

**Zeitschrift:** Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles  
**Herausgeber:** Société Vaudoise des Sciences Naturelles  
**Band:** 17 (1880-1881)  
**Heft:** 85

**Artikel:** Théorie mathématique du prix des terres et de leur rachat par l'état  
**Autor:** Walras, Léon  
**Kapitel:** IV: Du rachat des terres par l'état : formule d'amortissement du prix d'achat au moyen fermage  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-259354>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 29.03.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

17. Si l'on exprime géométriquement ces derniers résultats, on en tire les indications suivantes concernant la forme des courbes.

La courbe AM, à partir d'un point qui a pour ordonnée

$$k = 10 - \frac{\log \frac{0.05}{0.04}}{\log \frac{1.05}{1.04}} = -13.31, \text{ la courbe } A'M', \text{ à partir d'un}$$

$$\text{point qui a pour ordonnée } k = 10 - \frac{\log \frac{0.01}{0.04}}{\log \frac{1.01}{1.04}} = -37.36, \text{ la}$$

courbe A''M'', à partir d'un point qui a pour ordonnée

$$k = 10 - \frac{1.04}{0.04} = -16, \text{ sont concaves par rapport à l'axe}$$

horizontal. Les points M, M', M'' sont des points de maximum.

La courbe A''M'' est toujours convexe. Le point M'' est un point de minimum.

Les courbes A<sup>iv</sup>M<sup>iv</sup>, A<sup>v</sup>M<sup>v</sup> sont toujours convexes.

#### IV

*Du rachat des terres par l'Etat. Formule d'amortissement du prix d'achat au moyen du fermage.*

18. Dans nos sociétés modernes qui sont, au point de vue économique, des sociétés progressives, c'est-à-dire qui sont des sociétés où le capital s'accroît et où la population augmente, et dans lesquelles il y a plus-value de la rente, le prix des terres est supérieur au rapport du fermage au taux du revenu net et est, en outre, toujours croissant. Par con-

séquent, ce prix est celui non-seulement de la rente actuelle, mais de la rente future. J. Mill a donc tort de refuser et Gossen a donc raison d'accorder aux propriétaires un droit de propriété sur la plus-value de la rente qu'ils ont payée en achetant les terres. La seule chose qu'on pourrait leur contester serait le droit à une plus-value nouvelle qui viendrait s'ajouter à la première. Voilà un point capital qui est réglé par nos analyses précédentes. On a beaucoup reproché aux paysans d'acheter des terres au moyen de capitaux empruntés à un taux d'intérêt supérieur au taux du fermage. On voit clairement, par ce qui précède, que cette opération, effectuée dans de certaines conditions et limites, peut n'être pas mauvaise et peut même être bonne, grâce au phénomène de la plus-value de la rente. Il faut reconnaître que, sur bien des points, les paysans savent mieux l'économie politique que les économistes et que les gouvernants. Pendant que les économistes discutent la question de savoir sur qui tombe l'impôt foncier, les paysans, quand ils achètent des terres, se font produire leur estimation cadastrale et déduisent purement et simplement du prix d'achat la quote-part du capital foncier afférente à l'impôt foncier. Et de même, pendant que les économistes discutent la question de savoir si la rente a ou n'a pas de valeur, les paysans achètent les terres en raison non-seulement de la valeur actuelle, mais de la valeur future de la rente. De là le prix relativement élevé des terres qui, pour le dire en passant, nous fournit une confirmation expérimentale éclatante de notre théorie. Il y a grandement lieu de se demander si l'Etat ne pourrait pas, comme le croit Gossen, effectuer avec succès une opération qui réussit aux particuliers; mais, pour critiquer la théorie de Gossen, il convient de lui donner d'abord une forme analytique tout-à-fait rigoureuse et générale.

Soit  $A$  le prix d'une terre et le montant du capital em-

prunté pour l'achat,  $a$  le montant du fermage à recevoir à la fin de la 1<sup>re</sup> année,  $i$  le taux de l'intérêt net,  $z$  le taux d'accroissement du fermage.

