

Zeitschrift: IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen
Band: 2 (1933-1934)

Artikel: Efforts secondaires dans les travées à treillis en béton armé
Autor: Santarella, Luigi
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-3409>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 26.04.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

EFFORTS SECONDAIRES DANS LES TRAVÉES À TREILLIS EN BÉTON ARMÉ.

NEBENSPANNUNGEN IN FACHWERKTRÄGERN AUS EISENBETON.

SECONDARY STRESSES IN LATTICE GIRDERS OF REINFORCED
CONCRETE.

Dr. Ing. LUIGI SANTARELLA, Professeur à l'Ecole Polytechnique de Milan.

On sait que dans le calcul ordinaire des structures en treillis, on considère les barres comme articulées aux noeuds. Les conditions statiques réelles, par contre, pour la connexion rigide qui est adoptée généralement dans la pratique, s'écartent de celles que l'on a admises et donnent lieu à des efforts appelés secondaires, mais qui, en certains cas, peuvent assumer l'importance des efforts principaux.

La justification grossière de la méthode de calcul simplifiée et ordinairement utilisée consiste en ce que, pour des structures chargées dans les noeuds, si les efforts maxima qui se manifestent à proximité des noeuds surmontent la rigidité des connexions, ces efforts mettent la structure dans les conditions statiques présumées dans le calcul cela d'ailleurs, sans aucun préjudice pour la stabilité, grâce en partie à la plasticité du matériau.

Si cette justification est admissible en général, dans quelques cas particuliers toutefois elle n'est pas exacte; par exemple quand la rigidité de la connexion est annihilée sans qu'il ait été possible de réaliser un noeud, même approximativement.

Dans ces dernières années, par suite des progrès de la technique, qui n'a pas craint d'aborder des réalisations de plus en plus audacieuses, on a senti le besoin d'étudier, soit théoriquement, soit expérimentalement, l'importance des efforts secondaires dans des structures particulières.

Des études théoriques intéressantes ont été entreprises par certains investigateurs, même à des dates non récentes, et ces études ont conduit à des méthodes de calcul d'une approximation plus ou moins suffisante¹⁾.

La plupart des Auteurs se basent sur les efforts principaux et calculent les efforts appelés secondaires comme un effet de la déformation produite par les premiers.

Nous dirons tout de suite que cette méthode est la plus expéditive et nous sommes d'avis qu'on peut l'adopter, du fait qu'elle conduit à des résultats d'une approximation suffisante.

Les déterminations expérimentales ont été orientée principalement vers les structures en acier, et un bon nombre d'essais ont confirmé les possibilités d'application des diverses méthodes.

Nous sommes cependant d'avis que la concordance parfaite entre les résultats de la théorie et ceux de l'expérience est très difficile à atteindre

¹⁾ Cfr. les études de MOHR, MANDERLA, MÜLLER Breslau, ENGESSER, WINKLER, RITTER, BAŽANT, CHRISTIANI, JOHNSON, BRYAN, PARCEL, etc.

Détails constructifs de la poutre triangulaire d'épreuve.
Konstruktive Details des Versuchssträgers mit Dreiecksverband.
Constructional details of the test girder with triangular bracing.

