Zeitschrift: Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Herausgeber: Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Band: 18 (1882)
Heft: 87

Artikel: Sur un mode particulier de représentation des imaginaires
Autor: Amstein, H.
Kapitel: 2
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-259606

L'étude qui vient d'être faite peut se résumer comme il suit : *La double infinité de droites appartenant à la congruence* (1) *se groupe selon une infinité d'hyperboloïdes à une nappe. Ces surfaces forment un faisceau passant par les directrices des congruences* $\eta = (a \pm bi)\,\xi + h + ki$; *une série de leurs sections circulaires est parallèle au plan* xy, *et leurs cônes tangents concentriques sont coupés par des plans parallèles au plan* xy *selon un système de sections coniques homofocales, pourvu que le centre commun se trouve en dehors du plan* xy. *En particulier, les sections coniques homofocales représentant le contour apparent des hyperboloïdes sur le plan* xy *ont pour foyers les points doubles de ce plan correspondant aux congruences* $\eta = (a \pm bi)\,\xi + h + ki$.

Il resterait encore à examiner les cas particuliers : 1° $h=k=0$, 2° $b=0$, 3° $a=1$, $b=0$. Dans le cas 2° les droites dans l'espace forment une gerbe, et dans le cas 3° elles sont toutes parallèles.

On n'entrera pas ici dans les détails de cette étude qui, du reste, n'offre aucune difficulté.

SECONDE PARTIE

Courbes imaginaires.

Soit l'équation d'une courbe

$$\eta = f(\xi). \tag{1}$$

En séparant les parties réelles et imaginaires, on peut la mettre sous la forme

$$X + Yi = \varphi(x, y) + i\psi(x, y).$$

Pour que le point $(\alpha + \beta i, \gamma + \delta i)$ fasse partie de cette courbe, il faut que les quantités α, β, γ, δ satisfassent aux conditions

$$\left\{ \begin{aligned} \gamma &= \varphi(\alpha, \beta) \\ \delta &= \psi(\alpha, \beta) \end{aligned} \right. \tag{2}$$

Par ces deux équations, γ et δ sont déterminés en fonction de α et β que l'on peut, en conséquence, envisager comme des variables indépendantes. Si l'on donne à α et β toutes les valeurs possibles, les équations

$$\frac{x - \alpha}{\gamma - \alpha} = \frac{y - \beta}{\delta - \beta} = z \tag{3}$$

fournissent toutes les droites représentant les points de la courbe (1). En vertu des équations (2), ces droites appartiennent à une congruence. Or, on sait que les droites faisant partie d'une telle congruence sont tangentes en deux points à une surface à deux nappes. Il s'agit maintenant de déterminer cette surface. Dans la suite, elle sera désignée par S.

Soient x, y, z les coordonnées d'un point de l'une quelconque des droites

$$(3)\qquad \begin{cases} x = \alpha + (\gamma - \alpha)\, z \\ y = \beta + (\delta - \beta)\, z. \end{cases}$$

Lorsque α et β varient, le point (x, y, z) se meut sur une surface. Aux accroissements arbitraires $d\alpha$, $d\beta$ des paramètres α et β correspondent des accroissements des quantités x, y, z, γ, δ, reliés aux premiers par les équations

$$(4)\qquad \begin{cases} dx = d\alpha + \left(\dfrac{\partial\gamma}{\partial\alpha}\, d\alpha + \dfrac{\partial\gamma}{\partial\beta}\, d\beta - d\alpha\right) z + (\gamma - \alpha)\, dz \\ dy = d\beta + \left(\dfrac{\partial\delta}{\partial\alpha}\, d\alpha + \dfrac{\partial\delta}{\partial\beta}\, d\beta - d\beta\right) z + (\delta - \beta)\, dz. \end{cases}$$

Or, la droite (3) est tangente à la surface au point (x, y, z), si l'on a

$$dx = (\gamma - \alpha)\, dz\,, \quad dy = (\delta - \beta)\, dz.$$

Introduisant ces valeurs dans les équations précédentes et posant, pour simplifier l'écriture,

$$\frac{\partial\gamma}{\partial\alpha} = \gamma_1, \quad \frac{\partial\gamma}{\partial\beta} = \gamma_2, \quad \frac{\partial\delta}{\partial\alpha} = \delta_1, \quad \frac{\partial\delta}{\partial\beta} = \delta_2,$$

il vient

$$(5)\qquad \begin{cases} [1 + (\gamma_1 - 1)\, z]\, d\alpha + \gamma_2 z\, d\beta = 0 \\ \delta_1 z\, d\alpha + [1 + (\delta_2 - 1)\, z]\, d\beta = 0 \end{cases}$$

Les plans tangents à la surface S aux points A et B, où elle est touchée par la droite g de la congruence, se déterminent de la manière suivante. La droite g répond aux paramètres α et β. Si l'on donne à α et β des accroissements conformes aux équations (5), on obtient une droite consécutive g' qui, elle aussi, est tangente à la surface S aux points A′ et B′. Soit A′ le point d'intersection de g et g'. Alors le plan de ces deux droites est évidemment le plan tangent à la surface au point B, et le coefficient angulaire de sa trace sur le plan xy est donné par $\frac{d\beta}{d\alpha} = m.$

L'élimination du rapport $\frac{d\beta}{d\alpha}$ entre ces deux équations permet d'établir une relation qui détermine z en fonction de α et β. On obtient

$$[1 + (\gamma_1 - 1) z] [1 + (\delta_2 - 1) z] = z^2 \gamma_2 \delta_1$$

ou

$$(6) \quad z^2 [\gamma_1\delta_2 - \gamma_2\delta_1 - \gamma_1 - \delta_2 + 1] + z [\gamma_1 + \delta_2 - 2] + 1 = 0.$$

Cette équation étant du 2d degré en z, il existe effectivement deux points de contact.

Si, au contraire, on élimine z entre les mêmes équations, on aura une équation pour déterminer m. Il vient successivement

$$\frac{d\alpha}{\gamma_1 d\alpha - d\alpha + \gamma_2 d\beta} = \frac{d\beta}{\delta_2 d\beta - d\beta + \delta_1 d\alpha}$$

$$\frac{1}{\gamma_1 - 1 + \gamma_2 m} = \frac{m}{\delta_2 m - m + \delta_1}$$

$$(7) \qquad \gamma_2 m^2 + (\gamma_1 - \delta_2) m - \delta_1 = 0.$$

Les équations (6) et (7) se simplifient, si l'on tient compte des relations entre les dérivées partielles premières de γ et δ. En effet, quelle que soit d'ailleurs la fonction $f(\alpha + \beta i)$, on sait qu'on a

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = \frac{df}{d(\alpha + \beta i)}, \quad \frac{\partial f}{\partial \beta} = i \frac{df}{d(\alpha + \beta i)},$$

d'où l'on tire

$$i \frac{\partial f}{\partial \alpha} = \frac{\partial f}{\partial \beta}$$

ou

$$i (\gamma_1 + i\delta_1) = \gamma_2 + i\delta_2$$

et par suite

$$\gamma_1 = \delta_2, \quad \gamma_2 = - \delta_1$$

$$\gamma_1\delta_2 - \gamma_2\delta_1 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2, \quad \gamma_1 - \delta_2 = 0.$$

A l'aide des deux dernières relations, les équations (6) et (7) prennent la forme

$$(6^a) \qquad z^2 [(\gamma_1 - 1)^2 + \gamma_2^2] + 2z(\gamma_1 - 1) + 1 = 0$$

$$(7^a) \qquad \gamma_2 (m^2 + 1) = 0$$

De l'équation (6^a) il suit

$$(8) \qquad z = \frac{1 - \gamma_1 \pm i\gamma_2}{(\gamma_1 - 1)^2 + \gamma_2^2} = \frac{1}{1 - \gamma_1 \mp i\gamma_2}$$

et l'équation (7^a) fournit, si $\gamma_2 \gtrless 0$

$$(9) \qquad m = \frac{d\beta}{d\alpha} = \pm\, i.$$

De l'équation (9) on conclut que les traces sur le plan xy des plans tangents à la surface S forment deux séries de droites parallèles, ayant pour coefficient angulaire respectivement i et $-i$. Il s'ensuit que la surface elle-même se compose de deux surfaces cylindriques dont les génératrices sont à la fois parallèles au plan xy et aux traces des plans tangents.

On obtiendrait l'équation de cette surface en éliminant α et β entre les équations

$$(10) \qquad \left\{ \begin{aligned} z &= \frac{1}{1 - \gamma_1 \mp i\gamma_2} \\ x &= \alpha + (\gamma - \alpha) z \\ y &= \beta + (\delta - \beta) z \end{aligned} \right.$$

Le cas où $\gamma_2 = 0$ mérite une attention spéciale. En effet, dans cette hypothèse, z devient réel

$$z = \frac{1}{1 - \gamma_1},$$

m n'est plus nécessairement imaginaire et les équations (10) sont remplacées par les suivantes :

$$(10^a) \qquad \left\{ \begin{aligned} z &= \frac{1}{1 - \gamma_1} \\ x &= \frac{\gamma - \alpha\gamma_1}{1 - \gamma_1} \\ y &= \frac{\delta - \beta\gamma_1}{1 - \gamma_1} \end{aligned} \right.$$

Or, lorsque

$$\gamma_1 = F(\alpha, \beta) = 0$$

le point (α, β) se meut sur une courbe dans le plan xy. Alors les équations (10^a) représentent en général une courbe gauche réelle et les droites (3), tangentes à cette courbe, forment une surface développable dont la trace sur le plan xy est donnée par l'équation $F(\alpha, \beta) = 0$. La courbe gauche devient plane ou se décompose en plusieurs courbes planes chaque fois que la courbe $F(\alpha, \beta) = 0$ dégénère en une ou plusieurs lignes droites.

Les deux nappes de la surface, bien qu'imaginaires, peuvent cependant se couper suivant une courbe réelle. Pour un point d'intersection les deux valeurs de z dans la formule (8) doivent être égales, ce qui n'est possible que lorsque $\gamma_2 = 0$. Par conséquent, la courbe gauche répondant à l'hypothèse $\gamma_2 = 0$ n'est autre que l'intersection réelle des deux nappes imaginaires de la surface S.