Dans  $n$  années, un individu ayant emprunté une somme  $A$  au taux de  $i$ , et ayant laissé les intérêts de cette somme se capitaliser au même taux, aura à son débit une somme de

$$A(1+i)^n.$$

Mais, à la même époque, cet individu, ayant acheté une terre dont le fermage initial est  $a$  et augmente de  $z$  fois son montant chaque année, aura touché  $n$  fermages qui auront été respectivement de  $a$ ,  $a(1+z)$ ,  $a(1+z)^2$ ...  $a(1+z)^{n-1}$ . Et, s'il a placé ces fermages à intérêts composés au taux de  $i$ , il aura à son crédit une somme de

$$\begin{aligned} & a(1+z)^{n-1} + a(1+z)^{n-2}(1+i) + a(1+z)^{n-3}(1+i)^2 + \dots \\ & \quad + a(1+i)^{n-1} \\ &= a(1+z)^{n-1} \left[ 1 + \frac{(1+i)}{(1+z)} + \frac{(1+i)^2}{(1+z)^2} + \dots + \frac{(1+i)^{n-1}}{(1+z)^{n-1}} \right]. \end{aligned}$$

Nous avons vu (9) que la quantité entre crochets est une progression géométrique dont la somme est

$$\frac{1}{(1+z)^{n-1}} \times \frac{(1+i)^n - (1+z)^n}{i-z} = \frac{1}{(1+z)^{n-1}} \times \frac{(1+z)^n - (1+i)^n}{z-i},$$

et qu'ainsi la somme obtenue est

$$a \frac{(1+i)^n - (1+z)^n}{i-z}.$$

Par conséquent, la somme restant due après  $n$  années écoulées est

$$A_n = A(1+i)^n - a \frac{(1+i)^n - (1+z)^n}{i-z}. \quad [19]$$

Quand  $z=i$ , l'équation [19] prend la forme indéterminée  $\frac{0}{0}$ .

Mais on trouve alors directement, en se reportant à la progression dont la somme fournit le multiplicateur de  $a$  dans cette équation,

$$A_n = A(1+i)^n - an(1+i)^{n-1}. \quad [20]$$

Au moyen de la formule [19] on calculerait directement telle ou telle valeur de  $A_n$  des deux tableaux de Gossen (5). En procédant ainsi pour le second, de 10 en 10 ans, et le complétant jusqu'à 80 ans, alors que  $A = 100,000$ ,  $a = 3333.33$ ,  $i = 0.04$  et  $z = 0.01$ , on trouve successivement pour

|         |                       |
|---------|-----------------------|
| $n = 0$ | $A_n = 100\,000. \gg$ |
| 1       | 100 666.66            |
| 2       | 101 326.66            |
| 5       | 103 261.66            |
| 10      | 106 288.33            |
| 20      | 111 232. » »          |
| 30      | 113 723.33            |
| 40      | 112 085.33            |
| 50      | 103 775. » »          |
| 60      | 84 970. » »           |
| 70      | 49 960. » »           |
| 80      | —9 786. » »           |

En comparant ces valeurs à celles qui figurent aussi dans le second tableau de Gossen, on remarquera quelques différences. Elles tiennent à ce que le mode arithmétique de calcul de Gossen, appliqué d'ailleurs avec une approximation médiocre, comporte des écarts qui vont en augmentant d'importance. Toutefois, cette circonstance n'a d'intérêt qu'au point de vue pratique. Au point de vue théorique,

qui est le nôtre, le grand avantage qu'il y a à posséder une formule rigoureuse et générale consiste en ce qu'on peut la discuter et étudier ainsi sous toutes ses faces la question du rachat des terres par l'Etat. C'est ce que nous allons faire dans ce paragraphe et dans les suivants.

19. Pour rendre cette discussion tout-à-fait claire, il faut, dans la formule [19]

$$A_n = A(1+i)^n - a \frac{(1+i)^n - (1+z)^n}{i-z},$$

considérer  $A$ ,  $a$ ,  $i$  et  $z$  comme des constantes et  $A_n$  comme une fonction exponentielle de  $n$ . On peut alors représenter l'équation par une courbe rapportée à des coordonnées rectangulaires dont les abscisses correspondront aux *années écoulées* depuis l'achat de la terre et les ordonnées à la *somme restant due* à la fin de chaque année. En réalité, les sommes dues étant arrêtées à la fin de chaque année, et les intérêts se composant d'année en année, la courbe est discontinue. Nous substituerons, dans la figure, à cette courbe discontinue une courbe continue passant par les points de variation annuelle.

Ainsi l'équation

$$A_n = 100,000 \times 1.04^n - 4000 \times \frac{1.04^n - 1.01^n}{0.04 - 0.01},$$

correspondante au premier tableau de Gossen, serait représentée par une courbe AN (Fig. 2); et l'équation

$$A_n = 100\,000 \times 1.04^n - \frac{10\,000}{3} \times \frac{1.04^n - 1.01^n}{0.04 - 0.01},$$

correspondante au second tableau, serait représentée par une courbe AN'.