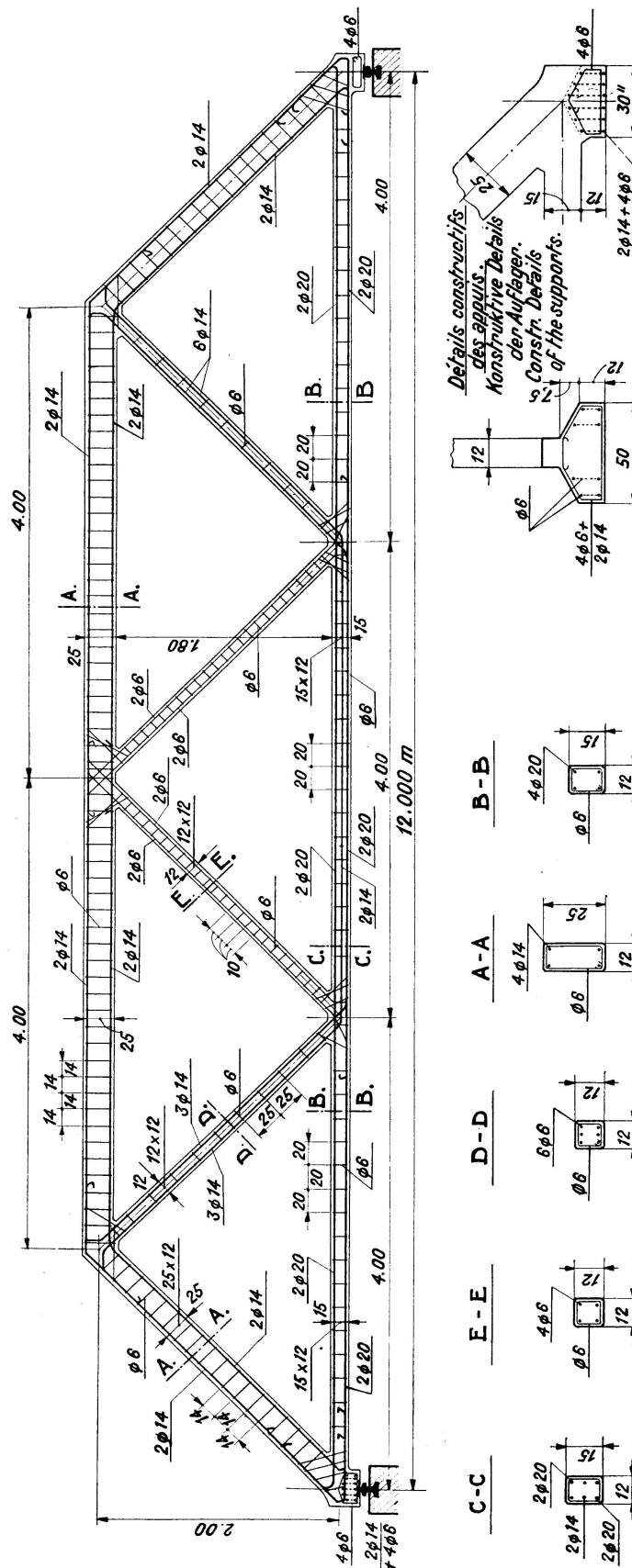


Fig. 1.

pour le comportement des liaisons externes et internes, que l'on peut toujours parfaitement déterminer.

Une rivure parfaite, par exemple, réalisant la véritable condition d'encastrement entre deux membrures, est presque toujours difficile à exécuter. En pratique, se produiront donc des affaissements relatifs qui, naturellement, feront varier la valeur des efforts secondaires transmis.

La cause de beaucoup d'insuccès réside peut-être dans ce fait. D'autre part, il est difficile, ou du moins laborieux, d'évaluer les degrés d'encastrement et d'en tenir compte dans le calcul.

Une plus grande correspondance pourra être réalisée, peut-être pour les structures soudées. Dans le domaine du béton armé, peu de recherches ont été effectuées. Cependant, le développement important atteint par ce système moderne fait sentir la nécessité de pareilles recherches. Le béton armé à cause du caractère monolithique qu'il prend après vieillissement, permet la réalisation d'encastnements presque parfait. Dans ce genre de structures, une inconnue importante est toutefois représentée par le module d'élasticité, qui varie, non seulement d'une membrure à l'autre, mais aussi d'un point à l'autre.

Il est difficile, si-non impossible, de tenir compte de cette variabilité, mais cela ne devrait pas décourager ceux qui s'intéressent au problème.

Il existe en pratique nombre de causes susceptibles de provoquer des perturbations dans le comportement de ces structures; des études patientes peuvent les mettre en évidence et nous amener à une connaissance parfaite de ce sujet.

Recherches expérimentales.

Le Laboratoire de Ponts et Grandes Structures du Polytechnique Royal de Milan a entrepris des recherches expérimentales sur une poutre à treillis spécialement construite: quoiqu'importantes, ces recherches n'ont pas encore conduit à des résultats effectifs très précis. C'est précisément de ces essais que nous nous occupons dans ce Mémoire, nous réservant de revenir sur la question dès que seront éclaircies certaines indéterminations qui subsistent encore.

