

**Zeitschrift:** IABSE publications = Mémoires AIPC = IVBH Abhandlungen  
**Band:** 5 (1937-1938)

**Artikel:** Kugelschalen über vier- und vieleckigem Grundriss  
**Autor:** Aas Jakobsen, A.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-6146>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 19.02.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# KUGELSCHALEN ÜBER VIER- UND VIELECKIGEM GRUNDRISS.

COUPOLES MINCES À PLAN RECTANGULAIRE ET POLYGONAL.  
SPHERICAL CUPOLA SHELLS, RECTANGULAR OR POLYGONAL  
IN PLAN.

A. AAS JAKOBSEN, Oslo.

## 1. Vorwort.

Eine wichtige Konstruktionsform des Schalenbaus ist die Kugelschale über vier- oder vieleckigen Grundflächen. Es wird aus einer Kugel ein Flächenstück mit der gewünschten Grundrißform ausgeschnitten und diese mit Binderscheiben abgesteift (Fig. 1). Die Tragwirkung besteht jetzt darin, daß die Kugelschale ihre Vertikallast durch Schubspannungen nach den Bindern überträgt. Die Binderscheiben können senkrecht zu ihrer Tragfläche keine Kräfte aufnehmen. Es besteht jetzt die Möglichkeit, die Binder so zu konstruieren, daß die Druckspannungen in der oberen Faser der Binder, wo

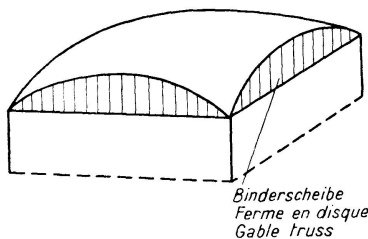


Fig. 1.

sie mit der Schale verbunden werden, mit der Druckspannung der Schale übereinstimmen für eine durchschnittliche Belastung z. B. Eigengewicht +  $\frac{1}{2}$  Nutzlast. Die Randstörungen, die bei den anderen Belastungszuständen auftreten, sind dann klein und auf eine schmale Randzone beschränkt. Die Spannungen in der Schale werden darum durch den Membranspannungszustand (Spannungen gleichmäßig über die Schalenstärke verteilt) sehr genau wiedergegeben.

Die Erfindung dieser Schalenform stammt von Professor Dr. DISCHINGER, der hierfür auch das erste Rechenverfahren geschaffen hat und dieses im Jahre 1930 bei dem Preisausschreiben der Akademie für Bauwesen zusammen mit anderen Arbeiten eingereicht und dafür den ersten Preis erhalten hat<sup>1)</sup>. Für die Berechnung dieser rechteckigen Kuppel unter Verwendung der Kugelschalen hat DISCHINGER vorgeschlagen, den rotationssymmetrischen Belastungs- und Stützungszustand durch die Lösung der homogenen Differentialgleichung der Kugelschale zu überlagern und damit die Randbedingungen zu befriedigen.

Eine allgemeine Fassung des Membranspannungszustandes ist von A. PUCHER<sup>2)</sup> gegeben. PUCHER hat gezeigt, daß die Membranspannungen durch eine Spannungsfunktion beschrieben werden, und daß diese Spannungsfunktion durch eine partielle Differentialgleichung 2. Ordnung bestimmt ist.

<sup>1)</sup> ELLERBECK: Preisaufgabe der Akademie des Bauwesens aus dem Gebiete des Eisenbetons. Zbl. Bauverw. 1930, H. 24. — DISCHINGER, FR.: Eisenbetonschalendächer Zeiss-Dywidag zur Überdachung weitgespannter Räume. 1. Intern. Kongreß für Beton und Eisenbeton, Lüttich 1930. Edition „La technique des Travaux“. — DISCHINGER, FR.: Die Rotationsschalen mit unsymmetrischer Form und Belastung. Bauing. 1935, H. 35—38.

<sup>2)</sup> PUCHER, A.: Der Spannungszustand in gekrümmten Flächen. Beton u. Eisen 1934, H. 19.

Diese Gleichung läßt sich für viele Fälle nur durch Näherungsmethoden lösen und ist oft mit viel Rechenarbeit verbunden. Zu diesen Fällen gehört auch die Kugelschale über vieleckigem Grundriß.

In der vorliegenden Arbeit wird nun in Fortsetzung der Arbeiten von DISCHINGER untersucht, in welchem Fall eine Lösung mittels der Differentialgleichung möglich ist und wie sie durchgeführt werden muß, um für die verschiedenen Lastfälle eine möglichst gute Erfüllung der Randbedingungen zu ergeben. Es wird das praktische Rechnen durch mehrere Tafeln erleichtert. Weiter wird das Gleichgewicht in der Ecke ohne Heranziehen von Biegemomenten nachgewiesen.

## 2. Spannungen des Grundbelastungszustandes.

Für die Ausrechnung der Schalenspannungen soll immer das Koordinatensystem gewählt werden, das die Berechnung am einfachsten gestattet. Für Eigengewicht, Schnee, Kuppelaufsatz bzw. jede drehsymmetrische Belastung mit drehsymmetrischer Stützung (Grundbelastungszustand) gibt eine

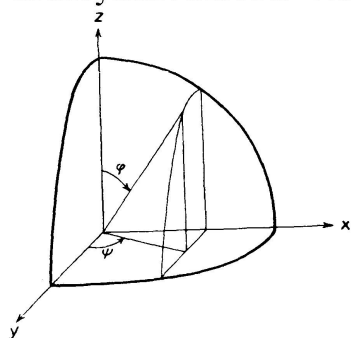


Fig. 2 a.

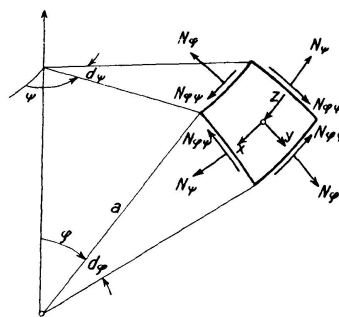


Fig. 2 b.

vertikale Bezugsachse die einfachsten Formel­ausdrücke. Die Gleichgewichtsgleichungen eines Schalenelementes (Fig. 2) sind für die Z-Richtung:

$$N_{\varphi} + N_{\psi} + Za = 0,$$

für die X-Richtung:

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} (N_{\varphi} \sin \varphi) - N_{\psi} \cos \varphi + \frac{\partial N_{\varphi \psi}}{\partial \psi} + Xa \sin \varphi = 0,$$

für die Y-Richtung:

$$\frac{\partial N_{\psi}}{\partial \psi} + N_{\varphi \psi} \cos \varphi + \frac{\partial}{\partial \psi} (N_{\varphi \psi} \sin \varphi) + Ya \sin \varphi = 0.$$

Diese partiellen Differentialgleichungen können in totale überführt und integriert werden<sup>3)</sup> und die Spannungen werden für Eigengewicht (konstante Schalenstärke):

Belastungen:

$$X = 0$$

(1a)

Schnittkräfte:

$$N_{\varphi} = -ga \frac{1}{1 + \cos \varphi} = -ga \cdot A_g$$

$$Y = g \sin \varphi$$

(1b)

$$N_{\psi} = -ga \left( \cos \varphi - \frac{1}{1 + \cos \varphi} \right) = -ga \cdot B_g$$

$$Z = g \cos \varphi$$

(1c)

$$N_{\varphi \psi} = 0$$

<sup>3)</sup> DISCHINGER, FR.: Handbuch für Eisenbetonbau, Bd. IV. Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin 1928.

für Schnee (konstante Belastung  $p_0$  pro Flächeneinheit der Horizontalprojektion der Schale):