Dans le but d'établir la correspondance entre les valeurs de m et de x, y, z, on posera dans la première des équations (5) $\frac{d\beta}{d\alpha} = m$ et on la résoudra par rapport à z, ce qui donnera

$$z = \frac{1}{1 - \gamma_1 - m\gamma_2}.$$

En écrivant encore ε à la place de $\pm i$ pour éviter dans la suite le double signe de i, on voit qu'à la valeur $m = \varepsilon$ correspond la valeur

$$z = \frac{1}{1 - \gamma_1 - \varepsilon\gamma_2}.$$

Mais on se souvient qu'au point (x, y, z) répondant à cette valeur de z, la trace sur le plan xy du plan tangent à la surface S n'a pas pour coefficient angulaire ε, mais bien $-\varepsilon$. Il s'ensuit qu'en désignant par ξ, η, ζ les coordonnées courantes, les génératrices de la surface S possèdent les équations

$$\zeta = z, \quad \eta - y = -\varepsilon(\xi - x) \tag{11}$$

ou en remplaçant x, y, z par leurs valeurs

$$\zeta = \frac{1}{1 - \gamma_1 - \varepsilon\gamma_2},$$

$$\eta - \beta - \frac{\delta - \beta}{1 - \gamma_1 - \varepsilon\gamma_2} = -\varepsilon\left(\xi - \alpha - \frac{\gamma - \alpha}{1 - \gamma_1 - \varepsilon\gamma_2}\right)$$

ou

$$\eta = -\varepsilon\xi + \beta + \varepsilon\alpha + \frac{(\delta-\beta)(1-\gamma_1+\varepsilon\gamma_2)}{(1-\gamma_1)^2+\gamma_2^2} + \varepsilon\frac{(\gamma-\alpha)(1-\gamma_1+\varepsilon\gamma_2)}{(1-\gamma_1)^2+\gamma_2^2}.$$

Enfin les équations (11) prennent la forme

$$(11^a)\quad \begin{cases} \zeta = \dfrac{1}{1-\gamma_1-\varepsilon\gamma_2} \\ \eta = -\varepsilon\xi + \beta + \varepsilon\alpha + \dfrac{(\delta-\beta)(1-\gamma_1)+(\alpha-\gamma)\gamma_2}{(1-\gamma_1)^2+\gamma_2^2} + \\ \qquad + \varepsilon\dfrac{(\delta-\beta)\gamma_2+(\gamma-\alpha)(1-\gamma_1)}{(1-\gamma_1)^2+\gamma_2^2} \end{cases}$$

Elles expriment indifféremment les deux séries de génératrices, suivant qu'on attribue à ε la valeur $+i$ ou $-i$.

La tangente.

Par analogie, on appellera tangente à la courbe

$$\eta = f(\xi)$$

au point (x, y) la droite imaginaire

$$\eta - y = \frac{dy}{dx}(\xi - x).$$

Or

$$x = \alpha + \beta i, \qquad y = \gamma + \delta i,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\gamma+\delta i)}{d(\alpha+\beta i)} = \frac{d\gamma}{d(\alpha+\beta i)} + i\frac{d\delta}{d(\alpha+\beta i)} =$$

$$= \frac{\partial\gamma}{\partial\alpha} + i\frac{\partial\delta}{\partial\alpha} = \gamma_1 - i\gamma_2,$$

ensorte que l'équation de la tangente prend la forme

$$\eta - \gamma - \delta i = (\gamma_1 - i\gamma_2)(\xi - \alpha - \beta i)$$

ou

$$(12)\quad (\gamma_1 - i\gamma_2)\xi - \eta + (\gamma - \alpha\gamma_1 - \beta\gamma_2) + i(\delta + \alpha\gamma_2 - \beta\gamma_1) = 0.$$

Traduite en géométrie, cette équation conduit, comme on sait, à une congruence linéaire ayant deux droites consécutives communes avec la congruence qui est le représentant géométrique de la courbe imaginaire $\eta = f(\xi)$. On obtient les directrices de la tangente imaginaire (12) en faisant dans les formules (4), p. 6, à savoir

$$\zeta = \frac{Cp + Dq + \varepsilon(Dp - Cq)}{p^2 + q^2}, \quad \eta = \varepsilon\xi + \frac{Eq - Fp + \varepsilon(Ep + Fq)}{p^2 + q^2}$$

les substitutions suivantes

$$\begin{gathered} A = \gamma_1, \qquad B = -\gamma_2, \qquad C = -1, \qquad D = 0, \\ E = \gamma - \alpha\gamma_1 - \beta\gamma_2, \qquad F = \delta + \alpha\gamma_2 - \beta\gamma_1, \\ p = A + C = \gamma_1 - 1, \qquad q = B + D = -\gamma_2. \end{gathered}$$

Il vient

$$(13)\quad \zeta = \frac{-(\gamma_1 - 1) - \varepsilon\gamma_2}{(\gamma_1 - 1)^2 + \gamma_2^2} = \frac{1 - \gamma_1 - \varepsilon\gamma_2}{(1 - \gamma_1 - \varepsilon\gamma_2)(1 - \gamma_1 + \varepsilon\gamma_2)} = \frac{1}{1 - \gamma_1 + \varepsilon\gamma_2}$$

$$\eta = \varepsilon\xi + \frac{-(\gamma - \alpha\gamma_1 - \beta\gamma_2)\gamma_2 - (\delta + \alpha\gamma_2 - \beta\gamma_1)(\gamma_1 - 1)}{(\gamma_1 - 1)^2 + \gamma_2^2} + \\ + \varepsilon \frac{(\gamma - \alpha\gamma_1 - \beta\gamma_2)(\gamma_1 - 1) - (\delta + \alpha\gamma_2 - \beta\gamma_1)\gamma_2}{(\gamma_1 - 1)^2 + \gamma_2^2}.$$

Après quelques réductions, cette dernière équation devient

$$(14)\qquad \eta = \varepsilon\xi + \beta - \varepsilon\alpha + \frac{(\delta - \beta)(1 - \gamma_1) + (\alpha - \gamma)\gamma_2}{(1 - \gamma_1)^2 + \gamma_2^2} - \\ - \varepsilon \frac{(\delta - \beta)\gamma_2 + (\gamma - \alpha)(1 - \gamma_1)}{(1 - \gamma_1)^2 + \gamma_2^2}.$$

En comparant les équations (13) et (14) avec les équations (11^a) on reconnaît que les directrices de la tangente (12) ne sont autres que les génératrices de la surface S dont il a été question jusqu'ici. Par conséquent, lorsque la tangente varie, ses directrices engendrent cette même surface.

Dans le cas particulier où $\gamma_2 = 0$, les deux valeurs de ζ coïncident et deviennent réelles. La tangente (12) prend la forme

$$(15)\qquad \gamma_1\xi - \eta + (\gamma - \alpha\gamma_1) + i(\delta - \beta\gamma_1) = 0.$$

Le coefficient angulaire de cette congruence étant réel, les droites qui en font partie forment une gerbe dont le centre est donné par les formules (5), p. 7, à savoir

$$\xi = -\frac{CE + DF}{C^2 + D^2}\zeta, \quad \eta = -\frac{CF - DE}{C^2 + D^2}\zeta, \quad \zeta = \frac{C}{A + C}.$$

Or, dans le cas actuel

$$A=\gamma_1, \quad C=-1, \quad D=0, \quad E=\gamma-\alpha\gamma_1, \quad F=\delta-\beta\gamma_1,$$

puis

$$\zeta=\frac{1}{1-\gamma_1}, \quad \xi=\frac{\gamma-\alpha\gamma_1}{1-\gamma_1}, \quad \eta=\frac{\delta-\beta\gamma_1}{1-\gamma_1}.$$

Ce sont là précisément les formules (10^a). Il s'ensuit que le lieu géométrique des centres des tangentes à la courbe imaginaire $\eta=f(\xi)$ qui répondent à l'hypothèse $\gamma_2=0$, est identique à l'intersection réelle des deux surfaces cylindriques imaginaires (10).

La courbe définie par les formules (10^a) est encore susceptible d'une autre interprétation importante. En effet, lorsque le point (α, β) du plan inférieur est assujetti à se mouvoir sur une courbe $F(\alpha, \beta)=0$, les droites appartenant à la congruence (1) engendrent une surface réglée dont l'une quelconque des sections parallèles au plan xy se détermine au moyen des formules

$$(16) \qquad \begin{cases} z=\text{const.} \\ x=\alpha(1-z)+\gamma z \\ y=\beta(1-z)+\delta z \end{cases}$$

La tangente au point (x', y', z) à cette courbe est donnée par les équations

$$\eta-y'=\frac{d\beta(1-z)+(\delta_1 d\alpha+\delta_2 d\beta)z}{d\alpha(1-z)+(\gamma_1 d\alpha+\gamma_2 d\beta)z}(\xi-x'), \zeta=z$$

qui en vertu des relations

$$\delta_2=\gamma_1, \quad \delta_1=-\gamma_2$$

peuvent s'écrire

$$(17) \quad \eta-y'=\frac{\dfrac{d\beta}{d\alpha}[1+(\gamma_1-1)z]-\gamma_2 z}{1+(\gamma_1-1)z+\dfrac{d\beta}{d\alpha}\gamma_2 z}(\xi-x'), \ \zeta=z$$

Dans le plan de la courbe se trouve une génératrice de la surface S, à savoir

$$(18) \qquad \zeta=z, \quad \eta-y_0=i(\xi-x_0).$$

Est-il possible que la tangente (17) devienne identique à cette génératrice ? Telle est la question qui se présente naturellement à l'esprit. La réponse est affirmative pour tous les cas où l'équation $\gamma_2 = 0$ est satisfaite par des valeurs réelles de α et β.