On a préparé une poutre d'essai à treillis triangulaire symétrique avec membrures supérieure et inférieure parallèles, portée libre théorique 12 m., hauteur entre les axes des membrures 2 m. Dans la fig. 1 sont indiqués les détails d'armature et de construction. L'appareil d'appui a été rendu solide de la poutre et est constitué, comme l'indique la même figure, par de petits blocs en béton armé qui se développent en dessous des noeuds théoriques d'extrémité et qui sont façonnés de manière à éviter le basculement latéral de la poutre.

Pour se rapprocher des conditions d'un appui simple, on a noyé des tôles légèrement recourbées dans les faces inférieures de ces petits blocs. En outre, on a formé les appuis avec des champignons de rails, afin de diminuer le frottement.

D'autres dispositions ont été écartées, la disposition susdite suffisant à réaliser les conditions d'appui simple; mais, comme il sera mieux expliqué par la suite, le comportement de la structure a été considérablement différent de celui qu'on avait prévu.

Le calcul général de la poutre a été conduit dans l'hypothèse communément adoptée des charnières dans les noeuds.

Les dimensions ont été déterminées de façon que, sous leur propre poids et dans l'un des cas suivants, il ne se produise pas dans le béton d'efforts de compression supérieurs à 30 kg. par cm^2 . Pour les barres sollicitées à la traction, on a considéré comme élément résistant l'armature métallique seulement, et cela afin d'obtenir des tensions très faibles dans le béton si l'on prend en considération son intervention d'ailleurs effective. Les conditions de charge prévues ont été:

- 1) Charge concentrée: 4 tonnes pour chaque noeud supérieur;
- 2) Charge concentrée: 4 tonnes pour chaque noeud inférieur;
- 3) Charge continue uniforme: 200 kg. par mètre linéaire sur la membrure supérieure;
- 4) Charge continue uniforme: 200 kg. par mètre linéaire sur la membrure inférieure.

Pour les deux derniers cas, en ce qui concerne la flexion, les barres ont été considérées comme demi-encastées aux extrémités.

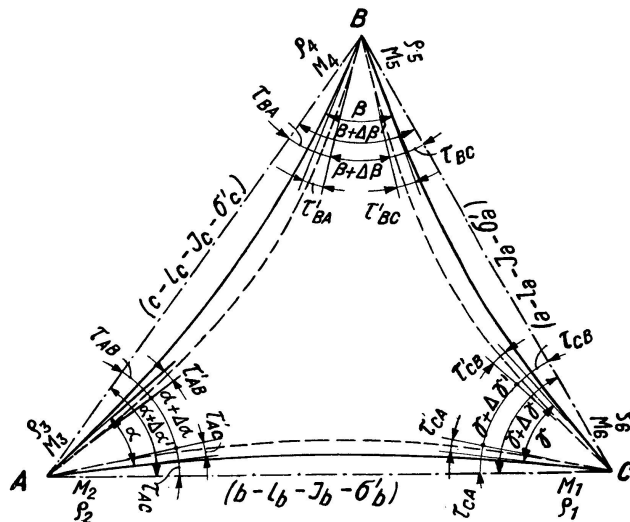


Fig. 2.

En cours d'essai, les charges ont été augmentées et même doublées, sans qu'il se produise de fissures.

En outre, on a effectué des essais avec des charges isolées concentrées dans les noeuds.

Le calcul des efforts secondaires a été effectué en appliquant la méthode MÜLLER-Breslau, et la méthode MOHR.

Les résultats suivant les deux méthodes sont pratiquement identiques et compatibles avec l'approximation que la complexité des développements peut permettre.

Pour tenir compte de l'effet de la charge uniformément répartie sur les barres, l'Auteur a négligé les déformations induites par les efforts de cisaillement et a supposé, comme il est communément admis, que l'axe déformé sous l'effet des moments ne rapproche pas entre elles les extrémités de la barre.

En nous reportant à la fig. 2, supposons que la configuration que prendrait le triangle avec charnières aux noeuds soit celle qui est indiquée par le tracé en traits et points, $A-B-C$ sous l'influence des efforts axiaux exclusivement, et que la configuration indiquée par le tracé en traits soit

celle que les barres prendraient sous l'influence de la flexion provoquée par la charge.