Belastungen:

$$X = 0$$

Schnittkräfte:

$$(2a) \quad N_\varphi = -p_0 a \cdot 0,5 = -p_0 a \cdot A_s$$

$$Y = p_0 \sin \varphi \cos \varphi \quad (2b) \quad N_\psi = -p_0 a \frac{\cos 2\varphi}{2} = -p_0 a \cdot B_s$$

$$Z = p_0 \cos^2 \varphi \quad (2c) \quad N_{\varphi\psi} = 0$$

für Kuppelaufsatz:

$$X = Y = Z = 0$$

Gewicht des Kuppelaufsatzes =  $P$

$$p = \frac{P}{2\pi a} \quad (3a) \quad N_\varphi = -N_\psi = -p \frac{1}{\sin^2 \varphi}$$

$$(3b) \quad N_{\varphi\psi} = 0$$

Veränderliche Schalenstärke bzw. andere Eigengewichtsbelastungen:

$$\begin{aligned} \text{a) } g &= g_0 e^{c\varphi}; & Z &= g \cos \varphi \\ & & Y &= g \sin \varphi \\ & & X &= 0 \end{aligned}$$

Man erhält:

$$N_\varphi = -\frac{a g_0}{\sin^2 \varphi} \int_0^\varphi e^{c\varphi} \sin \varphi d\varphi = -\frac{g_0 a}{\sin^2 \varphi (c^2 + 1)} [(c \sin \varphi - \cos \varphi) e^{c\varphi} + 1]$$

$$N_\psi = -Z a - N_\varphi; \quad N_{\varphi\psi} = 0$$

$$\text{b) } g = g_0 \cos c\varphi$$

$$N_\varphi = -\frac{g_0 a}{\sin^2 \varphi} \int_0^\varphi \cos c\varphi \sin \varphi d\varphi = -\frac{g_0 a}{(1+c^2)\sin^2 \varphi} (1+c \sin \varphi \cos \varphi - \cos \varphi \cos c\varphi)$$

Am einfachsten werden  $g_0$  und  $C$  durch folgende Ansätze bestimmt:

$$\text{Scheitel: } \varphi = 0 \quad \text{d. h.} \quad g = g_0,$$

$$\text{bei einem mittleren Öffnungswinkel } \varphi_1: \quad g_1 = g_0 \cos c\varphi_1$$

$$\text{oder} \quad c = \frac{A r \cos \frac{g_1}{g_0}}{\varphi_1}.$$

c) Durch den Ansatz  $g = a_0 + \sum_1^n a_\nu \cos \nu \varphi$  kann auch jeder beliebige Verlauf der Eigengewichtsbelastung angenähert werden und zwar so, daß die Annäherung im Mittel die beste ist, indem eine harmonische Analyse eingeführt wird.

Für  $n = 1$  erhält man  $g = a_0 + a_1 \cos \varphi$ . Diese kann als ein Eigengewicht  $g_0 = a_0$  und eine Schneelast  $p_0 = a_1$  aufgefaßt werden und die Spannungen werden durch die Formeln (1) und (2) der Belastung  $g$  und  $p_0$  erhalten.

### 3. Heraustretende Kräfte an den Rändern einer Vierecksschale.

Die vieleckigen Kuppeln werden durch vertikale Binderscheiben begrenzt und getragen. Da die Binderscheiben nur eine Steifigkeit in der Vertikal-

ebene haben, müssen die heraustretenden Kräfte senkrecht zur Binderscheibe zu Null werden (Fig. 3).

$$N_{\delta} \cos \delta = 0$$

Indem  $\cos \delta \neq 0$ , muß längs der Binderscheibe  $N_{\delta}$  gleich Null sein und die Schale wird also nur von Schubspannungen getragen. Um diese Randbedingungen zu erfüllen, kann der Grundbelastungszustand durch solche homogene Spannungszustände überlagert werden, daß  $N_{\delta}$  am Rand annähernd zu Null wird.

$N_{\delta}$  für den Grundbelastungszustand wird am einfachsten aus den Gleichungen (1)—(3) durch eine Spannungstransformation gefunden. Der

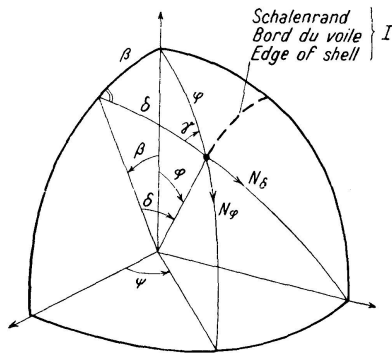


Fig. 3.

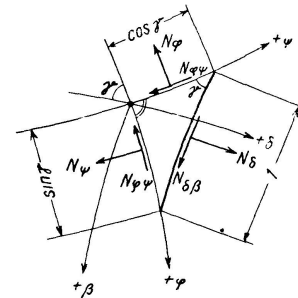


Fig. 4.

Winkel  $\gamma$  zwischen  $N_{\delta}$  und  $N_{\phi}$  (Fig. 3) wird durch das Sinusgesetz für Kugeldreiecke bestimmt:

$$\frac{\sin \gamma}{\sin \beta} = \frac{\sin 90^{\circ}}{\sin \varphi}$$

Der Fig. 3 wird weiter entnommen:

$$\sin \delta = \sin \varphi \cdot \sin \psi$$

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos \psi$$

Hieraus:

$$(4) \quad \sin \varphi = \frac{\sin \delta}{\sin \psi}$$

$$\sin \beta = \frac{\sin \delta \cdot \cos \psi}{\cos \delta \cdot \sin \psi}$$

Oben eingesetzt:

$$(5) \quad \sin \gamma = \frac{\cos \psi}{\cos \delta}$$

$\gamma$  und  $\varphi$  sind durch dieselben transzendenten Gleichungen (4) und (5) bestimmt und können der Tafel 1 entnommen werden. Als eine der unabhängig Veränderlichen haben wir  $\psi$  gewählt, was u. a. den Vorteil hat, daß  $\psi$  für Schalen mit derselben Anzahl Eckpunkten zwischen denselben Grenzen läuft und weiter sehr einfache Rechenformeln gibt.

Die heraustretenden Kräfte an den Rändern können jetzt durch Spannungstransformationen gefunden werden.

Gleichgewicht gegen Verschiebung in der  $\delta$ -Richtung gibt (Fig. 4):

$$(6) \quad N_{\delta} = N_{\psi} \sin^2 \gamma + N_{\varphi} \cos^2 \gamma + 2 N_{\varphi\psi} \sin \gamma \cos \gamma.$$

Gleichgewicht gegen Verschiebung in der  $\beta$ -Richtung:

$$(7) \quad \begin{aligned} N_{\delta\beta} &= (N_{\varphi} - N_{\psi}) \sin \gamma \cos \gamma + N_{\varphi\psi} (\sin^2 \gamma - \cos^2 \gamma) \\ &= \frac{1}{2} (N_{\varphi} - N_{\psi}) \sin 2\gamma - N_{\varphi\psi} \cos 2\gamma. \end{aligned}$$

In ähnlicher Weise wird  $N_{\beta}$  gefunden:

$$(8) \quad N_{\beta} = N_{\varphi} \sin^2 \gamma + N_{\psi} \cos^2 \gamma - 2 N_{\varphi\psi} \sin \gamma \cos \gamma.$$

Tafel 1.

Argument für  $\gamma$ . — Argument pour  $\gamma$ . — Degrees of  $\delta$  for determination of angle  $\gamma$ .

$\psi^{\circ}$ \diagdown $\delta^{\circ}$	0	10	15	20	25	30	35	40	45	
45	45°00'	45°54'	47°04'	48°48'	51°17'	54°44'	59°40'	67°24'	90°00'	45
50	40 00	40 45	41 44	43 10	45 11	47 55	51 42	57 02	65 22	40
55	35 00	35 37	36 26	37 37	39 16	41 29	44 27	48 30	54 13	35
60	30 00	30 31	31 11	32 09	33 28	35 15	37 37	40 44	45 00	30
65	25 00	25 25	25 57	26 44	27 48	29 13	31 04	33 29	36 42	25
70	20 00	20 20	20 44	21 21	22 10	23 16	24 40	26 31	28 55	20
75	15 00	15 14	15 33	15 59	16 36	17 24	18 25	19 45	21 28	15
80	10 00	10 09	10 22	10 39	11 03	11 34	12 14	13 06	14 13	10
90	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	90	80	75	70	65	60	55	50	45	$\psi^{\circ}$ \diagup $\delta^{\circ}$

Argument für  $\varphi$ . — Argument pour  $\varphi$ . — Degrees of  $\psi$  for determination of  $\varphi$ .

