Bd. 3: Elektrodynamik. Leipzig, Geest und Portig, 1949.

[28] *M. Born* und *L. Infeld:* Foundations of the New Field Theory. Proc. Royal Soc. Series A 143(1934)852, S. 425...451.

[29] *M. Born:* On the Quantum Theory of the Electromagnetic Field Proc. Royal Soc. Series A 143(1933)849, S. 410...437.

[30] *H. Euler* und *B. Kockel:* Über die Streuung von Licht an Licht nach der Diracschen Theorie. Naturwissenschaften 98(1936)15, S. 246...247.

[31] *W. Heisenberg* und *H. Euler:* Folgerungen der Diracschen Theorie des Positrons. Zeitschrift für Physik 98(1936)11/12, S. 714...732.

[32] *V. Weisskopf:* Über die Elektrodynamik des Vakuum auf Grund der Quantentheorie des Elektrons. Det Kgl. danske videnskabernes selskab. Mathematisk-fysiske Meddelelser. 14(1936)6. Ejnar Munksgaard København, 1936.

Adresse des Autors:

Prof. Dr.-Ing. *R. Rădulet,* Comité Electrotechnique Roumain, Office d'Etat pour Normes, Boîte postale 10, Bucarest 30.