La connexion rigide aux noeuds s'opposera aux déformations angulaires et par conséquent les angles resteront tels qu'ils étaient initialement, à savoir α, β, γ .

Supposons que la configuration réelle résultant de la rigidité et de la charge soit celle qui est indiquée par les lignes pleines, et qu'à cette inflexion correspondent les moments d'extrémité $M_1, M_2, \dots, M_6$ positifs.

Si nous appelons généralement τ la rotation sur l'extrémité des barres sous l'influence de la flexion produite par la charge, quand on les considère comme simplement appuyées aux noeuds, et si nous appelons Δ' la déformation angulaire qui serait provoquée par les efforts axiaux dans les barres que nous avons supposées pivotantes, nous aurons dans la structure principale, par exemple, pour l'angle α une déformation angulaire totale:

$$\Delta\alpha = \Delta\alpha' - \tau_{AC} - \tau_{AB} = \Delta\alpha' - \Delta\alpha''$$

Les angles τ sont considérés comme positifs quand les tangentes d'extrémité tournent vers l'intérieur du triangle.

Pour les autres angles on a d'une manière analogue

$$\Delta\beta = \Delta\beta' - \Delta\beta''; \quad \Delta\gamma = \Delta\gamma' - \Delta\gamma''$$

Suivant l'exemple de MÜLLER Breslau et en admettant que l'on a par exemple:

$$\tau'_{AB} = \frac{2M_3 + M_4}{6EJ_c} l_c; \quad \tau'_{AC} = \frac{2M_2 + M_1}{6EJ_b} l_b$$

$$\tau'_{AB} + \tau'_{AC} = \Delta\alpha' - \Delta\alpha'' = \Delta\alpha$$

on en déduit facilement:

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{2M_3 + M_4}{6EJ_c} l_c + \frac{2M_2 + M_1}{6EJ_b} l_b = \Delta\alpha' - \Delta\alpha'' \\ \frac{2M_4 + M_3}{6EJ_c} l_c + \frac{2M_5 + M_6}{6EJ_a} l_a = \Delta\beta' - \Delta\beta'' \\ \frac{2M_6 + M_5}{6EJ_a} l_a + \frac{2M_1 + M_2}{6EJ_b} l_b = \Delta\gamma' - \Delta\gamma'' \end{cases}$$

En faisant comme à l'ordinaire $q = M \frac{l}{J}$ les équations précédentes deviennent, dans le cas d'un module d'élasticité constant pour toutes les barres:

$$(2) \quad \begin{cases} 6E(\Delta\alpha' - \Delta\alpha'') = q_1 + 2(q_2 + q_3) + q_4 \\ 6E(\Delta\beta' - \Delta\beta'') = q_3 + 2(q_4 + q_5) + q_6 \\ 6E(\Delta\gamma' - \Delta\gamma'') = q_5 + 2(q_6 + q_1) + q_2 \end{cases}$$

C'est-à-dire, si nous considérons que:

$$(3) \quad \Delta\alpha' + \Delta\beta' + \Delta\gamma' = 0$$

on a facilement:

$$(4) \quad \begin{cases} q_4 = 6E(\Delta\alpha' - \Delta\alpha'') - q_1 - 2(q_2 + q_3) \\ q_5 = 6E(\Delta\beta' - \Delta\beta'') + 2E(\Delta\alpha'' + \Delta\beta'' + \Delta\gamma'') + q_1 + q_2 - q_4 \\ q_6 = 6E(\Delta\gamma' - \Delta\gamma'') + 2E(\Delta\alpha'' + \Delta\beta'' + \Delta\gamma'') + q_3 + q_4 - q_1 \end{cases}$$

S'il n'y a pas de charge sur les barres, du fait que $\Delta'' = 0$, les équations (4) précédentes deviennent les équations MÜLLER Breslau pour charges aux noeuds.