Für jeden Punkt  $(\psi, \delta)$  des Schalenrandes sind  $\varphi$  durch Gl. (4) und  $\gamma$  durch Gl. (5) bestimmt und können der Tafel 1 entnommen werden. Für den Grundbelastungszustand erhalten wir die heraustretenden Schnittkräfte  $N_{\delta}$ , am Schalenrand, indem wir die Ausdrücke für  $N_{\varphi}$ ,  $N_{\psi}$  und  $N_{\varphi\psi}$  aus Gl. (1)—(3) in Gl. (6) einführen. Sie werden:

für Eigengewicht:

$$(9) \quad \begin{aligned} N_{\delta_0} &= -g a [A_g \cos^2 \gamma + B_g \sin^2 \gamma] \\ &= -g a \frac{1}{1 + \cos \varphi} [\cos^2 \gamma + (\sin^2 \varphi + \cos \varphi) \sin^2 \gamma], \end{aligned}$$

für Schnee:

$$(10) \quad N_{\delta_0} = -p_0 a [0,5 - \sin^2 \varphi \sin^2 \gamma].$$

Für Schnee ist  $N_{\delta} = -p_0 a (0,5 - \sin^2 \beta)$ ; also konstant längs einem Meridiankreis durch die X- bzw. Y-Achse.

Kuppelaufsatz:

$$(11) \quad N_{\delta_0} = -p \frac{\cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma}{\sin^2 \varphi} = -p \frac{1}{\sin^2 \varphi} (2 \cos^2 \gamma - 1)$$

$N_{\delta_0}$  ist aus Tafel 2 zu entnehmen.

#### 4. Zusatzbelastungen zur Erfüllung der Randbedingungen.

Um die Randbedingungen zu erfüllen, kann die Grundbelastung durch einen Spannungszustand, der die homogenen Gleichgewichtsgleichungen befriedigt, überlagert werden.

Indem für den homogenen Fall  $X = Y = Z = 0$ , gehen die Gleichgewichtsbedingungen in folgende über:

$$(12a) \quad N_\varphi + N_\psi = 0$$

$$(12b) \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} (N_\varphi \sin \varphi) - N_\psi \cos \varphi + \frac{\partial N_{\varphi\psi}}{\partial \psi} = 0$$

$$(12c) \quad \frac{\partial N_\psi}{\partial \psi} + N_{\varphi\psi} \cos \varphi + \frac{\partial}{\partial \varphi} (N_{\varphi\psi} \sin \varphi) = 0$$

Tafel 2.

$\psi^0 \backslash \delta^0$	10	15	20	25	30	35	40	45
Eigengewicht — Poids propre — Dead weight: $N_{\delta_0} = -ga$								
45	+0,4840	0,4615	0,4249	0,3673	0,2761	0,1246	-0,1416	-1,000
50	0,4899	0,4757	0,4525	0,4162	0,3594	0,2689	+0,1186	-0,1500
60	0,4972	0,4932	0,4862	0,4746	0,4557	0,4249	0,3741	+0,2887
70	0,5012	0,5025	0,5040	0,5049	0,5047	0,5015	0,4931	0,4749
80	0,5033	0,5073	0,5130	0,5200	0,5286	0,5386	0,5494	0,5605
90	0,5038	0,5087	0,5158	0,5246	0,5359	0,5497	0,5663	0,5858
Schnee — Neige — Snow: $N_{\delta_0} = -p_0 a$								
45	0,4689	0,4282	0,3675	0,2826	0,1667	0,0097	-0,2039	-0,5000
50	0,4781	0,4494	0,4067	0,3469	0,2653	0,1547	+0,0042	-0,2039
60	0,4896	0,4761	0,4559	0,4275	0,3889	0,3366	0,2653	+0,1667
70	0,4959	0,4905	0,4824	0,4712	0,4559	0,4351	0,4067	0,3675
80	0,4991	0,4978	0,4959	0,4932	0,4896	0,4848	0,4781	0,4689
90	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000
Kuppelaufsatz — Lanterneau — Lantern: $N_{\delta_0} = -p$								
45	-0,5141	-0,5373	-0,5667	-0,6086	-0,6667	-0,7450	-0,8526	-1,000
50	2,879	1,000	0,3210	-0,0204	-0,2390	-0,4131	-0,5798	-0,7654
60	12,05	5,196	2,783	1,643	1,000	+0,5809	+0,2686	0
70	22,25	9,884	5,547	3,535	2,431	1,748	1,286	+0,9394
80	30,17	13,54	7,726	5,033	3,567	2,683	2,106	1,706
90	33,16	14,93	8,547	5,599	4,000	3,040	2,420	2,000

Aus Gl. (12 a) ist  $N_\varphi = -N_\psi$  und indem folgende harmonische Analyse eingeführt wird

$$N_\varphi = -N_\psi = N_{\varphi_n} \cos n\psi$$

$$N_{\varphi\psi} = N_{\varphi\psi_n} \sin n\psi$$

gehen die Gleichungen in zwei totale simultane Differentialgleichungen über:

$$\frac{dN_{\varphi_n}}{d\varphi} + 2N_{\varphi_n} \operatorname{ctg} \varphi + \frac{n}{\sin \varphi} N_{\varphi\psi_n} = 0$$

$$\frac{dN_{\varphi\psi_n}}{d\varphi} + 2N_{\varphi\psi_n} \operatorname{ctg} \varphi + \frac{n}{\sin \varphi} N_{\varphi_n} = 0$$

Die Lösung dieser Differentialgleichungen ist:

$$(13a) \quad N_{\varphi_n} = \frac{1}{2\sin^2 \varphi} \left( C_n \operatorname{tg}^n \frac{\varphi}{2} + D_n \operatorname{ctg}^n \frac{\varphi}{2} \right)$$

$$(13b) \quad N_{\varphi\psi n} = \frac{1}{2 \sin^2 \varphi} \left( -C_n \operatorname{tg}^n \frac{\varphi}{2} + D_n \operatorname{ctg}^n \frac{\varphi}{2} \right)$$

Die zwei Integrationskonstanten entsprechen zwei möglichen homogenen Belastungszuständen. Der Zustand  $D$  hat für  $\varphi = 0$  und  $\varphi = \pi$  einen Pol und bedeutet also Einzellasten bzw. Einzellastgruppen, eine im Punkt  $\varphi = 0$  und eine entgegengesetzt gerichtet im Punkt  $\varphi = \pi$ . Der Zustand  $C$  ist über die ganze Kugel regulär und kann durch eine äußere Randbelastungsgruppe z. B. am Äquator erzeugt werden.

Fall a) Zustand  $C$ .

Es ist:  $D = 0$

$$(14) \quad \begin{cases} N_{\varphi n} = -N_{\psi n} = -N_{\varphi\psi n} = C_n \frac{\operatorname{tg}^n \frac{\varphi}{2}}{2 \sin^2 \varphi} = C_n \frac{\sin^{n-2} \varphi}{(1 + \cos \varphi)^n} = C_n F_{\varphi n} \\ \left. \begin{array}{l} N_{\varphi} = C_n F_{\varphi n} \cos n\psi \\ N_{\psi} = -C_n F_{\varphi n} \cos n\psi \\ N_{\varphi\psi} = -C_n F_{\varphi n} \cos n\psi \end{array} \right\} \quad \text{wo } F_{\varphi n} = \frac{\sin^{n-2} \varphi}{(1 + \cos \varphi)^n}$$

Die konstanten  $C_n$  werden von den Randbedingungen des herausgeschnittenen Schalenstückes bestimmt. Bei der Ausrechnung der heraustretenden Kräfte zeigt sich der größere Vorteil der früheren Wahl der Koordinaten  $\delta$  und  $\psi$ .

Tafel 3.