D'abord de la condition

$$\frac{\frac{d\beta}{d\alpha}[1 + (\gamma_1 - 1) z] - \gamma_2 z}{1 + (\gamma_1 - 1) z + \frac{d\beta}{d\alpha} \gamma_2 z} = i$$

on tire

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{i [1 + (\gamma_1 - 1) z] + \gamma_2 z}{1 + (\gamma_1 - 1) z - i\gamma_2 z} = i.$$

Ensuite, pour que le point (x_0, y_0, z) appartienne à la surface S, il faut que l'on ait

$$z = \frac{1}{1 - \gamma_1 - i\gamma_2}$$

ou

$$(19) \qquad 1 - \gamma_1 - i\gamma_2 = \frac{1}{z}.$$

Dans cette équation, z doit être réel et différent de zéro; par conséquent elle se décompose en ces deux

$$\gamma_2 = 0, \qquad 1 - \gamma_1 = \frac{1}{z},$$

desquelles on déduit les valeurs réelles

$$\alpha = \alpha_0, \qquad \beta = \beta_0.$$

Or, il est évident que l'équation linéaire

$$(20) \qquad \beta - \beta_0 = i (\alpha - \alpha_0)$$

est compatible avec la condition (19); en même temps elle fournit $\frac{d\beta}{d\alpha} = i$.

Le point (x_0, y_0, z) est maintenant déterminé; en appelant γ_0, δ_0 les valeurs que prennent respectivement γ et δ pour $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$, on a en effet

$$\begin{cases} x_0 = \alpha_0 (1 - z) + \gamma_0 z \\ y_0 = \beta_0 (1 - z) + \delta_0 z, \end{cases}$$

La génératrice (18) peut être considérée comme étant l'image dans le plan $z =$ const. de la droite imaginaire (20). En supposant pour un instant l'identité des droites (17) et (18), il s'ensuit que de son côté le point de contact (x', y', z) de la tangente (17) est l'image du point (α', β') satisfaisant simultanément aux équations

$$F(\alpha', \beta') = 0$$
$$\beta' - \beta_0 = i(\alpha' - \alpha_0).$$

Soient γ', δ' les valeurs de γ et δ correspondant à $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$. Alors on a, puisque le point (x', y', z) appartient non-seulement à la courbe (16), mais aussi à la surface S

$$\begin{cases} x' = \alpha'(1 - z) + \gamma' z \\ y' = \beta'(1 - z) + \delta' z \end{cases}$$

Afin de démontrer *a posteriori* que les valeurs x_0, y_0, x', y' trouvées de la façon indiquée rendent effectivement identiques les droites (17) et (18), il suffit de prouver que le point (x_0, y_0, z) fait partie de la tangente (17), en d'autres termes, on doit avoir

$$\frac{y_0 - y'}{x_0 - x'} = i.$$

Or, de l'équation

$$\gamma + \delta i = f(\alpha + \beta i)$$

il suit, par hypothèse,

$$\gamma_0 + \delta_0 i = f(\alpha_0 + \beta_0 i)$$
$$\gamma' + \delta' i = f(\alpha' + \beta' i).$$

Remplaçant dans cette dernière égalité β' par sa valeur, à savoir

$$\beta' = \beta_0 + i(\alpha' - \alpha_0)$$

il vient

$$\gamma' + \delta' i = f(\alpha' + i\beta_0 - \alpha' + \alpha_0) = f(\alpha_0 + \beta_0 i) = \gamma_0 + \delta_0 i.$$

Par conséquent

$$\gamma' = \gamma_0, \quad \delta' = \delta_0$$

et puis

$$\frac{y_0 - y'}{x_0 - x'} = \frac{\beta_0(1 - z) + \delta_0 z - [\beta_0 + i(\alpha' - \alpha_0)](1 - z) - \delta_0 z}{\alpha_0(1 - z) + \gamma_0 z - \alpha'(1 - z) - \gamma_0 z} =$$
$$= \frac{i(\alpha_0 - \alpha')(1 - z)}{(\alpha_0 - \alpha')(1 - z)} = i.$$

Ainsi, l'identité des droites (17) et (18) est bien établie.

Partant de l'égalité

$$\gamma - \delta i = f(\alpha - \beta i)$$

que l'on obtient en substituant les expressions conjuguées à toutes les quantités imaginaires entrant dans l'équation

$$\gamma + \delta i = f(\alpha + \beta i);$$

on vérifierait de même l'identité des droites

$$\eta - y'' = -i(\xi - x''),\ \zeta = z$$

$$\eta - y_0 = -i(\xi - x_0),\ \zeta = z,$$

où x'' et y'' signifient les valeurs conjuguées respectivement de x' et y'.

Les génératrices de la surface S

$$\eta - y_0 = \pm i(\xi - x_0),\ \zeta = z$$

se rencontrent au point réel

$$x = x_0, \quad y = y_0,\ \zeta = z.$$

Celui-ci est par conséquent un foyer de la courbe (16). La fonction $F(\alpha, \beta)$ est arbitraire, et par suite l'équation $F(\alpha, \beta) = 0$ donne naissance à une infinité de surfaces réglées. Or, le point (x_0, y_0, z) est indépendant de la fonction F. Il en résulte que *les sections faites dans ces surfaces par le plan* z = c, *où* c *est une constante différente de zéro, possèdent toutes le foyer commun* (x_0, y_0, z).

De plus, lorsque z *varie, le foyer* (x_0, y_0, z) *décrit en général une courbe gauche qui n'est autre que l'intersection réelle des deux nappes de la surface* S, *c'est-à-dire la courbe représentée par les formules* (10^a).

Comme exemple à l'appui de ces généralités sur les courbes imaginaires, il ne sera pas inutile d'étudier quelques courbes particulières. Les courbes choisies sont trois courbes spéciales du second degré.

La parabole.

Soit l'équation de la courbe à étudier

(1) $$\xi^2 = 2p\eta,$$

où p signifie une constante réelle. Puisque

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\xi}{p}$$

le rapport des éléments linéaires aux points correspondants η et ξ est égal à la valeur absolue de $\frac{\xi}{p}$ et l'élément $d\eta$ fait avec l'élément $d\xi$ un angle qui est égal à la déviation de $\frac{\xi}{p}$. Entre le plan supérieur et le plan inférieur la similitude dans les parties infiniment petites règne partout, à l'exception des points $\xi = 0$ et $\xi = \infty$. Posant

$$\xi = x + yi, \qquad \eta = X + Yi,$$

l'équation (1) devient

$$(x + yi)^2 = 2p\,(X + Yi),$$

d'où l'on tire

$$(2) \qquad \begin{cases} 2pX = x^2 - y^2 \\ 2pY = 2xy. \end{cases}$$

Ces relations montrent qu'à des lignes droites parallèles aux axes coordonnés dans le plan supérieur correspondent dans le plan inférieur des hyperboles équilatères qui, en vertu de la similitude dans les parties infiniment petites, se coupent sous un angle droit. Deux quelconques de ces courbes orthogonales se coupent en deux points réels. Il s'ensuit qu'à chaque point du plan supérieur correspondent en général deux points du plan inférieur, symétriques par rapport au centre O. La même chose ressort directement de l'équation (1) ou des formules

$$\begin{cases} x = \sqrt{p}\,\sqrt{\ X + \sqrt{X^2 + Y^2}} \\ y = \sqrt{p}\,\sqrt{-X + \sqrt{X^2 + Y^2}} \end{cases}$$

déduites des équations (2).

Soit

$$y = x \operatorname{tg} \mu,$$

alors on a

$$\begin{cases} 2pX = (1 - \operatorname{tg}^2 \mu)\, x^2 \\ 2pY = 2 \operatorname{tg} \mu\, x^2, \end{cases}$$

puis

$$\frac{Y}{X} = \frac{2 \operatorname{tg} \mu}{1 - \operatorname{tg}^2 \mu} = \operatorname{tg} 2\mu.$$

Par conséquent, lorsque le point ξ parcourt la droite $y = x \operatorname{tg} \mu$, son image η décrit cette autre droite $Y = X \operatorname{tg} 2\mu$. Mais tandis que le point ξ se meut sur la droite entière, le point η est restreint à un rayon partant de l'origine.

Afin de faciliter le langage, ces droites seront désignées dans la suite respectivement par μ et 2μ.

Si l'on pose

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi, \end{cases}$$

il suit

$$\begin{cases} X = \dfrac{r^2}{2p} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) = \dfrac{r^2}{2p} \cos 2\varphi \\ Y = \dfrac{r^2}{2p} 2 \sin \varphi \cos \varphi = \dfrac{r^2}{2p} \sin 2\varphi \end{cases}$$

Il s'ensuit que lorsque le point ξ parcourt une fois la circonférence de rayon r

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

η décrit deux fois la circonférence de rayon $\dfrac{r^2}{2p}$

$$X^2 + Y^2 = \frac{r^4}{4p^2}.$$

Ceci établi, il serait facile de construire des points correspondants. En effet, si l'on projette comme précédemment le plan supérieur sur le plan inférieur, la figure (3) montre la position relative d'un point (X, Y) et des deux points correspondants (x, y) et $(-x, -y)$.

La correspondance entre les points des deux plans est parfaitement établie, si l'on donne par exemple un point B′ sur la droite 2μ et les points correspondants B et B_1 sur la droite μ. Or, pour construire tous les points correspondants situés sur les droites μ et 2μ, on peut procéder de la manière suivante (fig. 4). Sur la droite μ se trouve une involution AA_1, BB_1, CC_1, etc., dont les points doubles sont l'origine et le point à l'infini. D'un point S sur une circonférence quelconque dans le plan, on la projette sur celle-ci. Par là on détermine une involution curviligne dont le pôle P est le point d'intersection des sécantes joignant les couples de points conjugués. Le faisceau formé par les sécantes est projectif avec la ponctuelle simple A′, B′, C′, etc., sur la droite 2μ. En le coupant par une droite quelconque, on est en présence de deux ponctuelles projectives A″, B″, C″, ...,

A', B', C'..... et dès lors il est facile de construire autant de points correspondants que l'on voudra.

Si maintenant on demandait de construire les points D et D_1, correspondant au point donné D', on chercherait d'abord D''; ce point trouvé, on aurait la sécante PD'', d'où l'on remonterait aisément aux points cherchés. Dans la figure (4), on s'est servi des points doubles de l'involution AA_1, BB_1..... pour déterminer le pôle P, ce qui simplifie un peu les opérations.

