Zeitschrift: Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Herausgeber: Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Band: 27 (1891-1892)
Heft: 104

Artikel: Théorie des carrés magiques
Autor: Mayor, Paul
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-262871

THÉORIE DES CARRÉS MAGIQUES

PAR

Paul MAYOR.

(Pl. XIV, fig. 1-16.)

Les carrés magiques sont des tableaux composés de cases disposées en carré, dans chacune desquelles on inscrit un chiffre de la série 1, 2, 3, 4, etc., de manière à ce que les sommes des chiffres, soit des colonnes horizontales ou verticales, soit des diagonales, soient toutes égales entre elles. Aucun chiffre ne doit paraître plus d'une fois dans un carré.

On désigne les carrés magiques d'après le nombre de cases qu'il y a dans une des colonnes. Le carré de n aura donc n cases par colonne, un nombre total de n^2 cases, le nombre des colonnes, y compris les diagonales, sera de $2(n+1)$ et la somme commune, aux unes et aux autres, sera égale à $\frac{(n^3+n)}{2}$. Le carré de 5 (fig. 1), par exemple, aura 25 cases, et l'addition des chiffres dans chaque colonne donnera un total de $\frac{5^3+5}{2} = 65$.

Il y a trois classes de ces carrés : Les « impairs », ce sont ceux de 1, de 3, de 5, de 7, de 9, etc.; les « pairs », ce sont ceux de 6, de 10, de 14, de 18, etc.; les « doubles pairs », ce sont ceux de 4, de 8, de 12, de 16, de 20, etc.

Nous voulons indiquer une méthode qui permettra de construire toute espèce de carrés magiques et de saisir, en même temps, très facilement le pourquoi de leur construction.

En premier lieu, on numérotera les cases, de la manière indiquée dans le tableau figure 2. D'après cette disposition, dans tous les carrés, la somme des chiffres de chacune des diagonales *d, d,* et dans les carrés impairs la somme des chiffres de chacune des colonnes du milieu *c, c,* donne le résultat demandé dans un carré magique. Les chiffres augmenteront aussi de valeur d'une case à l'autre, partout, dans le sens de gauche à droite, de haut en bas et suivant la direction de chacune des diagonales, d'une quantité toujours égale. Cet accroissement est de un dans les colonnes horizontales et d'un nombre égal à celui du chiffre du carré dans les colonnes verticales. La somme des chiffres de chacune des colonnes horizontales et verticales augmentera aussi d'une colonne à l'autre d'une quantité constante. Dans le tableau figure 3, cette augmentation est de 6 pour les colonnes verticales, de 36 pour les horizontales et d'une manière générale de n et de n^2 réciproquement dans ces deux derniers cas. Ensuite, la moyenne des totaux de deux colonnes quelconques a et a', b et b', d et d', f et f', etc., situées symétriquement l'une par rapport à l'autre, donnera partout le même résultat, qui sera la somme commune demandée. Ceci est si facile à voir par inspection, ou à démontrer par l'arithmétique ou l'algèbre, que nous croyons inutile d'en faire la démonstration. On obtiendra cette moyenne, dans les carrés, en opérant la transposition réciproque de la moitié des chiffres de chacune des colonnes dans sa symétrique. Si en faisant cette opération, on ne changeait rien au total des diagonales et, dans les carrés impairs, au total des colonnes centrales, on aurait un carré magique, formé suivant toutes les règles. Pour ne rien changer à ce total, il faut que les transpositions des chiffres des diagonales et des centrales ne soient jamais faites autrement que par paires et symétriquement. Par exemple, si dans le tableau ci-dessus on a à transposer 36 avec 6, il faut en même temps transposer 31 avec 1. De même on ne transposera pas 26 avec 29, sans transposer aussi 8 avec 11. Les chiffres transposés ainsi par paires et symétriquement, pourvu qu'ils ne soient pas situés sur les diagonales ou sur les colonnes centrales, pourront au besoin servir à une nouvelle transposition, ce qui n'est pas le cas pour les chiffres transposés isolément. Par exemple, après avoir effectué ces dernières transpositions par paire, on pourra de nouveau, si cela est nécessaire, transposer 1 et 6, 31 et 36, 26 et 8 et 29 et 11. Mais si on avait effectué, par exemple, la transposition de 32 avec 2, isolément, on ne pourrait former le carré magique, au moins d'après notre méthode, si on faisait une nouvelle transposition de 32 avec 5 et de 35 avec 2.