$\psi \backslash \delta$	10	15	20	25	30	35	40	45
$N_{\delta_4}^a (n=4)$								
	$10^{-2}$	$10^{-2}$	$10^{-2}$	$10^{-2}$	$10^{-2}$	$10^{-2}$	$10^{-2}$	$10^{-2}$
45	+0,01263	+0,06953	+0,2504	+0,7377	+1,963	+5,110	+14,39	+100,0
50	0,06166	0,1873	0,4347	0,9361	1,946	4,040	8,613	20,24
60	0,1349	0,3278	0,6486	1,1633	1,989	3,282	5,541	9,327
70	0,1709	0,4007	0,7572	1,2795	2,038	3,106	4,662	6,932
80	0,1888	0,4374	0,8110	1,335	2,054	3,024	4,336	6,077
90	0,1944	0,4487	0,8268	1,353	2,062	3,003	4,248	5,886
$N_{\delta_8}^a (n=8)$								
	$10^{-8}$	$10^{-7}$	$10^{-6}$	$10^{-5}$	$10^{-4}$	$10^{-3}$	$10^{-2}$	$10^{-2}$
45	-3,056	-8,984	-11,09	-8,935	-5,783	-3,505	-2,427	-100,0
50	-30,75	-40,77	-28,23	-14,27	-6,091	-2,425	-0,9713	-4,526
60	-27,52	-33,47	-20,59	-8,856	-3,073	-0,9304	-0,2571	-0,6704
70	-8,162	-9,516	-5,508	-2,173	-0,6730	-0,1714	-0,03738	-0,06689
80	+6,306	+7,578	+4,586	+1,927	+0,6480	+0,1981	+0,05015	+0,1244
90	+11,39	+13,49	+7,998	+3,269	+1,064	+0,2968	+0,07458	+0,1732
$N_{\delta_{12}}^a (n=12)$								
	$10^{-11}$	$10^{-10}$	$10^{-9}$	$10^{-8}$	$10^{-7}$	$10^{-6}$	$10^{-5}$	$10^{-4}$
45	+0,7390	+11,60	+49,15	+108,2	+170,4	+240,5	+409,6	+10000,0
50	+8,014	+54,57	+122,5	+156,8	+147,4	+119,1	+93,60	+89,07
60	+1,403	+8,497	+16,08	+16,11	+10,65	+5,055	+1,600	+0
70	-1,183	-7,359	-14,46	-15,39	-11,38	-6,421	-2,904	-1,344
80	-0,1313	-0,7643	-1,378	-1,289	-0,7840	-0,3430	-0,1071	-0,0176
90	+0,6677	+4,055	+7,738	+7,900	+5,485	+2,932	+1,309	+0,5098



Wir erhalten nach den Gl. (6) und (14)

$$\begin{aligned} N_{\delta}^a &= C_n F_{\varphi_n} [(\cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma) \cos n\psi - 2 \sin \gamma \cos \gamma \sin n\psi] \\ (15a) \quad N_{\delta}^a &= C_n F_{\varphi_n} \cos(2\gamma + n\psi) = C_n N_{\delta_n}^a \\ N_{\delta_n}^a &\text{ wird der Tafel 3 entnommen.} \end{aligned}$$

In ähnlicher Weise erhalten wir:

$$(15b) \quad N_{\beta} = -C_n F_{\varphi_n} \cos(2\gamma + n\psi)$$

$$(15c) \quad N_{\beta\delta} = C_n F_{\varphi_n} \sin(2\gamma + n\psi)$$

Diese Spannungen können durch äußere Kräfte am Äquator von der Form  $N_{\varphi} = C_n \cos n\psi$ ;  $N_{\varphi\psi} = C_n \sin n\psi$  erzeugt werden, indem  $F_{\varphi_n} = 1$  für  $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$$F_{\varphi_n} = \frac{\sin^{n-2} \varphi}{(1 + \cos \varphi)^n}$$

ist der Abklingungsfaktor. Er ist für  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  gleich 1 und klingt bei abnehmendem  $\varphi$  sehr schnell ab und ist für  $\varphi = 0$  gleich Null.

Bilden die äußeren Kräfte am Äquator eine Gleichgewichtsgruppe und ist  $n = 4, 8, 12, \dots$ , so werden bei einer viereckigen Schale die Spannungen von derselben Symmetrie, wie die rotationssymmetrischen Grundbelastungszustände für Eigengewicht, Schnee und Kuppelaufsatz.

Zur Erfüllung der Randbedingungen einer viereckigen Schale für Eigengewicht, Schnee und Kuppelaufsatz stehen also die homogenen Spannungszustände für  $n = 4, 8, 12, \dots$  zur Verfügung und die Aufgabe wird sein, eine möglichst gute Annäherung der Bedingung  $\Sigma N_{\delta} = 0$  zu finden. Der homogene Spannungszustand

$$N_{\delta}^a = \sum_{n=4,8,12,\dots} C_n F_{\varphi_n} \cos(2\gamma + n\psi)$$

wo  $\gamma = \arcsin \frac{\cos \psi}{\cos \delta}$ , ist, wie man sieht, keine Fourierreihe und eine beliebig genaue Annäherung der Randbedingungen ist durch Zufügung immer neuer Glieder nicht möglich.

Fall b) Zustand  $C = D$ .

Um eine bessere Erfüllung der Randbedingungen zu erzeugen, kann die Schale im homogenen Zustand in verschiedener Weise aus der Kugel herausgeschnitten werden, und zwar immer so, daß dieselbe Symmetrie der Schnittkräfte wie die des Grundbelastungszustandes erreicht wird. Bei den Polen ist Fall a) (Fig. 5) die einzige Möglichkeit. Beim Äquator bestehen mehrere Möglichkeiten, wie in Fig. 5 angedeutet. Um die notwendige Symmetrie der Spannungen zu erreichen, müssen die beim Äquator herausgeschnittenen Schalen um  $90^\circ$  gegeneinander gedreht und überlagert werden. Der homogene Spannungszustand muß beim Fall b) und c) durch äußere Kräfte außerhalb des Äquator erzeugt werden und aus Symmetriegründen des Grundbelastungszustandes und des äußeren Gleichgewichtes halber müssen die erregenden Kräfte symmetrisch zum Äquator sein, d. h. für  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  muß  $N_{\varphi\psi} \equiv 0$  sein. Dies ergibt  $C_n = D_n = d_n$  und die Schnittkräfte werden:

$$(16a) \quad N_{\varphi n} = \frac{d_n}{2 \sin^2 \varphi} \left( \operatorname{ctg}^n \frac{\varphi}{2} + \operatorname{tg}^n \frac{\varphi}{2} \right) = d_n \frac{(1 + \cos \varphi)^n + (1 - \cos \varphi)^n}{2 \sin^{n+2} \varphi}$$

$$(16b) \quad N_{\varphi \psi n} = \frac{d_n}{2 \sin^2 \varphi} \left( \operatorname{ctg}^n \frac{\varphi}{2} - \operatorname{tg}^n \frac{\varphi}{2} \right) = d_n \frac{(1 + \cos \varphi)^n - (1 - \cos \varphi)^n}{2 \sin^{n+2} \varphi}$$

Bei den Fällen b) und c) (Fig. 5) hängt die Symmetrie der Spannungen nicht von  $n$ , sondern von der Herausschneidungs- und Überlagerungsweise ab.

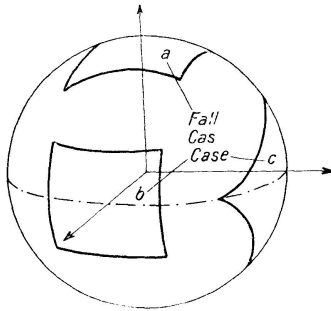


Fig. 5.

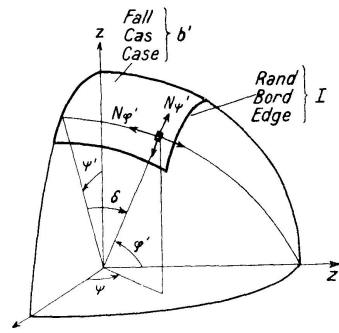


Fig. 6.

