Zeitschrift: Bulletin pédagogique : organe de la Société fribourgeoise d'éducation et du Musée pédagogique

Herausgeber: Société fribourgeoise d'éducation

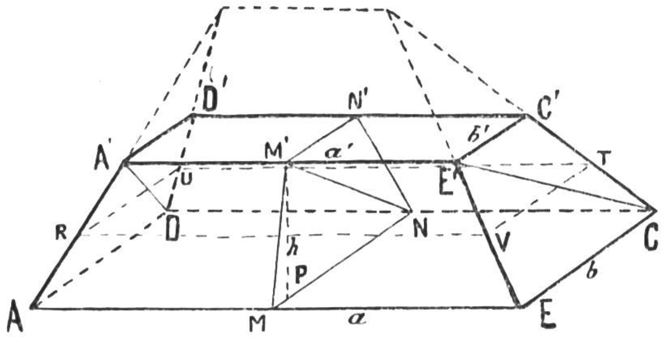
Band: 55 (1926)

Heft: 7

Rubrik: Calcul du volume d'un tas de gravier et d'autres solides analogues

Calcul du volume d'un tas de gravier
et d'autres solides analogues

La figure ci-dessous représente un tas de sable ou de gravier. On voit immédiatement que ce solide n'est pas un tronc de pyramide, puisque les arêtes latérales prolongées ne se rencontrent pas en un même point. Le tas de gravier est donc un tronc de prisme quadrangulaire, couché sur une de ses faces latérales AECD. La géométrie nous enseigne que pour calculer le volume d'un tronc de prisme quadrangulaire, on doit le décomposer en deux troncs de prisme triangulaire qui sont ici : AA'DEE'C et A'DD'E'CC'.



Comme le volume d'un tronc de prisme triangulaire est égal au produit de l'aire de la section droite par le tiers de la somme des mesures des arêtes latérales, le volume de ce tas de gravier est :

$$V = \text{MM'N} \times \frac{\text{AE} + \text{DC} + \text{A'E'}}{3} + \text{M'N'N} \times \frac{\text{DC} + \text{A'E'} + \text{D'C'}}{3}$$

$$= \frac{\text{MN} \times \text{M'P}}{2} \times \frac{2\,\text{AE} + \text{A'E'}}{3} + \frac{\text{M'N'} \times \text{M'P}}{2} \times \frac{\text{DC} + 2\text{A'E'}}{3}$$

$$= \frac{\text{MN} \times \text{M'P}}{6}\,(2\,\text{AE} + \text{A'E'}) + \frac{\text{M'N'} \times \text{M'P}}{6}\,(2\,\text{A'E'} + \text{AE})$$

Faisons : AE $= a$; EC $= b$; A'E' $= a'$; E'C' $= b'$; M'P $= h$; et on aura :

$$V = \frac{bh}{6}\,(2\,a + a') + \frac{b'h}{6}\,(2\,a' + a) \qquad \textbf{1)}$$

On trouve cette formule **1**) généralement établie dans les ouvrages de géométrie élémentaire.

On peut la réduire encore. Effectuons les multiplications par b et b', et mettons le facteur commun $\frac{h}{6}$ en évidence ; nous aurons :

$$V = \frac{h}{6}\,(2\,ab + a'b + 2\,a'b' + ab')$$

$$= \frac{h}{6}\,(ab + ab + a'b + a'b' + a'b' + ab') ;$$

En changeant l'ordre des termes qui sont dans la parenthèse, on a :

$$V = \frac{h}{6}\,(ab + a'b' + ab + a'b + ab' + a'b')$$

$$= \frac{h}{6}\,[ab + a'b' + (a + a')\,b + (a + a')\,b']$$

$$= \frac{h}{6} [ab + a'b' + (a + a') (b + b')]$$

$$= \frac{h}{6} \left[ab + a'b' + 4 \left(\frac{a + a'}{2}\right) \left(\frac{b + b'}{2}\right)\right]$$

On remarquera que, d'après la figure, $\frac{a + a'}{2} = RV$ et $\frac{b + b'}{2} = VT$.

On aura donc :

$$V = \frac{h}{6} (ab + a'b' + 4 \, RV \times VT)$$

Comme ab est l'aire de la base inférieure, que nous représenterons par B ; $a'b'$ l'aire de la base supérieure, que nous représenterons par b et $4 \, RV \times VT$ est 4 fois l'aire d'une section faite à égale distance des deux bases, aire que nous représentons par S, nous aurons la formule suivante connue sous le nom de formule de Thomas Simpson :

$$V = \frac{h}{6} (B + b + 4 \, S) \qquad \textbf{2)}$$

* * *

Calculons maintenant le volume d'un tas de gravier dont les dimensions de la base inférieure sont 5 m. et 1,60 m. ; celles de la base supérieure : 3 m. et 0,96 m. ; la hauteur est de 1,20 m.