On sait que, à cause des inflexions positives des barres vers l'intérieur du triangle, l'influence des efforts normaux est donnée par:

$$(5) \quad \begin{cases} E \Delta \alpha' = (\sigma'_a - \sigma'_b) \cotg \gamma + (\sigma'_a - \sigma'_c) \cotg \beta \\ E \Delta \beta' = (\sigma'_b - \sigma'_c) \cotg \alpha + (\sigma'_b - \sigma'_a) \cotg \gamma \\ E \Delta \gamma' = (\sigma'_c - \sigma'_a) \cotg \beta + (\sigma'_c - \sigma'_b) \cotg \alpha \end{cases}$$

où σ' sont les tensions principales provoquées par les efforts axiaux.

Nous ne donnons pas les expressions qui fournissent les rotations des extrémités des barres, puisqu'elles sont bien connues et puisqu'en tous cas on peut les établir avec facilité.

Pour une charge uniformément répartie on a par exemple:

$$\tau_{AB} = \tau_{BA} = \frac{p l^2}{24 EJ}$$

où la signification des symboles est bien connue.

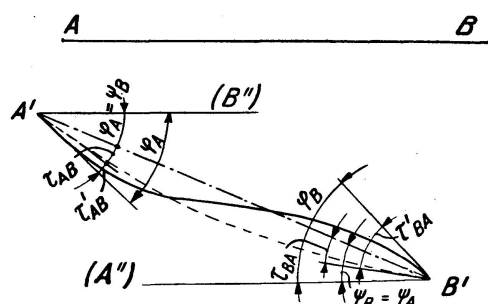


Fig. 3.

Si on considère les moments comme positifs lorsque les barres pivotent vers le dehors, on doit toujours appliquer les équations (4) en ayant soin de changer le signe aux Δ et de considérer comme positives les rotations τ vers le dehors du triangle.

On sait que les équations (4), conjointement avec les équations d'équilibre des noeuds, pour lesquelles la somme de tous les moments doit être égale à zéro, résolvent le problème.

Pour l'application de la méthode MOHR, si l'on veut tenir compte de l'effet de la charge sur les barres, il suffira de considérer les équations MOERSCH qui relient les moments d'extrémité d'une barre aux rotations φ correspondantes. Pour une barre quelconque AB s'infléchissant comme celle de la fig. 3 on a, par exemple:

$$(6) \quad \begin{cases} M_{AB} = \frac{2 EJ}{l} (2 \varphi_A + \varphi_B - 3 \psi_{AB}) - \mu_{AB} \\ M_{BA} = \frac{2 EJ}{l} (2 \varphi_B + \varphi_A - 3 \psi_{BA}) + \mu_{BA} \end{cases}$$

expressions dans lesquelles on introduit: avec φ toutes les rotations des tangentes extrêmes, avec ψ la rotation de la barre elle-même par rapport à la position primitive AB ($\psi_{AB} = \psi_{BA}$), avec μ les moments d'encastrement par-

fait, avec M les moments réels; tous les autres symboles ont des significations bien connues.

Une fois la charge connue, M est connu aussi; pour ψ on peut considérer les rotations produites par les efforts normaux principaux, que l'on peut obtenir graphiquement avec le diagramme WILLIOT, ou analytiquement avec le théorème des travaux virtuels; les inconnues sont représentées seulement par les φ et par les M correspondants.

Dès que l'on a écrit les équations d'équilibre des noeuds, étant donné que pour un noeud k quelconque $\sum M_k = 0$, il en résulte autant d'équations qu'il y a de noeuds; les seules inconnues sont les φ dont le nombre est égal à celui des noeuds.

Le problème est donc susceptible d'être résolu même avec cette méthode.

Les équations précédentes, résolues pour des structures homogènes c. à d. avec module d'élasticité E constant pour toutes les barres, sont susceptibles d'être appliquées à des structures dans lesquelles E varie d'une membrure à l'autre. Dans ce dernier cas, il suffira, après avoir considéré un E constant correspondant à une barre quelconque, de modifier convenablement l'aire de la section courante des autres barres dans le rapport inverse des modules d'élasticité.

Le calcul théorique des efforts secondaires dans la structure examinée a été conduit initialement pour les conditions des charges spécifiées ci-dessus. Ensuite on a même considéré des charges asymétriques isolées aux noeuds.

Mesure des déformations.

On a mesuré les déplacements des noeuds, les variations angulaires et les allongements des fibres.