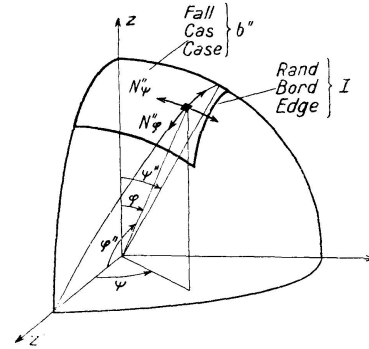


Fig. 7.

Für Eigengewicht, Schnee und Kuppelaufsatz genügt es, den Fall b) heranzuziehen und zwar nur für  $n = 1$ , indem  $n = 0$  ziemlich genau dieselben Randspannungen wie Fall a) für  $n = 4$  ergibt. Mit der  $Z'$ -Axe als Bezugsaxe (Fig. 6) wird nach Gl. (16) für Fall b') ( $n = 1$ )

$$N_{\varphi'} = -N_{\psi'} = N'_{\varphi n} \cos n \psi' = \frac{d_1}{\sin^3 \varphi'} \cos \psi',$$

$$N'_{\varphi \psi} = N'_{\varphi \psi n} \sin n \psi' = \frac{d_1}{\sin^3 \varphi'} \sin \psi'.$$

Da durch diesen Spannungszustand der Fall a) überlagert werden soll, müssen sie auf eine gemeinsame Koordinatenaxe bezogen werden. Als solche wählen wir die  $Z$ -Axe und aus Fig. 6 und 3 ergibt sich

$$\delta = \frac{\pi}{2} - \varphi'$$

$$\beta = \psi'_1$$

Die Spannungen  $N_\delta$  am Rand  $I$  des  $Z$ -Axensystems werden gleich den Spannungen  $N_{\varphi'}$  des  $Z'$ -Axensystems.

Um dieselben heraustretenden Spannungen an allen Rändern zu erhalten, muß noch ein Fall b'') nach Fig. 7 zugezählt werden.

Die Spannungen längs des Randes  $I$  sind hier  $N_{\varphi''}$ ,  $N_{\psi''}$  und  $N_{\varphi \psi''}$  und die Spannungstransformation wird dieselbe wie für Fall a).

Wir erhalten:

$$N_{\delta''} = - \frac{d_1}{(1 - \sin^2 \delta \operatorname{ctg}^2 \varphi)^2} \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \delta}{\sin^2 \psi}} = - \frac{d_1 k}{(\sin^2 \delta + k^2)^2}$$

wo  $k^2 = 1 - \frac{\sin^2 \delta}{\sin^2 \psi}$

Durch Überlagerung dieser zwei Fälle b') und b'') ergibt sich:

$$(17a) \quad N_{\delta}^b = -N_{\beta}^b = d_1 k \left[ \frac{1}{\cos^4 \delta} - \frac{1}{(\sin^2 \delta + k^2)^2} \right]$$

$$(17b) \quad N_{\delta\beta}^b = -d_1 \sin^2 \delta \operatorname{ctg} \psi \left[ \frac{1}{\cos^4 \delta} - \frac{1}{\sin^2 \delta + k^2} \right]$$

Die Normalspannungen  $N_{\delta}^b$  an den Rändern können der Tafel 4 entnommen werden. Die Spannungen  $N_{\varphi}$ ,  $N_{\psi}$  und  $N_{\varphi\psi}$  der Schale können mittels den Transformationsgleichungen in geschlossenen Formeln mit  $\psi$  und  $\delta$  als unabhängige Veränderliche abgegeben werden, aber ähnlich wie sich die einfachste Rechnung für Fall a) durch Auflösung der transzendenten Gleichungen (4) und (5) ergab, so auch hier. Man erhält  $\gamma$  aus Gl. (5) und  $N_{\varphi}$ ,  $N_{\psi}$  und  $N_{\varphi\psi}$  aus Gl. (6) bis (8), indem man  $\delta$  und  $\beta$  mit  $\varphi$  und  $\psi$  vertauscht. (Vgl. Tafel 1.)

$$(18a) \quad N_{\varphi} = -N_{\psi} = N_{\delta} \cos 2\gamma + N_{\beta\delta} \sin 2\gamma$$

$$(18b) \quad N_{\varphi\psi} = N_{\delta} \sin 2\gamma - N_{\beta\delta} \cos 2\gamma$$

Nach der Bestimmung der Integrationskonstanten  $d_1$  wird  $N_{\delta}$  und  $N_{\beta\delta}$  mittels Gl. (17) ausgerechnet und in Gl. (18) eingeführt und die verschiedenen Belastungsfälle können summiert werden.

Tafel 4.

$\psi^{\circ} \backslash \delta^{\circ}$	10	15	20	25	30	35	40	45
$N_{\delta}^b (n=1)$								
45	0	0	0	0	0	0	0	0
50	0,0187	0,0444	0,0852	0,145	0,228	0,348	0,495	0,600
60	0,0418	0,098	0,1833	0,307	0,480	0,718	1,043	1,478
70	0,0540	0,1260	0,234	0,387	0,600	0,891	1,302	1,880
80	0,0602	0,1393	0,258	0,426	0,658	0,976	1,420	2,067
90	0,0620	0,1437	0,266	0,437	0,674	1,000	1,458	2,121

### 5. Die Randbedingungen der Schale.

Die Schale wird durch Randglieder getragen, die nur in ihrer Vertikalenebene Kräfte aufnehmen können. Wie früher gezeigt, ist diese Bedingung durch

$$(19) \quad \Sigma N_{\delta} = 0,$$

wo  $\Sigma$  die Summe der Grundbelastungs- und Zusatzbelastungszustände bedeutet, ausgedrückt. Diese Gleichung dient zur Bestimmung der Integrationskonstanten der Gleichungen (13). Die Bedingungen der freien horizontalen Ausweitung der Binderscheiben sind gewöhnlich gut erfüllt, während die Forderung derselben Spannungen der oberen Faser im Randglied und Schalenrand selbstverständlich nicht für alle Belastungszustände zutreffen kann. Der Unterschied in den Spannungen, d. h. in den Deformationen löst am Schalenrand eine Biegewelle aus, die doch nach dem St. VENANT'schen Prinzip sehr schnell abklingt und von wenig Bedeutung wird, wenn der Unterschied der Spannungen in der Schale und im Randglied für die durchschnittliche Belastung möglichst klein gemacht wird.

### 5a) Bestimmung der Integrationskonstanten.

Das einfachste Verfahren zur Bestimmung der Integrationskonstanten ist, die Gl.  $\sum N_\delta = 0$  in einzelnen beliebig gewählten Punkten zur Erfüllung zu bringen und zwar in ebenso vielen Punkten wie Zusatzbelastungen herangezogen werden. Man erhält dadurch ebenso viele Gleichungen wie unbekannte Integrationskonstanten, aber die Bestimmung wird erstens ein wenig zufällig und zweitens besteht die Gefahr, eine Zusatzbelastung heranzuziehen, die zwar die Gl. (19) in einem neuen Punkt zur Erfüllung bringt, aber die durchschnittliche Übereinstimmung nicht verbessert. Dies kann bei Fall a) für kleine und große Öffnungswinkel leicht passieren. Wie schon früher erwähnt, stellt für den Fall a):

$$N_\delta^a = \sum_{n=4,8,\dots} C_n F_{\varphi_n} \cos(2\gamma + n\psi)$$

keine Fourierreihe dar und eine beliebige Annäherung an eine gegebene Funktion ist hierdurch nicht möglich. Bei kleinen Öffnungswinkeln ( $\delta \rightarrow 0$ ) wird für die Eckpunkte  $\psi = 45^\circ$ ,  $\gamma \approx \psi$  und:

$$N_\delta \approx \sum_{n=4,8,\dots} C_n F_{\varphi_n} \cos(2 + n) 45^\circ = 0$$