Comme les dimensions des deux bases sont proportionnelles, — on a, en effet : $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ ou $\frac{5}{3} = \frac{1,60}{0,96}$ — les deux bases sont semblables et le solide est en réalité un tronc de pyramide.

Nous allons donc opérer ici avec la formule du tronc de pyramide d'abord, ensuite avec les formules **1)** et **2)** du tronc de prisme.

La formule du volume du tronc de pyramide est :

$$V = \frac{h}{3} \left(B + b + \sqrt{Bb}\right) \qquad \textbf{3)}$$

Dans le problème, tel qu'il est donné, $\frac{h}{3} = 0,4$, $B = 5 \times 1,60 = 8$,

$$b = 3 \times 0,96 = 2,88 \quad \text{et} \quad \sqrt{Bb} = \sqrt{8 \times 2,88} = 4,8$$

On a donc : $V = 0,4 \, (8 + 2,88 + 4,8) = 0,4 \times 15,68 = 6,272 \text{ m}^3$.

* * *

Si nous appliquons la formule **1)**, nous trouvons :

$$V = \frac{bh}{6} (2a + a') + \frac{b'h}{6} (2a' + a)$$

$$= \frac{1,60 \times 1,20}{6} (2 \times 5 + 3) + \frac{0,96 \times 1,20}{6} (2 \times 3 + 5)$$

$$= 0,32 \times 13 + 0,192 \times 11 = 4,16 + 2,112 = 6,272 \text{ m}^3$$

Le résultat est le même que ci-dessus.

* * *

Appliquons maintenant la formule **2)**.

$$h = 1{,}2 \text{ et } \frac{h}{6} = 0{,}2 \quad ; \quad B = 8 \quad ; \quad b = 2{,}88$$

Les dimensions de S ou du rectangle RVTU de la figure sont :

$$\text{VR} = \frac{5 + 3}{2} = 4 \quad ; \quad \text{TV} = \frac{1{,}60 + 0{,}96}{2} = \frac{2{,}56}{2} = 1{,}28$$

RVTU ou S mesure alors : $4 \times 1{,}28 = 5{,}12$, et $4\ S = 20{,}48$

On a donc : $V = \frac{h}{6} (B + b + 4\ S) = 0{,}2\ (8 + 2{,}88 + 20{,}48)$

$= 0{,}2 \times 31{,}36 = 6{,}272\ \text{m}^3$ comme ci-dessus.

* * *

De tout ce qui vient d'être dit, nous pouvons tirer la conclusion suivante : si le tas de gravier à bases rectangulaires est un tronc de pyramide, on peut en calculer le volume exact au moyen de l'une quelconque des trois formules précédentes ; si c'est un tronc de prisme, les formules **1)** et **2)** seules peuvent servir ; si on hésite sur la nature du solide, il n'y a qu'à appliquer la formule **2)**, c'est d'ailleurs la formule qui donnera le moins d'opérations à faire, c'est donc celle qu'il faut employer ordinairement.

* * *

Il peut se faire qu'on n'ait besoin que du volume approximatif.

On peut l'obtenir de deux manières : soit en multipliant la demi-somme des bases par la hauteur, soit en multipliant l'aire de la section S par la hauteur.

On aura, pour le problème posé ci-dessus, les deux résultats approximatifs suivants :

$$V = \frac{B + b}{2} \times h = \frac{8 + 2{,}88}{2} \times 1{,}2 = 5{,}44 \times 1{,}2 = 6{,}528\ \text{m}^3 ,$$

résultat approché par excès,

ou $V = S \times h = 5{,}12 \times 1{,}2 = 6{,}144\ \text{m}^3$

résultat plus approché que le précédent, mais par défaut.

Ce dernier procédé peut se traduire par la formule suivante :

$$V = \frac{a + a'}{2} \times \frac{b + b'}{2} \times h$$

J. Aebischer.

Ne pas discuter la vertu est quelquefois plus difficile que de haïr le mal. La reconnaître est souvent impossible et nous prendrons ensemble aujourd'hui la résolution de renoncer aux vanités de notre jugement. Ne nous exposons pas à la désolation de méconnaître l'esprit de vérité qui s'incarne parfois dans des formes incompréhensibles. Marie Gasquet.