Dans le premier cas, où le fermage initial suffit au paie-

ment des intérêts, la somme empruntée diminuant par amortissement dès la 2<sup>e</sup> année, la courbe, horizontale jusqu'à la fin de la 1<sup>re</sup> année, est décroissante à partir de ce moment. Dans le second cas, où le fermage initial ne suffit pas au paiement des intérêts, la somme empruntée augmentant par emprunts nouveaux avant de diminuer par amortissement, la courbe est successivement croissante et décroissante. Dans les deux cas, elle vient couper l'axe des années écoulées aux points N et N'. Il faut rechercher à quelles conditions il en est ainsi. D'une façon plus générale, il faut se poser ce problème : — *Rechercher dans quelles conditions on peut acheter des terres avec des capitaux empruntés en faisant l'amortissement des emprunts au moyen du fermage.* La discussion de la formule [19], effectuée d'abord au point de vue des circonstances qui permettent à  $A_n$  de devenir nul, et ensuite au point de vue des circonstances qui font que  $A_n$  est immédiatement décroissant, ou successivement croissant et décroissant, nous permettra de déterminer ces conditions avec beaucoup plus de rigueur et de précision que ne l'a fait Gossen.

20. Le point où la courbe coupe l'axe des années écoulées, correspondant au moment où l'amortissement est terminé après N années, est donné par l'équation

$$A(1+i)^N - a \frac{(1+i)^N - (1+z)^N}{i-z} = 0$$

d'où l'on tire successivement

$$A(1+i)^N = a \frac{(1+i)^N - (1+z)^N}{i-z},$$

$$A = a \frac{1 - \left(\frac{1+z}{1+i}\right)^N}{i-z},$$

$$\frac{A}{a} = \frac{1 - \left(\frac{1+z}{1+i}\right)^N}{i-z},$$

$$\frac{A}{a} (i-z) = 1 - \left(\frac{1+z}{1+i}\right)^N,$$

$$\left(\frac{1+z}{1+i}\right)^N = 1 - \frac{A}{a} (i-z),$$

$$N \log \frac{1+z}{1+i} = \log \left[ 1 - \frac{A}{a} (i-z) \right],$$

$$N = \frac{\log \left[ 1 - \frac{A}{a} (i-z) \right]}{\log \frac{1+z}{1+i}}. \quad [21]$$

Dans le cas particulier où  $z=i$ , cette valeur prend la forme indéterminée  $\frac{0}{0}$ . Mais, dans ce cas, la valeur de  $N$  pour laquelle  $A_n=0$  est donnée par l'équation

$$A(1+i)^N - aN(1+i)^{N-1} = 0$$

d'où l'on tire succesivement

$$A(1+i)^N = aN(1+i)^{N-1},$$

$$A(1+i) = aN,$$

$$N = \frac{A}{a} (1+i). \quad [22]$$

21. Trois cas peuvent se présenter d'abord, suivant qu'on a  $z > i$ ,  $z = i$  ou  $z < i$ .

Dans le cas où  $z$  est  $> i$ , la quantité entre crochets au

numérateur du second membre de l'équation [21] devient  $1 + \frac{A}{a}(z - i)$ . Elle est positive et  $> 1$ . Son logarithme est réel et positif. La quantité  $\frac{1+z}{1+i}$  est également positive et  $> 1$ . Son logarithme est également réel et positif. Par conséquent, la valeur de  $N$  est toujours réelle et positive quand  $A$  et  $a$  sont eux-mêmes réels et positifs.

Dans le cas où  $z = i$ , le second membre de l'équation [22],  $\frac{A}{a}(1+i)$ , est toujours réel et positif quand  $A$  et  $a$  sont eux-mêmes réels et positifs.