Es bestehen also hier durch diesen Ansatz für kleine Öffnungswinkel Schwierigkeiten bei Erfüllung der Randbedingungen in den Ecken (Fall c für  $n = 1$  muß hier herangezogen werden). Bei großen Öffnungswinkeln ( $\delta \rightarrow 45^\circ$ ) wird in der Nähe des Eckpunktes  $\gamma \approx 90^\circ = 2\psi$

$$N_\delta \approx \sum C_n F_{\varphi_n} \cos(n + 4) 45^\circ = \sum C_n F_{\varphi_n}$$

Indem  $\cos(2\gamma + n\psi) \leq 1$ , kann als Abschätzung gesetzt werden

$$N_\delta \leq \sum C_n F_{\varphi_n}$$

Da bei wachsendem  $n$ ,  $F_{\varphi_n}$  sehr schnell längs des Randes abklingt, werden für zunehmendes  $n$  nur Kräfte in der Ecke übrig und man kann nur Ausgleich der Randkräfte in der Nähe der Ecke erwarten<sup>4)</sup>. Durch Probieren können wir bei Heranziehen verschiedener Zusatzbelastungen als Maß für die Güte der Annäherung den mittleren Fehler

$$m = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{m}} \quad \text{wo } [\varepsilon\varepsilon]$$

die Summe der Quadrate von  $\varepsilon = 0 - \sum N_\delta = -\sum N_\delta$  in  $m$  ausgewählten Punkten z. B. für  $\psi = 50^\circ, 60^\circ, \dots$  usw. ansehen. Für einfache Fälle wird dieses Verfahren zum zufriedenstellenden Ausgleich führen, aber in verwickelten Fällen, wo man vorher nicht genau weiß, welche Zusatzbelastungen und wie viele herangezogen werden müssen, gibt das Probiervorgehen viel Rechenarbeit. Hier wird es einfacher, von dem Ansatz  $[\varepsilon\varepsilon] = \text{Min}$  auszugehen und die im Mittel beste Annäherung zu suchen. Wir haben:

$$(20) \quad [\varepsilon\varepsilon] = J = \int (N_{\delta_0} - \sum N_{\delta_i})^2 ds = \text{Min}$$

Hier ist:  $N_{\delta_0} =$  Randspannung des Grundbelastungszustandes

$N_{\delta_i} = C_i N_{\delta_i} =$  Randspannung des Zusatzbelastungszustandes.

<sup>4)</sup> Erzwingt man durch die Wahl von  $C_n$  einen Ausgleich der Spannungen  $N_\delta$  am Rand außerhalb der Ecke, so treten in der Ecke große  $N_\delta$  auf. Diese Erscheinung, die also von der Wahl der Zusatzbelastung abhängt, kann durch Zufügung anderer Zusatzbelastungen beseitigt werden.

Für unsere Zwecke ersetzen wir das Integrationszeichen durch das Summenzeichen und indem wir für  $s$  Schalenelemente mit Hilfe von  $r$  Zusatzbelastungen die beste Annäherung suchen, erhalten wir

$$J = \sum_1^s (N_{\delta_0} - \sum_1^r C_i N_{\delta_i})^2 \Delta s = \text{Min}$$

Eingeführt wird  $C_i = \alpha_i + x_i$ , wo  $\alpha_i$  angenäherte Werte sind, die z. B. durch

$$N_{\delta_0} - \sum_1^r N_{\delta_i} \cdot \alpha_i = 0$$

für  $r$  beliebige Randpunkte bestimmt werden.

Durch Einsetzen erhalten wir:

$$J = \sum_1^s (N_{\delta_0} - \sum_1^r \alpha_i \cdot N_{\delta_i} - \sum_1^r x_i N_{\delta_i})^2 \Delta s = \text{Min}$$

Weiter wird gesetzt:

$$\sum \alpha_i N_{\delta_i} - N_{\delta_0} = \varepsilon$$

$$J = - \sum_1^s (\varepsilon + \sum_1^r x_i N_{\delta_i})^2 \Delta s$$

$J_{min}$  ist bestimmt durch

$$\frac{\partial J}{\partial x_n} = 0$$

wodurch man  $r$  Gleichungen zur Bestimmung von  $x_1, x_2, \dots, x_r$  erhält. Durch Differentiation:

$$- 2 \sum_1^s (\varepsilon + \sum_1^r x_i N_{\delta_i}) N_{\delta_n} \Delta s = 0$$

oder:

$$(21) \quad \sum_1^r x_i \sum_1^s N_{\delta_n} N_{\delta_i} \Delta s + \sum_1^s N_{\delta_n} \varepsilon \Delta s = 0$$

$\sum_1^s$  wird durch [ ] ersetzt und wir erhalten z. B. für  $r = 2$ :

$$x_1 [N_{\delta_1} N_{\delta_1} \Delta s] + x_2 [N_{\delta_1} N_{\delta_2} \Delta s] + [N_{\delta_1} \varepsilon \Delta s] = 0$$

$$x_1 [N_{\delta_2} N_{\delta_1} \Delta s] + x_2 [N_{\delta_2} N_{\delta_2} \Delta s] + [N_{\delta_2} \varepsilon \Delta s] = 0$$

$\Delta s$  kann als Gewicht aufgefaßt werden und es genügt, die Werte zeichnerisch zu bestimmen.

Es ist weiter über die Genauigkeit der Spannungsbestimmung zu bemerken, daß der maximale Wert von  $\varepsilon$  auch die maximale Abweichung der Schalenspannungen von den theoretischen Richtungen angibt.

## 6. Gleichgewicht des Membranzustandes für die Eckpunkte.

Für ein beliebiges Schalenelement gibt die Gleichgewichtsbedingung in der  $Z$ -Richtung

$$N_\varphi + N_\psi + Z a = 0$$

oder

$$N_\beta + N_\delta + Z a = 0$$

Längs des Randes ist  $N_\delta = 0$  also

$$N_\beta = -Za.$$

In dem Eckpunkt ist  $N_\beta \neq 0$ , was keineswegs in Widerspruch zu den Randbedingungen des benachbarten Randes steht, da  $N_\beta$  nicht senkrecht auf dem Rand steht und keine heraustretende Kraft, sondern eine Schnittkraft ist. Als ein analoges Beispiel der zweidimensionalen Statik können wir die nur durch äußere, gleichmäßig verteilte Schubkräfte  $p$  beanspruchte Rechteckplatte betrachten. Die Hauptnormalspannungen sind:

$$\begin{aligned} N_z &= -N_y = p \\ N_{xy} &= 0 \end{aligned}$$

und die Spannungen sind sowohl an den Rändern wie im Innern durch die Transformationsgleichungen oder den MOHR'schen Kreis verbunden und am Rand verschwinden nur Spannungen, die normal zum Rande sind, nicht dagegen  $N_x$  und  $N_y$ .

Es muß in ähnlicher Weise für eine Schale im Membranzustand auch in den Ecken die Spannung im Gleichgewicht sein, was nachfolgend durch ein Beispiel beleuchtet werden soll.

Aus den Randbedingungen erhält man für rotationssymmetrische Belastung durch Betrachtung einer Ecke (Fig. 8) mit den Koordinaten  $\varphi = \varphi_0$ ,  $\psi = 45^\circ$  für Verschiebung in der  $\varphi$ -Richtung mit  $N_{\varphi\psi}^{max} = T$

$$2 Ta d\varphi \sqrt{1 + \cos^2 \varphi} \sin \gamma_0 - N_\varphi 2a d\varphi \cos \varphi_0 = 0$$

$$\text{Hier ist: } \sin \gamma_0 = \frac{\cos 45^\circ}{\cos \delta} = \frac{1}{\sqrt{1 + \cos^2 \varphi_0}}$$

Durch Einsetzen und Umformung:

$$(22) \quad T = N_\varphi \cos \varphi_0$$

oder:

$$N_\varphi = \frac{T}{\cos \varphi_0}$$

$$N_\psi = -Za - \frac{T}{\cos \varphi_0}$$

Verschiebung in Richtung  $\beta$  gibt (Fig. 8):

$$(N_\beta - N_\psi) \cos \gamma_0 = T \cdot \sin \gamma_0$$

Hier ist  $N_\beta = -Za$ , also ist obenstehende Gleichung erfüllt, indem

$$\cos \gamma_0 = \frac{\cos \varphi_0}{\sqrt{1 + \cos^2 \varphi_0}}$$

$$\sin \gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{1 + \cos^2 \varphi_0}}$$

Wir wollen auch das Gleichgewicht der Ecke an einem Beispiel nachweisen.