La construction indiquée est encore utile, lorsque le point donné E' n'appartient pas à la droite 2μ. En effet, dans ce cas, on mènera la droite OE'; alors les points E et E_1 seront situés sur la bissectrice de l'angle $E'OX$. Pour les trouver, il suffit de transporter le point E' sur la droite 2μ, moyennant un arc de cercle dont le centre est O et le rayon OE', de construire sur la droite μ les points correspondants et de les ramener ensuite à leur place.

Cette construction deviendra en partie superflue, quand on connaîtra l'enveloppe des droites joignant les points de la droite μ aux points correspondants de la droite 2μ. A cet effet, soient

$$x \text{ et } y = x \operatorname{tg} \mu$$

les coordonnées d'un point quelconque de la droite μ; les coordonnées du point correspondant de la droite 2μ seront

$$X = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \mu}{2p} x^2, \qquad Y = \frac{\operatorname{tg} \mu}{p} x^2$$

et la droite, déterminée par ces points, aura pour équation

$$\eta - y = \frac{Y - y}{X - x} (\xi - x)$$

ou

$$(3) \qquad x^2 \sin \mu + x \cos \mu \,(\eta \cos 2\mu - \xi \sin 2\mu) + \\ + 2p \cos^2 \mu \,(\xi \sin \mu - \eta \cos \mu) = 0.$$

En la différentiant par rapport à x

$$(3^a) \qquad 2x \sin \mu + \cos \mu \,(\eta \cos 2\mu - \xi \sin 2\mu) = 0$$

et en éliminant ensuite x entre les équations (3) et (3^a), il vient

$$(4) \quad (\xi \sin 2\mu - \eta \cos 2\mu)^2 = 8p \sin \mu \,(\xi \sin \mu - \eta \cos \mu).$$

Telle est l'enveloppe des droites (3). Si, dans cette équation, on regarde μ comme variable, elle représente un système de paraboles. Par la transformation à l'aide des formules

$$\left\{\begin{array}{l} \xi \sin 2\mu - \eta \cos 2\mu = Y + 2p \sin 2\mu \\ \xi \cos 2\mu + \eta \sin 2\mu = X + 2p \cos^2 \mu, \end{array}\right.$$

d'où l'on tire

$$\left\{\begin{array}{l} \xi = (X + 2p \cos^2 \mu) \cos 2\mu + (Y + 2p \sin 2\mu) \sin 2\mu \\ \eta = (X + 2p \cos^2 \mu) \sin 2\mu - (Y + 2p \sin 2\mu) \cos 2\mu \end{array}\right.$$

l'équation (4) prend la forme

$$Y^2 = - 8p \sin^2 \mu\, X$$

Cette équation montre que les coordonnées du foyer de l'une quelconque des paraboles sont

$$Y = 0, \quad X = - 2p \sin^2 \mu$$

et que sa directrice possède l'équation

$$X = 2p \sin^2 \mu.$$

Au moyen des coordonnées ξ, η, le foyer est donné par

$$\xi = 2p, \quad \eta = 0$$

et la directrice par l'équation

$$\xi \cos 2\mu + \eta \sin 2\mu = 2p.$$

Il s'ensuit que toutes ces paraboles ont un foyer commun et que leurs directrices enveloppent une circonférence dont l'origine est le centre et le rayon $= 2p$ (voir fig. 5). Elles passent toutes par l'origine, et en ce point la droite μ est une tangente à la courbe correspondante, tandis que la droite 2μ en est un diamètre. La construction de ces paraboles est donc des plus faciles. D'une propriété très connue de la parabole, ainsi que des formules

$$X = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \mu}{2p} x^2, \quad Y = \frac{\operatorname{tg} \mu}{p} x^2$$

qui ne renferment x qu'au carré, on conclut qu'on aurait obtenu la même parabole en joignant le point (X, Y) au point $(-x, -y)$. Cette observation permet de construire facilement des points correspondants sur les droites μ et 2μ. En effet, pour trouver sur la droite μ les points A et A_1 correspondant à un point A' donné sur le diamètre 2μ, il suffit de mener par A' les deux tangentes à la parabole; celles-ci couperont la droite μ aux deux points cherchés.

Cette construction devient illusoire lorsque $\mu = 0$ ou $\mu = \pi$, car dans ces cas la parabole se réduit à la droite $\eta = 0$. D'ailleurs, c'est sur cette droite que sont situés les points doubles du plan, à savoir l'origine et le foyer des paraboles. On trouve ces points caractéristiques en posant $\eta = \xi$ dans l'équation (1), ou $X = x$, $Y = y$ dans les équations (2), ce qui donne

$$\xi = 0\,; \qquad \xi = 2p$$

ou

$$x = y = 0\,; \qquad x = 2p,\ y = 0.$$

L'équation (4) est susceptible de la forme suivante

$$(\xi \cos 2\mu + \eta \sin 2\,\mu - 2p)^2 = (\xi - 2p)^2 + \eta^2 =$$
$$= [\eta + i\,(\xi - 2p)]\;[\eta - i\,(\xi - 2p)]$$

Cette forme prouve que les droites imaginaires $\eta = \pm i\,(\xi - 2p)$ sont des tangentes communes à toutes les paraboles en question. Il sera possible d'établir plus loin la connexion entre ces deux droites et les génératrices de la surface à deux nappes S répondant à la congruence (1).

Les droites de la congruence (1) qui joignent les points de la droite 2μ, remise dans le plan supérieur, aux points correspondants de la droite μ, engendrent une surface réglée, dont l'équation s'obtient en éliminant x entre les équations

$$\frac{\xi - x}{\dfrac{x^2}{2p}\,(1 - \operatorname{tg}^2\mu) - x} = \frac{\eta - x \operatorname{tg}\mu}{\dfrac{x^2}{p}\operatorname{tg}\mu - x\operatorname{tg}\mu} = \zeta$$

ou

$$(5)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\eta - x\,(1 - \zeta)\operatorname{tg}\mu = \frac{x^2\zeta}{p}\operatorname{tg}\mu \\ &\xi - x\,(1 - \zeta) \quad = \frac{x^2\zeta}{2p}\,(1 - \operatorname{tg}^2\mu). \end{aligned} \right.$$

On trouve d'abord

$$\frac{\eta - x\,(1 - \zeta)\operatorname{tg}\mu}{\xi - x\,(1 - \zeta)} = \operatorname{tg} 2\mu,$$

d'où l'on tire

$$x = \frac{\xi \sin 2\mu - \eta \cos 2\mu}{(1 - \zeta)\operatorname{tg}\mu}$$

et en introduisant cette valeur dans la première des équations (5)

$$(6)\quad 2p \sin\mu\,(\eta\cos\mu - \xi\sin\mu)\,(1-\zeta)^2 = \zeta\,(\xi\sin 2\mu - \eta\cos 2\mu)^2.$$

La surface du 3^{me} degré représentée par cette équation possède la génératrice double

$$\zeta = 1, \quad \xi\sin 2\mu - \eta\cos 2\mu = 0.$$

La partie intéressante de son contour apparent sur le plan xy est la parabole (4), et l'on remarquera qu'on l'obtient en faisant dans l'équation (6) $\zeta = -1$. En d'autres termes, le cylindre tangent parallèle à l'axe des z touche la surface suivant une courbe située dans le plan $\zeta = -1$. La section déterminée dans la surface (6) par un plan parallèle au plan xy, est une parabole; or, on sait d'une manière générale que toutes ces courbes, répondant à différentes valeurs de μ, doivent avoir un foyer commun. En effet, ζ étant constant, on trouve que les coordonnées du foyer sont indépendantes de μ

$$(7)\qquad \eta = 0, \quad \xi = -p\,\frac{(1-\zeta)^2}{2\zeta}$$

et de plus, en mettant l'équation (6) sous la forme

$$\left[\xi\cos 2\mu + \eta\sin 2\mu + p\,\frac{(1-\zeta)^2}{2\zeta}\right]^2 = \eta^2 + \left[\xi + p\,\frac{(1-\zeta)^2}{2\zeta}\right]^2 =$$

$$= \left\{\eta + i\left[\xi + p\,\frac{(1-\zeta)^2}{2\zeta}\right]\right\}\left\{\eta - i\left[\xi + p\,\frac{(1-\zeta)^2}{2\zeta}\right]\right\}$$

on reconnaît que les droites

$$(8)\qquad \eta = \pm\, i\left[\xi + p\,\frac{(1-\zeta)^2}{2\zeta}\right]$$

sont tangentes à toutes ces courbes.

Maintenant, si l'on rend à ζ sa variabilité, le lieu géométrique des foyers (7) est l'hyperbole

$$(9)\qquad \eta = 0, \quad 2\xi\zeta + p\,(1-\zeta)^2 = 0.$$

Avant de constater, pour confirmer la théorie générale, que les droites (8) sont les génératrices de la surface S, et que l'hyperbole (9) est l'intersection réelle de ses deux nappes, il sera peut-être intéressant de chercher encore l'équation de la surface réglée, engendrée par les droites qui joignent les points de la circonférence dans le plan supérieur

$$X = \frac{r^2}{2p} \cos 2\varphi, \quad Y = \frac{r^2}{2p} \sin 2\varphi$$

aux points correspondants de la circonférence dans le plan inférieur

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

On l'obtient en éliminant φ entre les équations

$$\frac{\xi - r \cos \varphi}{\frac{r^2}{2p} \cos 2\varphi - r \cos \varphi} = \frac{\eta - r \sin \varphi}{\frac{r^2}{2p} \sin 2\varphi - r \sin \varphi} = \zeta$$

ou

$$\left\{ \begin{array}{l|c|c} \left(\frac{r^2}{2p} \cos 2\varphi - r \cos \varphi\right) \zeta = \xi - r \cos \varphi & \sin \varphi & \cos \varphi \\ \left(\frac{r^2}{2p} \sin 2\varphi - r \sin \varphi\right) \zeta = \eta - r \sin \varphi & -\cos \varphi & \sin \varphi. \end{array} \right.$$