Pour les premiers, on a convenablement disposé des comparateurs „Mahr“ avec approximation de $\frac{1}{100}$ de mm., mais dans lesquels on pouvait apprécier même $\frac{1}{500}$ de mm., pour mesurer les déplacements soit horizontaux soit verticaux.

Les mesures des variations angulaires et des allongements ont été effectuées avec le tensomètre acoustique bien connu SCHÄFER, en fixant à la structure jusqu'à 24 cordes, dont certaines de contrôle dans les points symétriques.

A chaque extrémité des barres, on a fixé au moyen d'étriers 2 cordes se faisant vis-à-vis en haut et en bas, afin d'obtenir les allongements aux deux extrémités de la membrure et de pouvoir en déduire les efforts moyens dans les sections du milieu correspondantes.

La charge a été constituée avec des poids dûment contrôlés, disposés sur une planche, et était immédiatement transmise à la structure au moyen des câbles de suspension aux noeuds ou aux membrures suivant qu'il s'agissait de charges concentrées ou continues.

Les essais ont été commencés après un an environ de vieillissement et continuent encore.

Chaque essai est répété en augmentant chaque fois la charge maximum. De cette manière on s'efforce d'éliminer les ajustements et on contrôle les indications précédentes en procédant toujours à des lectures intermédiaires.

Dans leur ensemble, les résultats ont été satisfaisants. La structure s'est toujours montrée parfaitement élastique sous réserve naturellement des caractéristiques élastiques du matériau utilisé.

Sous des charges considérablement supérieures à celles qui ont été prévues dans le calcul, il ne s'est manifesté aucun défaut sous forme de fissures visibles, même sous un examen attentif.

La résistance s'est montrée très élevée et cela n'est pas sans nous donner confiance en ce qui concerne le comportement des structures semblables calculées d'après les méthodes empiriques ordinaires.

Aussi les déformations ont-elles été normales; elles ont été limitées et inférieures à celles qui correspondent théoriquement à un module d'élasticité moyen de 200 tonnes par cm^2 , comme on le suppose généralement en pratique pour le calcul des déformations.

Dans les premiers essais, on a cependant noté que le comportement de la structure a été sensiblement différent (surtout pour ce qui a trait aux liaisons externes) de celui qui correspond à l'appui simple. Il est presque conforme au comportement d'une structure avec appui à charnières fixes.

En effet, les déplacements horizontaux des noeuds d'extrémité ont été presque inappréciables. Cela montre l'influence considérable du frottement, malgré le fait que l'on a cherché à le réduire au minimum avec la disposition adoptée.

En pratique, étant donné que l'on a presque toujours des surfaces d'appui rugueuses, ce frottement se manifestera certainement d'une manière accentuée et il faut supposer qu'il empêchera tout simplement, les déplacements relatifs des points de contact, même si l'on dispose de systèmes convenables d'appuis glissants; la pratique a montré qu'on ne réalise jamais les conditions d'appui simple idéal.

Les résultats du tensomètre ont été encore plus intéressants.

Malgré le fait qu'aucun raidissement n'a été pratiqué aux extrémités des barres, contrairement à ce que l'on fait en pratique pour les raccords de grande ampleur entre les diverses membrures, les encastresments relatifs se sont comportés d'une façon presque parfaite et les variations angulaires ont été presque nulles. Il y a eu de petites indications, mais on doit les attribuer aux inflexions des longueurs libres des barres. A cause de la difficulté de fixer les cordes, on a nécessairement dû appliquer celles-ci à une certaine distance des noeuds.

Les indications des allongements des fibres, si elles ont confirmé que les efforts axiaux principaux demeurent en général presque inaltérés, ont toutefois démontré que les efforts secondaires sont en certains points notablement différents des efforts secondaires initialement calculés. D'autre part cela était facilement prévisible après un examen sommaire des résultats des fleximètres.

En fait, on a une plus grande approximation, mais en certains points seulement, tandis qu'en d'autres points on a une divergence toujours croissante, en considérant les charnières d'appui fixes. Un fait qui mérite d'être noté est aussi que, vers les extrémités, les indications accusent également nettement l'influence de l'excentricité de la réaction de frottement.