**Beispiel:**

$\delta = 30^\circ$ , Belastung  $X = Y = 0$ ,  $Z = \text{konstant}$ .

Grundbelastungszustand:  $N_\varphi = N_\psi$ ,  $N_{\varphi\psi} = 0$

$$N_\varphi = -\frac{Za}{2}$$

$$N_\delta = -\frac{Za}{2} (\cos^2 \gamma + \sin^2 \gamma) = -\frac{Za}{2}$$

$$N_{\delta\beta} = 0$$

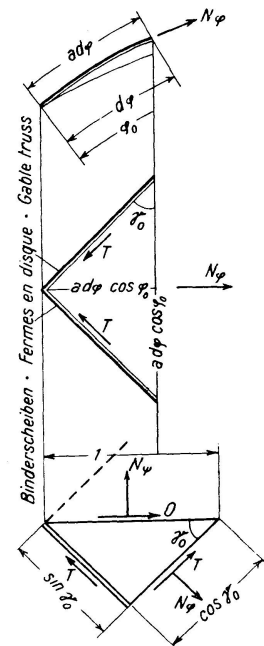


Fig. 8.

Wir erhalten einen genügend genauen Ausgleich durch die Zusatzbelastungen Fall a) und zwar mit

$$C_4 = 50 \frac{Za}{2}, \quad 3\% \text{ max. Abweichung der Spannungen.}$$

Mit 
$$\begin{cases} C_4 = 48,9 \frac{Za}{2} \\ C_8 = -80 \frac{Za}{2} \end{cases} \quad \text{erhält man } 6\% \text{ max. Abweichungen}$$

und 3‰ mittl. Fehler, d. h. kleiner als der des Rechenschiebers. Der mittlere Fehler der Zusatzbelastung Fall a) mit  $C_4 = 50 \frac{Za}{2}$  ist  $\sim 2,5\%$  und es wird nachstehend der Ausgleich mit dieser Zusatzbelastung durchgeführt. Für den Rand ist:

$$N_\delta = -\frac{Za}{2} + 50 \frac{Za}{2} F_{\varphi_4} \cos(2\gamma + 4\psi)$$

$$N_\beta = -\frac{Za}{2} - 50 \frac{Za}{2} F_{\varphi_4} \cos(2\gamma + 4\psi)$$

$$N_{\beta\delta} = 50 \frac{Za}{2} F_{\varphi_4} \sin(2\gamma + 4\psi)$$

Tafel 5.

Randspannungen ( $\delta = 30^\circ$ ,  $\psi = 45^\circ - 90^\circ$ )

$\psi$	$2\gamma$	$F_{\varphi_4}$	$N_\delta$	$N_\beta$	$N_{\delta\beta}$
45°	109° 28'	0,0589	-0,02	-1,98	-2,78
50°	95° 50'	0,0447	-0,03	-1,97	-2,01
60°	70° 30'	0,0306	-0,01	-2,00	-1,32
70°	46° 32'	0,0244	+0,02	-2,02	-0,65
80°	23° 08'	0,0216	+0,03	-2,03	-0,31
90°	0	0,0206	+0,03	-2,03	0
Multiplikator			$\frac{Za}{2}$	$\frac{Za}{2}$	$\frac{Za}{2}$

Diese Schnittkräfte sind in Tafel 5 ausgerechnet.

Die Schnittkräfte sind im Schnitt:

$\psi = 0^\circ$  ( $90^\circ$ ):

$$N_\varphi = -\frac{Za}{2} + 50 \frac{Za}{2} F_{\varphi_4}$$

$$N_\psi = -\frac{Za}{2} - 50 \frac{Za}{2} F_{\varphi_4}$$

$$N_{\varphi\psi} = 0$$

Tafel 6.

Schnittkräfte in Schnitt  $\psi = 0^\circ$  und  $\psi = 45^\circ$

$\varphi$	$F_{\varphi_4}$	$\psi = 0^\circ$ ( $90^\circ$ )		$\psi = 45^\circ$	
		$N_\varphi$	$N_\psi$	$N_\varphi$	$N_\psi$
0	0	-1,00	-1,00	-1,00	-1,00
10	$0,19 \cdot 10^{-2}$	-0,91	-1,09	-1,09	-0,91
20	0,83 "	-0,58	-1,42	-1,42	-0,58
30	2,06 "	+0,03	-2,03	-2,03	+0,03
40	4,25 "			-3,12	+1,12
45	$5,89 \cdot 10^{-2}$			-3,94	+1,94
Multiplikator		$\frac{Za}{2}$	$\frac{Za}{2}$	$\frac{Za}{2}$	$\frac{Za}{2}$

$\psi = 45^\circ$ :

$$N_\varphi = -\frac{Za}{2} - 50 \frac{Za}{2} F_{\varphi_4}$$

$$N_\psi = -\frac{Za}{2} + 50 \frac{Za}{2} F_{\varphi_4}$$

Diese Schnittkräfte sind in Tafel 6 ausgerechnet.

Für die Eckpunkte: Nach Tafel 5 ist:  $N_{\beta} \approx -Za$

Aus Tafel 6:  $N_{\varphi} + N_{\psi} = (-3,94 + 1,94) \frac{Za}{2} = -Za$

Es ist für die Ecke:  $\varphi_0 = 45^{\circ}$

Nach Gl. (22) ist:  $T = N_{\delta\beta} = N_{\varphi} \cos \varphi_0 = -3,94 \cdot 0,707 \frac{Za}{2} = -2,78 \frac{Za}{2}$

was mit dem in Tafel 5 ausgerechneten Wert der Schubspannung  $N_{\delta\beta}$  für den Eckpunkt  $\psi = 45^{\circ}$  übereinstimmt. Es tritt also in der Ecke keine Art Unstetigkeiten auf.

In Fig. 9 ist das Ergebnis bei Ausgleich am Rand mittels verschiedener Zusatzbelastungen für eine Schale mit  $\delta = 25^{\circ}$  und mit Eigengewicht belastet angegeben. Die Wichtigkeit einer richtigen Wahl der Zusatzbelastungen geht hier deutlich hervor.

In Tafel 7 sind für die häufigst vorkommenden Schalen und Belastungsfälle die Integrationskonstanten angegeben, die in einfachster Weise die Randbedingungen befriedigen.

### 7. Vieleckige Kuppeln.

Was über viereckige Kuppeln gesagt ist, gilt auch für vieleckige. Der einzige Unterschied ist nur, daß  $\psi$  zwischen anderen Grenzen schwankt und für die Zusatzbelastung Fall a) andere  $n$  gewählt werden müssen, um die Symmetrie des Grundbelastungszustandes zu erreichen. Es wird z. B. für:

6-Eck:

$$\psi = 0 \rightarrow 30^{\circ} \text{ bzw.}$$

$$\psi = 60^{\circ} \rightarrow 90^{\circ}$$

$$\delta = 0 \rightarrow 60^{\circ}$$

Fall a:  $n = 6, 12, 18 \dots$

8-Eck:

$$\psi = 0 \rightarrow 22 \frac{1}{2}^{\circ} \text{ bzw. } \psi = 67 \frac{1}{2}^{\circ} \rightarrow 90^{\circ}$$

$$\delta = 0 \rightarrow 67 \frac{1}{2}^{\circ}$$

Fall a:  $n = 8, 16, 24 \dots$

Daß Fall a) zur Erfüllung der Randbedingungen bei bestimmten Öffnungswinkeln ungenügend ist, zeigt sich bei sechseckigen Kuppeln noch