Il vient successivement (les opérations nécessaires étant indiquées d'une manière généralement usitée

$$\left\{ \begin{array}{l|c|c} \left(\xi + \frac{r^2}{2p} \zeta\right) \sin \varphi - \eta \cos \varphi = 0 & \xi - \frac{r^2}{2p} \zeta & -\eta \\ \eta \sin \varphi + \left(\xi - \frac{r^2}{2p} \zeta\right) \cos \varphi = r(1 - \zeta) & \eta & \xi + \frac{r^2}{2p} \zeta, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\left(\xi^2 - \frac{r^4}{4p^2} \zeta^2\right) + \eta^2\right] \sin \varphi = r(1 - \zeta) \eta \\ \left[\left(\xi^2 - \frac{r^4}{4p^2} \zeta^2\right) + \eta^2\right] \cos \varphi = r(1 - \zeta) \; (\xi + \frac{r^2}{2p} \zeta). \end{array} \right.$$

Elevant au carré et ajoutant terme par terme, on trouve finalement

$$(10) \quad [(\xi^2 - \frac{r^4}{4p^2} \zeta^2) + \eta^2]^2 = r^2 (1 - \zeta)^2 \, [(\xi + \frac{r^2}{2p} \zeta)^2 + \eta^2].$$

Sans entrer dans une discussion détaillée, on peut cependant reconnaître immédiatement la propriété suivante de cette surface du 4^{me} ordre. Les sections parallèles au plan xy sont des épicycloïdes engendrées par un point à la distance $\frac{\zeta r^2}{2p}$ du centre du cercle mobile; le cercle fixe et le cercle mobile étant d'ailleurs du même rayon $= \pm \frac{1}{2} r(1-\zeta)$. Quelle que soit la valeur particulière de r, elles possèdent le foyer

$$\zeta = \zeta, \qquad \eta = 0, \qquad \xi = -p\,\frac{(1-\zeta)^2}{2\zeta}.$$

Parmi ces courbes se trouvent la circonférence simple

$$\zeta = 0, \qquad \xi^2 + \eta^2 = r^2$$

et la circonférence double

$$\zeta = 1, \qquad \xi^2 + \eta^2 = \frac{r^4}{4p^2}.$$

Enfin il importe d'établir l'équation de la surface à deux nappes, à laquelle les droites de la congruence (1) sont tangentes doubles. A cet effet, il suffit, comme on sait, d'éliminer α et β entre les équations (10), p. 34, qui, dans le cas actuel, où

$$\gamma = \frac{\alpha^2-\beta^2}{2p}, \qquad \delta = \frac{\alpha\beta}{p},$$

$$\gamma_1 = \frac{\alpha}{p}, \qquad \gamma_2 = -\frac{\beta}{p}$$

prennent la forme

$$(11) \qquad \left\{ \begin{aligned} \zeta &= \frac{p}{p-\alpha+\varepsilon\beta} \\ \xi &= \alpha(1-\zeta) + \frac{\alpha^2-\beta^2}{2p}\,\zeta \\ \eta &= \beta\left(1-\zeta+\frac{\alpha}{p}\,\zeta\right). \end{aligned} \right.$$

La première et la dernière de ces équations fournissent

$$\beta = \pm\sqrt{\frac{p\eta}{\varepsilon\zeta}}, \qquad \alpha = \pm\varepsilon\sqrt{\frac{p\eta}{\varepsilon\zeta}} - p\,\frac{1-\zeta}{\zeta},$$

$$\alpha^2 = -\frac{p\eta}{\varepsilon\zeta} \mp 2\varepsilon p\,\frac{1-\zeta}{\zeta}\sqrt{\frac{p\eta}{\varepsilon\zeta}} + p^2\,\frac{(1-\zeta)^2}{\zeta^2}.$$

En introduisant ces valeurs dans la seconde des équations (11), on obtient

$$(12) \qquad \eta\zeta + \varepsilon\left[\xi\zeta + \frac{p(1-\zeta)^2}{2}\right] = 0.$$

Ainsi, les deux nappes de la surface cherchée ont pour équations

$$\begin{cases} \eta\zeta + i\left[\xi\zeta + \dfrac{p(1-\zeta)^2}{2}\right] = 0 \\ \eta\zeta - i\left[\xi\zeta + \dfrac{p(1-\zeta)^2}{2}\right] = 0. \end{cases}$$

Elles se coupent effectivement suivant l'hyperbole réelle

$$\eta = 0, \qquad \xi\zeta + \frac{p(1-\zeta)^2}{2} = 0$$

et leurs génératrices sont respectivement

$$\zeta = \text{const.}, \qquad \eta = \pm i\left[\xi + \frac{p(1-\zeta)^2}{2\zeta}\right].$$

L'hyperbole équilatère.

Soit à représenter la courbe

$$(1) \qquad \eta = \frac{a+bi}{\xi}.$$

Posant comme précédemment

$$\xi = x + yi, \qquad \eta = X + Yi$$

et séparant les parties réelles et imaginaires, il vient

$$(2) \qquad \begin{cases} X = \dfrac{ax+by}{x^2+y^2} \\ Y = \dfrac{bx-ay}{x^2+y^2} \end{cases}$$

et réciproquement

$$(2^a) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{aX+bY}{X^2+Y^2} \\ y = \dfrac{bX-aY}{X^2+Y^2} \end{cases}$$

Aux deux systèmes de droites $x =$ const. et $y =$ const. correspondent dans le plan supérieur deux systèmes de circonférences qui se coupent orthogonalement. Les courbes du premier système se touchent à l'origine, où elles ont la tangente commune $aX + bY = 0$, et leurs centres sont situés sur la droite $bX - aY = 0$. Les circonférences du second système possèdent à l'origine la tangente commune $bX - aY = 0$, et leurs centres se trouvent sur la droite $aX + bY = 0$. Si l'on projette encore le plan supérieur sur le plan inférieur, alors au point déterminé (x, y) correspond le point d'intersection (différent de l'origine) des deux circonférences correspondantes. Cette relation, d'ailleurs parfaitement symétrique, entre les deux plans permettrait de construire des points correspondants; mais il est facile de trouver une construction purement géométrique.

Les points doubles du plan s'obtiennent en identifiant ξ et η dans l'équation (1). Si l'on pose pour simplifier

$$\begin{cases} a = \rho \cos \nu \\ b = \rho \sin \nu \end{cases}$$

et partant

$$a + bi = \rho (\cos \nu + i \sin \nu) = \rho e^{\nu i},$$

on trouve

$$\xi = \pm \sqrt{\rho}\; e^{\frac{\nu i}{2}}.$$

Il existe par conséquent deux points doubles; leurs coordonnées sont

$$\begin{cases} x = \pm \sqrt{\rho} \cos \dfrac{\nu}{2} \\[2ex] y = \pm \sqrt{\rho} \sin \dfrac{\nu}{2} \end{cases}$$

Lorsque le point inférieur se meut sur la ligne droite (μ)

$$y = x \operatorname{tg} \mu,$$

son image parcourt cette autre droite $(\nu - \mu)$

$$Y = X \operatorname{tg} (\nu - \mu)$$

et lorsque le point (x, y) décrit la circonférence

$$\left\{ \begin{array}{l} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{array} \right| \quad \text{ou} \quad x^2 + y^2 = r^2,$$

son image se meut également sur une circonférence, à savoir

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{\rho}{r}\cos(\nu-\varphi) \\ Y &= \frac{\rho}{r}\sin(\nu-\varphi) \end{aligned}\right| \quad \text{ou} \quad X^2+Y^2=\left(\frac{\rho}{r}\right)^2.$$

La correspondance entre les points des droites μ et $(\nu-\mu)$ est uniforme; en d'autres termes, les ponctuelles μ et $(\nu-\mu)$ sont projectives. Pour établir cette projectivité, il suffit d'une seule couple de points, car à l'origine, considérée comme appartenant à l'une des droites, correspond chaque fois le point à l'infini de l'autre droite. De cette façon, on connaît trois couples de points correspondants, ce qui permet de résoudre le problème suivant: Etant donné sur la droite μ le point D, construire sur la droite $(\nu-\mu)$ le correspondant D', et, dans le cas actuel, la construction est très simple. En effet, si la couple donnée est CC', la parallèle à DC', menée par le point C, détermine sur la droite $(\nu-\mu)$ le point cherché D'. (Voir fig. 6.)

La droite joignant les points correspondants (x, y) et (X, Y) des droites μ et $(\nu-\mu)$ a pour équation

$$(3)\quad \rho\cos^2\mu\,[\eta\cos(\nu-\mu)-\xi\sin(\nu-\mu)]+x\rho\cos\mu\sin(\nu-2\mu)+ \\ +x^2(\xi\sin\mu-\eta\cos\mu)=0,$$

dans laquelle x est envisagé comme un paramètre variable: Elle enveloppe l'hyperbole

$$(4)\quad \xi^2\sin\mu\sin(\mu-\nu)+\xi\eta\sin\nu-\eta^2\cos\mu\cos(\mu-\nu)= \\ =\frac{1}{4}\rho\sin^2(\nu-2\mu)$$

qui dans cette équation est rapportée à son centre et dont les asymptotes sont les droites $\eta=\xi\,\mathrm{tg}(\nu-\mu)$ et $\eta=\xi\,\mathrm{tg}\,\mu$. Lorsque $\mu=\frac{1}{2}\nu$, les deux asymptotes coïncident et la courbe se confond avec la droite $\eta=\xi\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\nu$.