Il y aura donc trois espèces de transpositions de chiffres, les transpositions verticales, horizontales et verticales-horizontales ou doubles. Ces diverses transpositions équivalent à inscrire les chiffres transposés dans les cases en comptant, dans le premier cas de gauche à droite, en commençant par les cases du bas, dans le second cas de droite à gauche, en commençant par les cases supérieures, et dans le dernier cas, en sens inverse du numérotage primitif. Un trait vertical, figure 4, dans une case, indiquera que le chiffre qui incombe à cette case, de par la numérotation primitive, devra être transposé verticalement ; un trait horizontal indiquera une transposition horizontale et une croix une double transposition. Le carré magique de 4, figure 5, est la traduction du carré figure 4, les chiffres 1 et 16, 4 et 13 permutent par double transposition ; les chiffres 14 et 15, 2 et 3 par transposition horizontale ; les chiffres 5 et 9, 8 et 12 par transposition verticale ; les chiffres 6, 7, 10 et 11 restent en place. Il y a donc eu ici 2 doubles transpositions, 4 transpositions simples, ce qui équivaut à un total de 8 transpositions ou de 16 chiffres transposés.

Nous donnons encore ci-dessous, figures 6, 7, 8 et 9, quatre carrés de 4, tous différents les uns des autres.

La règle générale, pour construire les carrés magiques, est donc de numéroter les cases toujours suivant le même sens, de faire permuter la moitié des chiffres de chaque colonne avec le même nombre de chiffres de la symétrique, de faire les transpositions sur les diagonales par paires et symétriquement, enfin de ne pas transposer une seconde fois les chiffres qui l'o t été déjà isolément.

Nous donnons, figures 10 et 11, deux spécimens du carré de 8. Les figures 12 et 13 représentent deux carrés pairs, l'un de 10, l'autre de 6. Dans les cases n^os 3, 13, 18 et 33 de ce dernier, les signes indiquent une seconde transposition des chiffres, après une première double transposition.

On voit d'un seul coup d'œil que les tableaux 6-12 deviendraient des carrés magiques, si on remplaçait les signes par les chiffres, parce que ces signes indiquent que la moitié des chiffres de chacune des colonnes doit permuter entre symétriques et que, sur les diagonales, les transpositions des chiffres doivent s'effectuer par paire et symétriquement.

Dans les carrés impairs, de 3, 5, 7, 9, etc., il y a, d'après la règle, à faire 1 $^1/_2$, 2 $^1/_2$, 3 $^1/_2$, 4 $^1/_2$, etc., transpositions de chiffres dans chaque colonne. Les transpositions entières s'effectuent de la même manière que dans les autres carrés, mais les demi-transpositions se font par l'échange des chiffres des colonnes centrales avec les chiffres des autres colonnes. De même que sur les diagonales et pour les mêmes raisons, ces demi-transpositions doivent être faites par paires et symétriquement par rapport au centre du carré.

Nous indiquerons le signe de la demi-transposition par un trait, accompagné d'un point placé de manière à montrer dans quel sens doit se faire la permutation des chiffres. Dans le carré de 5, figure 14, il y a quatre demi-permutations horizontales, ce sont celles des chiffres 3 et 4, 6 et 8, 18 et 20 et 22 et 23, ainsi que quatre demi-permutations verticales, celle des chiffres 16 et 11, 2 et 12, 14 et 24 et 10 et 15. Le carré figure 14 donne le carré figure 1.

On obtient des variations multiples des carrés magiques, en faisant permuter les colonnes entre elles, avant ou après la formation des carrés. Dans le premier cas, quel que soit le carré, et dans le second cas, lorsqu'il s'agit des carrés doubles-pairs et impairs, la seule condition voulue est que cette opération s'effectue symétriquement par rapport à l'un des axes du carré. Ainsi pour former de nouveaux carrés, d'après celui qui est donné figure 11, on ferait permuter les colonnes : a avec a', g avec g', b avec b' en même temps que b' et c, f' et h en même temps que f et h', etc.; suivant toutes les combinaisons permises, une seule ou plusieurs à la fois et suivant l'ordre qu'on voudra.

Dans les carrés pairs, on ne doit faire permuter entre elles que les colonnes symétriques, par exemple, figure 13, a et a', b et b', d et d', etc. Autrement on amènerait, sur les diagonales, des chiffres qui auparavant auraient été transposés isolement.

Nous terminons ce sujet en donnant un exemple de ce que nous nommerons le cube magique, fig. 15 et 16. Il s'agit de former six carrés magiques équivalents, un carré pour chacune des faces du cube. Dans ce cas nous avons choisi le carré de 5. Le plus petit chiffre est 1, le plus grand 158, la somme commune aux 60 colonnes et aux douze diagonales est de 390. Il s'agit de ne pas dépasser ces chiffres, c'est-à-dire de choisir, dans la série 1-158, 150 chiffres, pour former le cube magique de manière à ce que le total commun aux colonnes ne soit pas supérieur à 390. C'est un problème dont la solution présente quelques difficultés; nous le donnons à résoudre à ceux que la question intéresse.