Ainsi : — *Dans une société où le taux d'accroissement du fermage égale ou surpasse le taux de l'intérêt net, on peut acheter des terres à un prix quelconque en faisant l'amortissement du prix d'achat au moyen du fermage.*

Il semble que, dans ces deux cas, il n'y ait aucune condition à la possibilité d'acheter des terres avec des capitaux empruntés en faisant l'amortissement des emprunts au moyen du fermage. Il y en a une cependant. La formule ne tient pas compte de la durée de l'accroissement du fermage, ou, pour mieux dire, elle suppose l'accroissement indéfini. Il est donc essentiel d'ajouter que *la durée de l'accroissement du fermage doit être au moins égale au nombre d'années nécessaire pour l'amortissement.*

Dans le cas où  $z$  est  $< i$ , pour que  $N$  soit réel, il faut que l'on ait

$$1 - \frac{A}{a}(i - z) > 0;$$

ce qui donne la condition

$$1 > \frac{A}{a}(i - z),$$

soit

$$\frac{a}{A} > i - z.$$

Et, pour que  $N$  soit positif, comme dans ce cas  $\log \frac{1+z}{1+i}$  est une quantité négative, il faut que  $\log \left[ 1 - \frac{A}{a} (i - z) \right]$  soit aussi une quantité négative, c'est-à-dire qu'il faut que l'on ait

$$1 - \frac{A}{a} (i - z) < 1,$$

soit

$$- \frac{A}{a} (i - z) < 0,$$

ce qui a toujours lieu du moment que  $i$  est  $> z$ . Par où l'on voit que, dans le cas dont il s'agit, si  $N$  est réel, il est en même temps positif, et qu'ainsi : — *Dans une société où le taux de l'intérêt net surpasse le taux d'accroissement du fermage, on ne peut acheter des terres en faisant l'amortissement du prix d'achat au moyen du fermage qu'à la condition que le taux du fermage initial soit supérieur à la différence des deux autres taux.* Cette condition particulière s'ajoute ici à la condition générale, qui subsiste toujours, que la durée de l'accroissement du fermage soit au moins égale au nombre d'années nécessaire pour l'amortissement. On verra plus tard que ces conditions ne sont pas aussi naturellement remplies que le croit Gossen.

Une confirmation des formules précédentes se trouve en supposant qu'il n'y ait pas de plus-value de la rente, c'est-à-dire que  $z = 0$ . L'équation [19] devient alors

$$A_n = A(1+i)^n - a \frac{(1+i)^n - 1}{i},$$

et l'équation [21] devient

$$N = \frac{\log \left(1 - \frac{Ai}{a}\right)}{\log \frac{1}{1+i}} = \frac{\log a - \log (a - Ai)}{\log (1+i)},$$

formules ordinaires de l'amortissement d'une somme  $A$  empruntée au taux de  $i$  et pour lequel on paie une annuité de  $a$ . La condition pour que  $N$  soit réel devient alors

$$a > Ai;$$

et, en effet, pour pouvoir amortir le prix d'achat d'une terre au moyen du fermage, sans accroissement de ce fermage, il faut bien que le montant du fermage constant soit supérieur au montant des intérêts du capital emprunté pour l'achat, ou en d'autres termes, que le taux du fermage soit supérieur au taux de l'intérêt. La condition pour que  $N$  soit positif devient alors

$$-\frac{Ai}{a} < 0,$$

ce qui a toujours lieu du moment que  $A$  et  $a$  sont des quantités positives.

Enfin,  $z$  pourrait être négatif. En ce cas les deux équations [19] et [21] deviendraient

$$A_n = A(1+i)^n - a \frac{(1+i)^n - (1-z)^n}{i+z},$$

$$N = \frac{\log \left[1 - \frac{A}{a}(i+z)\right]}{\log \frac{1-z}{1+i}};$$

et l'inspection de ces formules fait assez voir à quelle condition l'amortissement est possible. Pour que  $N$  soit réel, il faut que l'on ait

$$1 - \frac{A}{a} (i+z) > 0,$$

soit

$$1 > \frac{A}{a} (i+z),$$

soit

$$\frac{a}{A} > i+z.$$

Et pour que  $N$  soit positif, comme dans ce cas la quantité  $\log \frac{1-z}{1+i}$  est négative, il faut que la quantité  $\log \left[ 1 - \frac{A}{a} (i+z) \right]$  soit aussi négative, c'est-à-dire qu'il faut que l'on ait

$$1 - \frac{A}{a} (i+z) < 1,$$

soit

$$- \frac{A}{a} (i+z) < 0,$$

ce qui a toujours lieu quand  $A$  et  $a$  sont positifs. Il s'ensuit que : — *Dans une société où il y a diminution et non accroissement du fermage, on ne peut acheter des terres en faisant l'amortissement du prix d'achat au moyen du fermage qu'à la condition que le taux du fermage initial soit supérieur à la somme du taux de l'intérêt net et du taux de la diminution du fermage.*