En transformant l'équation (4) à l'aide des formules

$$\left\{\begin{aligned} \xi &= x\cos\frac{1}{2}\nu-y\sin\frac{1}{2}\nu \\ \eta &= x\sin\frac{1}{2}\nu+y\cos\frac{1}{2}\nu \end{aligned}\right.$$

elle prend la forme

$$\frac{x^2}{\rho\cos^2\left(\mu-\frac{1}{2}\nu\right)}-\frac{y^2}{\rho\sin^2\left(\mu-\frac{1}{2}\nu\right)}=1.$$

Il s'ensuit que les axes de l'hyperbole sont respectivement

$$\sqrt{\rho}\cos\left(\mu-\frac{\nu}{2}\right) \quad \text{et} \quad \sqrt{\rho}\sin\left(\mu-\frac{\nu}{2}\right)$$

et que, μ signifiant maintenant un paramètre variable, toutes ces hyperboles sont homofocales. L'excentricité étant $=\sqrt{\rho}$, les foyers communs sont encore les points doubles du plan. D'ailleurs, on vérifie aisément que l'équation (4) peut s'écrire des deux manières suivantes

$$\left[\xi\cos\frac{1}{2}\nu+\eta\sin\frac{1}{2}\nu-\sqrt{\rho}\cos^2\left(\mu-\frac{1}{2}\nu\right)\right]^2=$$

$$=\cos^2\left(\mu-\frac{1}{2}\nu\right)\left[\left(\xi-\sqrt{\rho}\cos\frac{1}{2}\nu\right)^2+\left(\eta-\sqrt{\rho}\sin\frac{1}{2}\nu\right)^2\right],$$

$$\left[\xi\cos\frac{1}{2}\nu+\eta\sin\frac{1}{2}\nu+\sqrt{\rho}\cos^2\left(\mu-\frac{1}{2}\nu\right)\right]^2=$$

$$=\cos^2\left(\mu-\frac{1}{2}\nu\right)\left[\left(\xi+\sqrt{\rho}\cos\frac{1}{2}\nu\right)^2+\left(\eta+\sqrt{\rho}\sin\frac{1}{2}\nu\right)^2\right].$$

De ces deux équations ressort de nouveau la propriété déjà citée des hyperboles en question; de plus, elles font voir que ces courbes possèdent les quatre tangentes communes

$$\eta\mp\sqrt{\rho}\sin\frac{1}{2}\nu=\pm i\left(\xi\mp\sqrt{\rho}\cos\frac{1}{2}\nu\right).$$

Afin de trouver aussi l'enveloppe de la droite

$$(5) \qquad \eta-r\sin\varphi=\frac{\rho\sin(\nu-\varphi)-r^2\sin\varphi}{\rho\cos(\nu-\varphi)-r^2\cos\varphi}(\xi-r\cos\varphi)$$

qui joint les points correspondants

$$\left\{\begin{array}{l} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} X=\frac{\rho}{r}\cos(\nu-\varphi) \\ Y=\frac{\rho}{r}\sin(\nu-\varphi) \end{array}\right.$$

où φ est considéré comme variable et r comme constant, on pourrait éliminer φ entre l'équation (5) mise sous la forme

$$(5^a)\quad \eta[\rho\cos(\nu-\varphi)-r^2\cos\varphi]-\xi[\rho\sin(\nu-\varphi)-r^2\sin\varphi]= = r\rho\sin(2\varphi-\nu)$$

et celle qu'on en déduit en la différentiant par rapport à φ

$$(6)\quad \eta[\rho\sin(\nu-\varphi)+r^2\sin\varphi]+\xi[\rho\cos(\nu-\varphi)+r^2\cos\varphi]= = 2r\rho\cos(2\varphi-\nu).$$

Mais les calculs nécessaires pour opérer cette élimination seraient longs et manqueraient de symétrie, de sorte qu'il vaut mieux résoudre les deux dernières équations par rapport à ξ et η. Toute réduction faite, on trouve pour l'enveloppe cherchée

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\rho^2-r^4}{r\rho}\,\xi &= \frac{3}{2}\rho\cos\varphi+\frac{1}{2}\rho\cos(3\varphi-2\nu)-\frac{1}{2}r^2\cos(3\varphi-\nu)- \\ &\qquad -\frac{3}{2}r^2\cos(\varphi-\nu) \\ \frac{\rho^2-r^4}{r\rho}\,\eta &= \frac{3}{2}\rho\sin\varphi-\frac{1}{2}\rho\sin(3\varphi-2\nu)-\frac{1}{2}r^2\sin(3\varphi-\nu)+ \\ &\qquad +\frac{3}{2}r^2\sin(\varphi-\nu) \end{aligned}\right.$$

Afin de reconnaître la nature de cette courbe, on transforme ces équations au moyen des formules

$$\left\{\begin{aligned} x &= \xi\cos\frac{1}{2}\nu+\eta\sin\frac{1}{2}\nu \\ y &= -\xi\sin\frac{1}{2}\nu+\eta\cos\frac{1}{2}\nu. \end{aligned}\right.$$

Posant ensuite $\varphi-\frac{1}{2}\nu=\psi$, on obtient finalement

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= 2\,\frac{r\rho}{\rho+r^2}\cos^3\psi \\ y &= 2\,\frac{r\rho}{\rho-r^2}\sin^3\psi. \end{aligned}\right.$$

Ce sont là les équations de la développée d'une ellipse. En effet, on sait que la développée de l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

est donnée par les formules

$$\begin{cases} x = \dfrac{a^2 - b^2}{a} \cos^3 \psi \\ y = -\dfrac{a^2 - b^2}{b} \sin^3 \psi. \end{cases}$$

Or, il y a identité entre cette courbe et la courbe trouvée, si a et b satisfont aux équations

$$(8) \qquad \begin{cases} \dfrac{2r\rho}{\rho + r^2} = \dfrac{a^2 - b^2}{a} \\ \dfrac{2r\rho}{\rho - r^2} = -\dfrac{a^2 - b^2}{b} \end{cases}$$

sous la condition $\rho < r^2$. Mais en remplaçant ψ par $-\psi$, c'est-à-dire en comptant l'angle ψ en sens inverse, on voit que dans le cas où $\rho > r^2$, il suffit de substituer à la seconde des équations (8) la suivante

$$\frac{2r\rho}{r^2 - \rho} = -\frac{a^2 - b^2}{b}$$

pour obtenir une valeur positive de b. On en conclut que les ellipses en question et par conséquent aussi leurs développées (7) sont les mêmes pour $r^2 > \rho$ et $r^2 < \rho$. Lorsque $r^2 = \rho$, le petit axe de l'ellipse se réduit à zéro. Dans cette hypothèse, les points (x, y) et (X, Y) se meuvent sur la même circonférence passant par les points doubles du plan et les droites (5) dont on a cherché l'enveloppe, sont parallèles.

Des équations (8) on tire

$$a = \frac{r^2 + \rho}{2r}, \quad b = \frac{r^2 - \rho}{2r},$$

puis

$$a^2 - b^2 = \rho$$

Il s'ensuit que les ellipses dont les courbes (7) représentent les développées sont homofocales, et que leurs foyers sont les points doubles du plan.

On pourrait établir maintenant l'équation de la surface S, à laquelle les droites de la congruence (1) sont tangentes doubles. Mais comme cette surface est imaginaire, elle offre peu d'intérêt. Il n'en est pas de même des courbes réelles suivant lesquelles ses deux nappes se coupent. Pour les trouver, on part des formules (2), après y avoir remplacé X, Y par γ, δ, et x, y par α, β, afin de les mettre en harmonie avec la théorie générale :

$$\begin{cases} \gamma = \dfrac{a\alpha + b\beta}{\alpha^2 + \beta^2} = \rho\,\dfrac{\alpha\cos\nu + \beta\sin\nu}{\alpha^2 + \beta^2} \\[2ex] \delta = \dfrac{b\alpha - a\beta}{\alpha^2 + \beta^2} = \rho\,\dfrac{\alpha\sin\nu - \beta\cos\nu}{\alpha^2 + \beta^2}. \end{cases}$$

On en tire

$$\frac{\partial\gamma}{\partial\alpha} = \gamma_1 = \rho\,\frac{(\beta^2 - \alpha^2)\cos\nu - 2\alpha\beta\sin\nu}{(\alpha^2 + \beta^2)^2}$$

$$\frac{\partial\gamma}{\partial\beta} = \gamma_2 = \rho\,\frac{(\alpha^2 - \beta^2)\sin\nu - 2\alpha\beta\cos\nu}{(\alpha^2 + \beta^2)^2}.$$

Or, γ_2 s'annule lorsque

$$(\alpha^2 - \beta^2)\sin\nu - 2\alpha\beta\cos\nu = 0,$$

c'est-à-dire

$$1^\circ \quad \text{pour} \quad \frac{\beta}{\alpha} = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\nu$$

$$2^\circ \quad \text{»} \quad \frac{\beta}{\alpha} = -\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\nu.$$

Si donc le point (α, β) se meut sur l'une ou l'autre des droites

$$(9) \qquad \begin{cases} \beta = \alpha\operatorname{tg}\dfrac{1}{2}\nu \\[2ex] \beta = -\alpha\operatorname{cotg}\dfrac{1}{2}\nu \end{cases}$$

les droites de la congruence (1) enveloppent une courbe plane dont les équations s'obtiennent en éliminant α et β entre les équations

$$(10) \qquad \begin{cases} \zeta = \dfrac{1}{1 - \gamma_1} \\ \xi = \alpha(1 - \zeta) + \gamma\zeta \\ \eta = \beta(1 - \zeta) + \delta\zeta \end{cases}$$

tout en tenant compte des relations (9). On trouve moyennant la première des équations (10)

1° pour $\beta = \alpha \operatorname{tg} \frac{1}{2}\nu$

$$\alpha = \cos\frac{1}{2}\nu\sqrt{\frac{\rho\zeta}{1-\zeta}}$$

$$\beta = \sin\frac{1}{2}\nu\sqrt{\frac{\rho\zeta}{1-\zeta}}$$

$$\gamma = \cos\frac{1}{2}\nu\sqrt{\frac{\rho(1-\zeta)}{\zeta}}$$

$$\delta = \sin\frac{1}{2}\nu\sqrt{\frac{\rho(1-\zeta)}{\zeta}}$$

2° pour $\beta = -\alpha \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\nu$

$$\alpha = \sin\frac{1}{2}\nu\sqrt{\frac{\rho\zeta}{\zeta-1}}$$

$$\beta = -\cos\frac{1}{2}\nu\sqrt{\frac{\rho\zeta}{\zeta-1}}$$

$$\gamma = -\sin\frac{1}{2}\nu\sqrt{\frac{\rho(\zeta-1)}{\zeta}}$$

$$\delta = \cos\frac{1}{2}\nu\sqrt{\frac{\rho(\zeta-1)}{\zeta}}$$

et on remarquera que les premières formules répondent au cas où $\zeta < 1$, et les secondes au cas où $\zeta > 1$. Les deux autres des équations (10) fournissent ensuite