C'est-à-dire, que sous l'influence de cette réaction excentrique, la structure s'est comportée comme partiellement encastree avec un degré d'encastrement non encore bien défini. L'augmentation du module d'élasticité moyen mise en évidence par les faibles indications des fleximètres, doit donc être considérée comme purement fictive. La faible déformabilité est certainement due en partie à ces moments d'encastrement. Ce fait a été confirmé aussi par d'autres comparaisons successives.

Les charnières fixes et les moments induits par l'excentricité de la réaction de frottement ne rapprochent cependant pas les résultats expérimentaux des résultats théoriques analogues calculés avec les méthodes susmentionnées.

Par contre, on a une plus grande correspondance si l'on tient compte également de la variabilité du module d'élasticité des barres comprimées qui présentent une plus grande importance que les barres sollicitées à la traction.

L'identité parfaite entre les résultats théoriques et les résultats expérimentaux est difficile à atteindre, même en tenant compte de la variabilité du module d'élasticité d'une barre à l'autre en liaison avec les tensions principales. Le module d'élasticité varie aussi d'un point à l'autre avec les tensions et il n'est pas possible de préciser si les modules moyens des membrures peuvent conduire à des résultats exacts.

Toutefois on peut affirmer en général, d'après les résultats de ces premiers essais, que si l'on tient compte de toutes les causes, les méthodes de calcul mentionnées ci-dessus sont applicables et se rapprochent suffisamment des résultats effectifs.

Les essais se poursuivent encore et, si ces essais initiaux ne doivent pas conduire à des résultats définitifs, ils serviront du moins à poser correctement le problème des recherches sur les structures complexes et à le résoudre par approximations successives. Le Laboratoire de Ponts et Grandes Structures du Polytechnique Royal de Milan a établi un programme d'essais de ce genre, qu'il développera graduellement et modifiera suivant les enseignements des expériences précédentes et dont il donnera successivement communication.

Jusqu'à ce jour, on a essayé principalement des éléments isolés et peu d'expériences ont été faites sur les structures complexes. Chacun, cependant, peut entrevoir l'utilité d'études entreprises sur ces dernières.

De telles études, non seulement nous feront mieux connaître ce système constructif, mais nous montreront aussi jusqu'à quel point sont applicables à ces structures les conceptions théoriques de la Science des Constructions et nous éclaireront mieux sur le comportement des liaisons externes et internes.

Les essais sur ces structures ont déjà montré que l'appui simple est difficile à réaliser et que pour des structures avec action de poussée, il faut tenir compte, au moins pour les noeuds d'extrémité, de l'excentricité éventuelle de la réaction de frottement. Il faut souhaiter que ces études prennent le développement que demandent les applications pratiques à la construction d'ouvrages futurs de plus en plus audacieux.

Résumé.

L'auteur donne des renseignements concernant certains essais expérimentaux entrepris au Laboratoire de Ponts et Grandes Structures du Polytechnique de Milan sur les structures en treillis et qui ne sont pas encore terminés.

Les essais ont pour but de définir, autant que possible, le comportement élastique des structures en treillis avec cadre en béton armé et à définir les efforts, afin de vérifier les possibilités d'application des méthodes normales de calcul, surtout en ce qui concerne le comportement des liaisons.

Zusammenfassung.

Vorliegende Abhandlung enthält Angaben über eingeleitete, aber noch nicht abgeschlossene experimentelle Versuche an Fachwerken, die im Laboratorium für Brücken- und Hochbau der Technischen Hochschule in Mailand durchgeführt werden.

Zweck solcher Versuche ist, das elastische Verhalten von Fachwerken mit Eisenbeton-Rahmen, sowie die sich dabei ergebenden Beanspruchungen, soweit als möglich zu bestimmen, um die Anwendungsmöglichkeiten der normalen Rechenmethoden, vor allem inbezug auf das Verhalten der Verbindungen, zu prüfen.

Summary.

Information is given about some experimental tests that have been commenced, but are not yet concluded, on lattice structures, at the Bridge and Large Structures Laboratory of the Milan Polytechnic.

The object of these experimental tests is to define, as far as possible, the elastic behaviour of lattice structures with reinforced concrete frame, as well as the stresses that are set up, in order to check the applicability of the normal methods of calculation, especially in connection with the bindings.