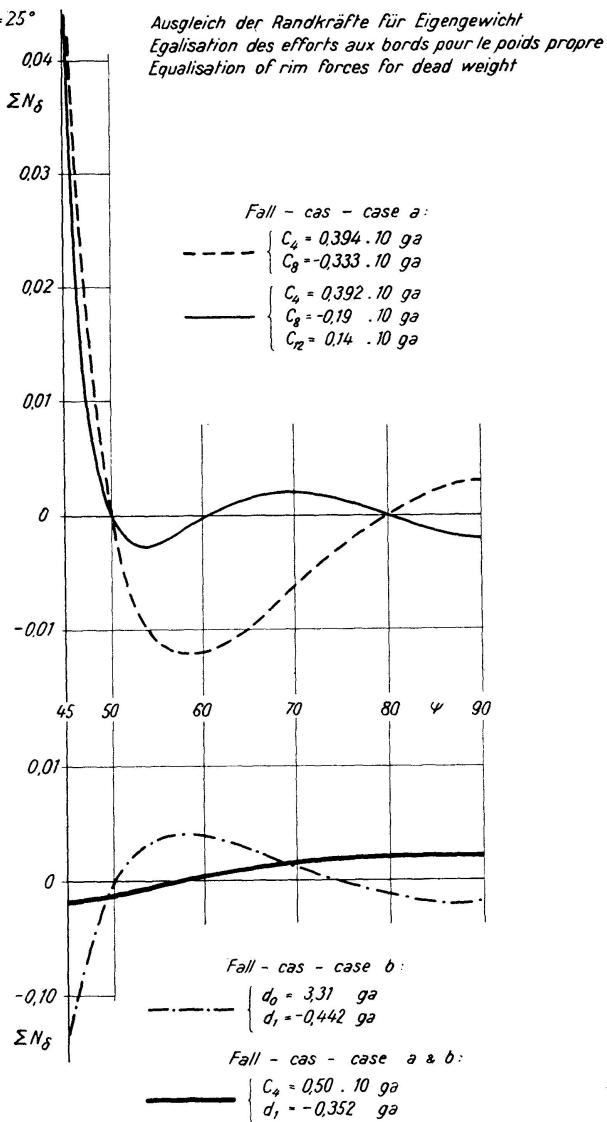


Fig. 9.



deutlicher als bei viereckigen. Es ist wie vorher für Zusatzbelastung Fall a):

$$N_{\delta} = C_n F_{\varphi_n} \cos(2\gamma + n\psi)$$

Hier ist  $\gamma$  derselbe Winkel wie früher

$$\sin \gamma = \frac{\cos \psi}{\cos \delta}$$

Für den Eckpunkt ( $\psi = 60^\circ$ ) ist  $n\psi = 360^\circ$  oder ein Vielfaches von  $2\pi$ , also  $\cos(2\gamma + n\psi) = \cos 2\gamma$ . Für  $2\gamma = 90^\circ$ , d. h.  $\gamma = 45^\circ$  und  $\delta = 45^\circ$

Tafel 7.

Integr.- constant.	$\delta^\circ$	15	20	25	30	35	40
	Multiplic.	Eigengewicht — Poids propre — Dead weight					
$c_4$	$g a \cdot$	658	170	50,0	14,07	2,60	- 1,05
$d_1$	$g a \cdot$	- 17,0	- 3,35	- 0,352	+ 0,364	0,472	0,419
		Schneelast — Neige — Snow					
$c_4$	$p_0 a \cdot$	608	146	37,2	7,80	- 0,61	
$d_1$	$p_0 a \cdot$	- 15,55	- 2,65	- 0,01	0,498	0,517	
		Schneelast — Neige — Snow					
$c_4$	$p_0 a \cdot$		147,7	39,0	9,72	4,53	- 10,0
$c_8$	$p_0 a \cdot$		225	60	41,7	63,3	50,8
$d_1$	$p_0 a \cdot$		- 2,72	- 0,066	0,433	0,344	0,661

Tafel 8.

$\psi \backslash \delta$	Grundbelastungszustand Charge de base Basic load				Zusatzbelastung Fall a Charge supplémentaire cas a Additional load case a			
	30	35	40	45	30	35	40	45
	Eigengewicht — Poids propre — Dead weight: $- g a \cdot$				$N_{\delta_6} (n = 6)$			
					$10^{-3}$	$10^{-3}$	$10^{-3}$	$10^{-3}$
60	0,4557	0,4249	0,3741	0,2887	1,0325	1,7135	2,076	0
70	0,5047	0,5015	0,4931	0,4749	- 0,5736	- 1,386	- 3,203	- 7,195
80	0,5286	0,5386	0,5494	0,5605	- 1,277	- 2,636	- 5,117	- 9,517
90	0,5359	0,5497	0,5663	0,5858	- 1,481	- 2,985	- 5,629	- 10,10
	Schnee — Neige — Snow: $- p_0 a \cdot$				$N_{\delta_{12}} (n = 12)$			
					$10^{-7}$	$10^{-6}$	$10^{-5}$	$10^{-4}$
60	0,3889	0,3366	0,2653	0,1667	10,65	5,055	1,600	0
70	0,4559	0,4351	0,4067	0,3675	- 11,38	- 6,421	- 2,904	- 1,344
80	0,4896	0,4848	0,4781	0,4689	- 0,7840	- 0,343	- 0,1071	- 0,0176
90	0,5000	0,5000	0,5000	0,5000	5,485	2,932	1,309	0,5098
	Kuppelaufsatz — Lanterneau — Lantern: $- p \cdot$				$N_{\delta_{18}} (n = 18)$			
					$10^{-10}$	$10^{-9}$	$10^{-8}$	$10^{-7}$
60	1,000	0,5809	0,2686	0	10,97	14,91	12,33	0
70	2,431	1,748	1,286	0,9394	- 4,517	- 6,644	- 7,388	- 6,246
80	3,567	2,683	2,106	1,706	2,483	3,557	3,801	4,098
90	4,000	3,040	2,420	2,000	- 2,031	- 2,880	- 3,045	- 2,574

wird  $N_\delta = 0$  für jeden Wert von  $n$  ( $n = 6, 12, 18, \dots$ ) und da  $N_\delta$  sowohl für Eigengewicht als auch Schnee  $\neq 0$  ist, müssen andere Zusatzbelastungen herangezogen werden.

6-Eck: Für die Grundbelastung erhalten wir die Normalkräfte am Schalenrand aus Tafel 8 und zwar für  $\psi = 60^\circ, 70^\circ, 80^\circ, 90^\circ$ . ( $60^\circ =$  Eckpunkt.)

Die Zusatzbelastung Fall a) gibt folgende Spannungen in der Schale:

$$N_\varphi = -N_\psi = C_n F_{\varphi n} \cos n\psi,$$

$$N_{\varphi\psi} = C_n F_{\varphi n} \sin n\psi,$$

und am Schalenrand die Normalspannungen

$$N_\delta = C_n F_{\varphi n} \cos(2\gamma + n\psi) \quad \text{wo } F_{\varphi n} = \frac{\sin^{n-2}\varphi}{(1 + \cos\varphi)^n}$$

$$= C_n N_{\delta n}$$

$$\gamma \text{ wird aus Tafel 1 entnommen; } \begin{cases} \psi = 60^\circ \rightarrow 90^\circ \\ n = 6, 12, 18 \dots \end{cases}$$

$N_{\delta n}$  wird der Tafel 8 entnommen.

Die übrigen Zusatzbelastungen, die eine dreimalige Überlagerung erfordern, ergeben sich, wie für das Viereck gezeigt, und der Rechnungsgang soll hier nicht wiederholt werden.

### Zusammenfassung.

Es wird der Membranspannungszustand vier- und vieleckiger Kugelschalen untersucht und für das praktische Rechnen werden Tafeln ausgearbeitet.

### Résumé.

L'auteur étudie dans ce mémoire l'état de tension dans les coupoles minces à plan rectangulaire et polygonal. Il donne une série de tableaux pour le calcul pratique de ces ouvrages.

### Summary.

In this paper the author examines the conditions of stress in thin shells of rectangular or polygonal plan and gives a series of tables for the design of such structures.

Leere Seite  
Blank page  
Page vide