1°
$$(11)\quad \begin{cases} \xi = 2\cos\frac{1}{2}\nu\sqrt{\rho\zeta(1-\zeta)} \\ \eta = 2\sin\frac{1}{2}\nu\sqrt{\rho\zeta(1-\zeta)} \end{cases}$$

2°
$$(11^a)\quad \begin{cases} \xi = -2\sin\frac{1}{2}\nu\sqrt{\rho\zeta(\zeta-1)} \\ \eta = 2\cos\frac{1}{2}\nu\sqrt{\rho\zeta(\zeta-1)} \end{cases}$$

Les enveloppes cherchées sont ainsi

1° l'ellipse

$$(12)\quad \begin{cases} \dfrac{\xi^2}{4\rho\cos^2\frac{1}{2}\nu} + \left(\zeta - \dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{\eta^2}{4\rho\sin^2\frac{1}{2}\nu} + \left(\zeta - \dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4} \\ \eta = \xi\operatorname{tg}\frac{1}{2}\nu \end{cases}$$

et 2° l'hyperbole

$$(12^a)\quad \begin{cases} \left(\zeta - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{\xi^2}{4\rho\sin^2\frac{1}{2}\nu} = \dfrac{1}{4} \\ \left(\zeta - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{\eta^2}{4\rho\cos^2\frac{1}{2}\nu} = \dfrac{1}{4} \\ \eta = -\xi\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\nu. \end{cases}$$

Lorsque le point (α, β) est assujetti à rester sur la courbe quelconque $F(\alpha, \beta) = 0$, les droites de la congruence engendrent une surface réglée. Or, on se souviendra que la section faite par le plan $\zeta = \text{const.}$ dans cette surface, possède des foyers dont les coordonnées sont données par les formules (11) et (11^a), et que le lieu géométrique de ces foyers, ζ étant considéré comme variable, est précisément soit l'ellipse, soit l'hyperbole qui viennent d'être trouvées. On vérifiera ce fait dans deux cas qui se distinguent par leur simplicité.

Premier cas. Le point (α, β) se meut sur la droite

$$\beta = \alpha \operatorname{tg} \mu,$$

son image dans le plan $\zeta = 1$ sur la droite

$$\delta = \gamma \operatorname{tg} (\nu - \mu).$$

Les génératrices de la surface correspondante ont alors pour équations

$$\frac{\xi - \alpha}{\frac{a + b \operatorname{tg} \mu}{(1 + \operatorname{tg}^2 \mu)\alpha} - \alpha} = \frac{\eta - \alpha \operatorname{tg} \mu}{\frac{b - a \operatorname{tg} \mu}{(1 + \operatorname{tg}^2 \mu)\alpha} - \alpha \operatorname{tg} \mu} = \zeta$$

ou

$$\begin{cases} \xi = \alpha(1 - \zeta) + \rho\zeta \dfrac{\cos(\nu - \mu)\cos \mu}{\alpha} \\ \eta = \alpha(1 - \zeta)\operatorname{tg} \mu + \rho\zeta \dfrac{\sin(\nu - \mu)\cos \mu}{\alpha}. \end{cases}$$

En éliminant α entre ces deux équations, il vient

$$(13) \qquad (\xi \sin \mu - \eta \cos \mu)\,[\xi \sin(\nu - \mu) - \eta \cos(\nu - \mu)] = \\ = \rho\zeta(\zeta - 1)\sin^2(2\mu - \nu).$$

C'est l'équation d'un hyperboloïde à une nappe. Si on la transforme encore à l'aide des formules

$$(14) \qquad \begin{cases} \xi = x \cos \frac{1}{2}\nu - y \sin \frac{1}{2}\nu \\ \eta = x \sin \frac{1}{2}\nu + y \cos \frac{1}{2}\nu \end{cases}$$

elle prend la forme plus simple

$$\frac{x^2}{4\rho\zeta(1 - \zeta)\cos^2(\mu - \frac{1}{2}\nu)} - \frac{y^2}{4\rho\zeta(1 - \zeta)\sin^2(\mu - \frac{1}{2}\nu)} = 1$$

et qui permet de reconnaître que la section de la surface déterminée par le plan $\zeta = \text{const.}$ est une hyperbole ayant pour foyers les points

$$\zeta = \text{const.}, \quad y = 0, \quad x = \pm 2\sqrt{\rho\zeta(1 - \zeta)}$$

ou $\quad \zeta = \text{const.}, \quad y = \pm 2\sqrt{\rho\zeta(\zeta-1)}, \quad x = 0,$

suivant que ζ est plus petit ou plus grand que l'unité. Exprimées en ξ, η, les coordonnées des foyers deviennent

pour $\zeta < 1$:	pour $\zeta > 1$:
$\left\{\begin{array}{l} \zeta = \text{const.} \\ \xi = \pm 2\cos\frac{1}{2}\nu\sqrt{\rho\zeta(1-\zeta)} \\ \eta = \pm 2\sin\frac{1}{2}\nu\sqrt{\rho\zeta(1-\zeta)} \end{array}\right.$	$\left\{\begin{array}{l} \zeta = \text{const.} \\ \xi = \mp 2\sin\frac{1}{2}\nu\sqrt{\rho\zeta(\zeta-1)} \\ \eta = \pm 2\cos\frac{1}{2}\nu\sqrt{\rho\zeta(\zeta-1)} \end{array}\right.$

et ce sont bien là les formules (11) et (11[a]). On peut remarquer encore que l'hyperbole (4) est le contour apparent sur le plan xy de l'hyperboloïde (13).

Deuxième cas. Le point (α, β) se meut sur la circonférence

$$\alpha = r\cos\varphi, \quad \beta = r\sin\varphi$$

et par conséquent son image sur la circonférence

$$\gamma = \frac{\rho}{r}\cos(\nu-\varphi), \quad \delta = \frac{\rho}{r}\sin(\nu-\varphi).$$

Dans ce cas, les génératrices de la surface réglée sont

$$\left\{\begin{array}{l} \xi = \cos\varphi\left[r(1-\zeta) + \zeta\frac{\rho}{r}\cos\nu\right] + \sin\varphi\,\zeta\frac{\rho}{r}\sin\nu \\ \eta = \cos\varphi\,\zeta\frac{\rho}{r}\sin\nu + \sin\varphi\left[r(1-\zeta) - \zeta\frac{\rho}{r}\cos\nu\right] \end{array}\right.$$

et l'élimination de φ entre elles fournit

$$(15)\quad (\xi^2+\eta^2)\left[r^2(1-\zeta)^2+\zeta^2\frac{\rho^2}{r^2}\right] + 2\zeta(1-\zeta)\rho\cos\nu(\eta^2-\xi^2) - $$
$$- 4\xi\eta\rho(1-\zeta)\sin\nu = \left[r^2(1-\zeta)^2 - \zeta^2\frac{\rho^2}{r^2}\right]^2.$$

C'est l'équation de la surface cherchée. Celle-ci est du 4[me] ordre et son contour apparent sur le plan xy est la courbe (7). Par la transformation au moyen des formules (14), l'équation (15) prend la forme

$$(15^a)\quad \frac{x^2}{\left[r(1-\zeta)+\frac{\rho}{r}\zeta\right]^2} + \frac{y^2}{\left[r(1-\zeta)-\frac{\rho}{r}\zeta\right]^2} = 1.$$

Elle montre que les sections parallèles au plan xy de la surface sont des ellipses. Les foyers de l'une quelconque de ces courbes sont les points déjà trouvés dans le cas précédent. La surface (15^a) est facile à construire. Pour $r^2 = \rho$, elle devient le *conocuneus de Wallis*

$$\frac{x^2}{\rho} + \frac{y^2}{\rho\,(1-2\zeta)^2} = 1,$$

ayant pour directrice la droite $\zeta = \frac{1}{2}$, $y = 0$, et pour plan directeur $x = 0$.

La circonférence.

Soit

$$(1) \qquad \xi^2 + \eta^2 = a^2$$

et a une constante réelle. Alors

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{\xi}{\sqrt{a^2 - \xi^2}}.$$

Il s'ensuit que $\xi = 0$ et $\xi = \pm a$ sont les points singuliers de la fonction η. Les points qui, après la projection du plan supérieur sur le plan inférieur, deviennent les points doubles du plan, sont

$$\xi = \pm \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

De l'équation (1) on tire

$$(2) \qquad \begin{cases} X^2 - Y^2 = y^2 - x^2 + a^2 \\ XY = -\,xy. \end{cases}$$

Par conséquent, lorsque $y^2 - x^2 + a^2 = \text{const.}$, c'est-à-dire lorsque le point ξ se meut sur une hyperbole équilatère, le point η décrit aussi une hyperbole équilatère. La même chose a lieu dans le cas où $xy = \text{const.}$ Aux points $x = \pm\alpha$, $y = \pm\beta$ du plan inférieur correspondent ainsi deux points symétriques par rapport à l'origine du plan supérieur.

La représentation transmise par la fonction η est connue. On sait, par exemple, que lorsque le point (α, β) parcourt une circonférence du centre O, son image (γ, δ) décrit une courbe de *Cassini*.

Afin d'établir d'autres relations entre les deux plans, on posera

$$(3) \qquad \begin{cases} x + yi = a \cos(\varphi + \psi i) \\ \mathrm{X} + \mathrm{Y}i = a \sin(\varphi + \psi i). \end{cases}$$

Ces valeurs satisfont identiquement à l'équation de la circonférence, et l'introduction de la variable $(\varphi + \psi i)$ constitue une représentation des plans $\zeta = 0$ et $\zeta = 1$ sur un troisième plan, celui de la variable $(\varphi + \psi i)$. Des équations (3), si l'on désigne par $\cos h\psi$, $\sin h\psi$ (*cosinus* et *sinus hyperboliques* de ψ), respectivement les expressions

$$\frac{1}{2}\left(e^{\psi} + e^{-\psi}\right) \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}\left(e^{\psi} - e^{-\psi}\right)$$

il résulte

$$(4) \begin{cases} x = a \cos\varphi \cos h\psi \\ y = -a \sin\varphi \sin h\psi \end{cases} \qquad \Bigg| \qquad (4^a) \begin{cases} \mathrm{X} = a \sin\varphi \cos h\psi \\ \mathrm{Y} = a \cos\varphi \sin h\psi \end{cases}$$

En éliminant premièrement ψ entre les équations (4), puis entre les équations (4^a), on trouve

$$\frac{x^2}{a^2 \cos^2\varphi} - \frac{y^2}{a^2 \sin^2\varphi} = 1 \quad \Bigg| \quad \frac{\mathrm{X}^2}{a^2 \sin^2\varphi} - \frac{\mathrm{Y}^2}{a^2 \cos^2\varphi} = 1.$$

Interprétées dans le même plan, ces deux équations représentent un seul système d'hyperboles homofocales, puisque $\cos\varphi = \sin\left(\frac{1}{2}\pi - \varphi\right)$. Si donc le point inférieur parcourt une des hyperboles, son image se meut en général sur une autre hyperbole du système. Les deux hyperboles correspondantes se confondent dans les cas où $\cos^2\varphi = \sin^2\varphi$.

Eliminant en second lieu φ entre les équations (4) et (4^a), on obtient

$$(5) \quad \frac{x^2}{a^2 \cos^2 h\psi} + \frac{y^2}{a^2 \sin^2 h\psi} = 1 \quad \Bigg| \quad (5^a) \quad \frac{\mathrm{X}^2}{a^2 \cos^2 h\psi} + \frac{\mathrm{Y}^2}{a^2 \sin^2 h\psi} = 1.$$

Ce sont des ellipses homofocales telles que chaque ellipse se correspond à elle-même sans que pour cela les points correspondants coïncident.

La construction de points correspondants n'offre aucune difficulté. En effet, deux points correspondants P, P′ étant donnés, on détermine d'abord les axes des ellipses passant par ces points, ce qui se fait facilement à l'aide des relations $x^2 + \mathrm{X}^2 = a^2 \cos^2 h\psi$,

$y^2 + Y^2 = a^2 \sin^2 h\psi$, ensuite, afin d'obtenir d'autres couples de points sur la même ellipse, on peut se servir du procédé indiqué dans la fig. 7, dans laquelle $OA = a \cos h\psi$, $OB = a \sin h\psi$, angle AOC = angle $EOF = \varphi$.

Comme dans les cas précédents, on cherchera maintenant l'enveloppe de la droite qui joint le point (x, y) au point correspondant (X, Y). L'équation de cette droite est

$$\eta + a \sin\varphi \sin h\psi = \operatorname{tg} h\psi \, \frac{\cos\varphi + \sin\varphi}{\sin\varphi - \cos\varphi} (\xi - a \cos\varphi \cos h\psi)$$

ou

$$(6) \qquad \sin\varphi (\eta - \xi \operatorname{tg} h\psi) - \cos\varphi (\eta + \xi \operatorname{tg} h\psi) = - a \sin h\psi.$$

Si en premier lieu on y considère φ comme paramètre variable, on est conduit à l'enveloppe suivante

$$(7) \qquad \frac{\xi^2}{\frac{1}{2} a^2 \cos^2 h\psi} + \frac{\eta^2}{\frac{1}{2} a^2 \sin^2 h\psi} = 1.$$

Cette équation représente encore des ellipses homofocales, ayant pour foyers les points doubles du plan. Deux ellipses appartenant l'une au système (5), l'autre au système (7), qui répondent à la même valeur de ψ, sont semblables et semblablement placées. Le parallélogramme $ABA'B'$ (fig. 7), inscrit à la première, est circonscrit à la seconde.

Si, au contraire, dans l'équation (6), mise sous la forme

$$(6^a) \qquad \eta (\sin\varphi - \cos\varphi) + a \sin h\psi = \xi \operatorname{tg} h\psi (\cos\varphi + \sin\varphi)$$

on envisage ψ comme paramètre variable, et que l'on différentie par rapport à ψ, il vient

$$a \cos h\psi = \xi \, \frac{\cos\varphi + \sin\varphi}{\cos^2 h\psi},$$

d'où l'on tire

$$(8) \qquad \cos^3 h\psi = \xi \, \frac{\cos\varphi + \sin\varphi}{a}$$

et l'équation (6^a) fournit ensuite

$$(8^a) \qquad \sin^3 h\psi = \eta \, \frac{\sin\varphi - \cos\varphi}{a}.$$

Les deux équations (8) et (8^a) ou l'équation unique qui s'ensuit par l'élimination de ψ

$$(9) \qquad \left(\xi\,\frac{\sin\varphi + \cos\varphi}{a}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\eta\,\frac{\sin\varphi - \cos\varphi}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$$

représentent l'enveloppe cherchée. Or, on reconnaît que l'équation (9) est celle de la développée d'une hyperbole. En effet, la développée de l'hyperbole

$$\frac{\xi^2}{\alpha^2} - \frac{\eta^2}{\beta^2} = 1$$

est donnée par l'équation

$$(10) \qquad \left(\frac{\alpha\xi}{\alpha^2 + \beta^2}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{\beta\eta}{\alpha^2 + \beta^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$$

et les équations (9) et (10) sont identiques pourvu que l'on ait

$$\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha} = \frac{a}{\sin\varphi + \cos\varphi}$$

$$\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\beta} = \frac{a}{\sin\varphi - \cos\varphi},$$

c'est-à-dire si

$$\alpha = \frac{1}{2}\,a\,(\sin\varphi + \cos\varphi)$$

$$\beta = \frac{1}{2}\,a\,(\sin\varphi - \cos\varphi)$$

et par la suite

$$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{1}{2}\,a^2.$$

Ainsi les hyperboles (φ étant maintenant considéré comme variable), dont les courbes (9) sont les développées, sont homofocales et leurs foyers sont les points doubles du plan.

Dans le but de trouver l'intersection réelle des deux nappes de la surface S, on formera γ_1 et γ_2 ou, si l'on ne veut pas changer de notation $\frac{\partial X}{\partial x}$ et $\frac{\partial X}{\partial y}$.

D'abord des équations (2) on tire

$$2X^2 = a^2 + y^2 - x^2 + \sqrt{(a^2 + y^2 - x^2)^2 + 4x^2y^2},$$

où la racine est nécessairement positive. Ensuite il vient

$$\frac{\partial X}{\partial y} = y\,\frac{a^2 + x^2 + y^2 + \sqrt{(a^2 + y^2 - x^2)^2 + 4x^2y^2}}{2X\sqrt{(a^2 + y^2 - x^2)^2 + 4x^2y^2}}$$

Or, $\frac{\partial X}{\partial y}$ ne peut s'annuler que pour $y = 0$. Dans cette hypothèse

$$Y = 0, \quad X = \pm\sqrt{a^2 - x^2} = \pm\, a \cos\lambda,$$

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \mp \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \mp \frac{\cos\lambda}{\sin\lambda},$$

où, pour simplifier, on a posé $x = a\cos\lambda$. En introduisant ces valeurs dans les équations (10^a), p. 34, à savoir

$$\begin{cases} \zeta = \dfrac{1}{1 - \dfrac{\partial X}{\partial x}} \\ \xi = x + (X - x)\,\zeta \\ \eta = y + (Y - y)\,\zeta \end{cases}$$

on obtient

$$\begin{cases} \zeta = \dfrac{\sin\lambda}{\sin\lambda \pm \cos\lambda} \\ \xi = \dfrac{\pm\, a}{\sin\lambda \pm \cos\lambda} \\ \eta = 0. \end{cases}$$

L'élimination de λ entre les deux premières de ces équations donne

$$(11) \qquad \eta = 0, \; \frac{\xi^2}{\frac{1}{2}a^2} - \frac{\left(\zeta - \frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{4}} = 1.$$

La courbe cherchée est par conséquent une hyperbole dont le centre est le point $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = \frac{1}{2}$ et le demi-axe réel $= \frac{a}{\sqrt{2}}$.

Si, en dernier lieu, on cherche les surfaces réglées, engendrées par les droites de la congruence donnée :

1° Lorsque le point inférieur est assujetti à rester sur l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2\cos^2 h\psi} + \frac{y^2}{a^2\sin^2 h\psi} = 1.$$

et 2° lorsqu'il se meut sur l'hyperbole

$$\frac{x^2}{a^2 \cos^2 \varphi} - \frac{y^2}{a^2 \sin^2 \varphi} = 1$$

on trouve dans le premier cas l'hyperboloïde

$$\frac{\xi^2}{a^2 \cos^2 h\psi} + \frac{\eta^2}{a^2 \sin^2 h\psi} = \zeta^2 + (1 - \zeta)^2$$

et, dans le second cas, la surface du 4^{me} ordre

$$\frac{\xi^2}{a^2 [\zeta \sin \varphi + (1 - \zeta) \cos \varphi]^2} - \frac{\eta^2}{a^2 [\zeta \cos \varphi - (1 - \zeta) \sin \varphi]^2} = 1.$$

Dans les deux cas, on constate aisément que les sections faites dans ces surfaces par le plan $\zeta = \text{const.}$ sont homofocales et que le lieu géométrique des foyers, ζ étant de nouveau variable, est précisément l'hyperbole (11). Le contour apparent sur le plan xy de l'hyperboloïde est l'ellipse (7), celui de la surface du 4^{me} ordre est la courbe, représentée par l'équation (9).

INFLUENCE DE L'ACIDE BORIQUE

SUR DIFFÉRENTES FERMENTATIONS

Communication de M. A. HERZEN.

La présence d'une certaine quantité d'acide borique exerce sur la marche de certaines fermentations une influence très curieuse, tantôt favorable, tantôt défavorable. Ainsi :

1° La transformation de l'amidon en glucose, au moyen du ferment salivaire ou pancréatique, n'est point influencée par l'acide borique, même si le véhicule de l'infusion est une *solution saturée* d'acide borique.

2° La transformation du glucose en alcool est *favorisée* par la présence de l'acide borique, même en très petite quantité; le moût, par exemple, fermente plus vite et donne un vin con-