

Zeitschrift: Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Herausgeber: Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Band: 40 (1904)
Heft: 151

Artikel: Quelques considérations sur l'axiome de la droite
Autor: Kool, C.-J.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-284141>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 30.03.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

QUELQUES CONSIDÉRATIONS

SUR

L'AXIOME DE LA DROITE

PAR

C.-J. KOOL

Cet axiome que, pour éviter les longueurs, je nommerai dans la suite brièvement l'axiome α , énonce que par deux points on ne peut mener qu'une seule droite. Or, si l'on définit la droite : le chemin le plus court entre deux points — et c'est là, que je sache, sa définition aujourd'hui admise par la très grande majorité des mathématiciens et à laquelle je me rallie volontiers — on peut formuler l'axiome α également en disant que deux points ne sauraient être unis que par un seul chemin qui soit le plus court possible.

L'objet principal de la présente note est de montrer qu'à l'encontre de ce qu'on a admis jusqu'à ce jour, cette dernière vérité, si évidente qu'elle soit, ne peut pas être classée parmi les axiomes dans le sens strict et rigoureux de ce mot.

Mais, avant d'aborder cette tâche, je ne crois pas superflu de répondre d'avance à une objection que ceux auxquels les considérations géométriques ne sont pas familières, sont sans doute disposés à me faire.

Ces personnes prétendront que le fait même de parler

d'un chemin le plus court possible entre deux points, prouve suffisamment et amplement qu'il n'existe qu'un seul de ces chemins. En d'autres termes, elles prétendront que poser la condition d'un minimum c'est admettre implicitement et forcément que la grandeur qui satisfait à cette condition est unique, c'est à dire ne se trouve pas représentée deux ou plusieurs fois dans la réalité.

Eh bien, une telle prétention est fausse. Pour se rendre sur une surface sphérique d'un point quelconque à un autre point diamétralement opposé, il y a certains chemins dont la longueur est moindre que celle de tous les autres. Ce sont, comme l'on sait, les chemins qui coïncident avec les grands cercles de la surface, lesquels passent par les dits deux points. Or, le nombre de ces grands cercles étant infini, celui des chemins dont il vient d'être parlé l'est également. Il y a donc ici une infinité de chemins qui sont tous le plus court possible, c'est à dire qui tous ont une longueur minimum.

Autre exemple :

Imaginons un ellipsoïde de rotation et posons la question : quel est le chemin le plus court pour se rendre d'un point P situé sur l'axe de rotation à la surface du corps ?

Evidemment la réponse sera : chacun des chemins qui coïncident avec une normale abaissée du point P à la dite surface. Or, comme le nombre de ces normales est infiniment grand, celui des chemins en question le sera également. Tous ont une longueur minimum.

Il serait facile de multiplier ces exemples, et le lecteur voit donc que, si l'on ne veut pas restreindre par une opinion préconçue le champ de ses considérations et de ses recherches, si, en d'autres termes, l'on tient à traiter le sujet qui nous occupe d'une manière vraiment scientifique, il faudra nécessairement admettre à priori qu'il existe entre deux points une infinité de chemins qui sont tous le plus court possible.

Je veux encore faire une autre remarque avant d'entrer en matière.

On nomme en général « axiome » une vérité qui est évidente par elle-même. Mais toute vérité évidente par elle-même ne mérite pourtant pas le nom d'axiome.

Si, par exemple, on affirme que pour se rendre le long d'un chemin donné d'un point A à un point B, il faudra passer par tous les points intermédiaires, par tous les points donc qui sont plus rapprochés de A que B, c'est là sans doute une vérité évidente. Toutefois ce n'est pas un axiome. C'est tout bonnement une vérité qui découle avec nécessité du sens qu'on attribue dans le langage usuel aux deux verbes : *se rendre* et *passer par*, et qui, du reste, n'exprime aucun fait nouveau. C'est en effet exactement comme si on disait : « Si l'on va de A à B en passant par les points intermédiaires C, D, E, etc., on passera par tous ces points en se rendant de A à B par le même chemin ». Il est clair qu'on n'exprime par là aucun jugement, ni qu'on n'énonce aucun fait nouveau; on dit simplement a est égal à a , a étant une grandeur déterminée quelconque.

Aussi, pour mériter le nom d'axiome, la vérité énoncée ne doit pas découler du sens même des termes employés; elle doit être autre chose qu'une pure tautologie. Il faut qu'elle exprime un fait nouveau, un fait qui n'est pas compris dans les termes mêmes qui l'énoncent. Or il est évident que ce fait ne nous saurait être révélé qu'à l'aide de nos sens, grâce auxquels et par lesquels seuls nous sommes en rapport avec le monde extérieur où l'ensemble des faits se produisent.

Nous croyons donc pouvoir définir « l'axiome géométrique », dans l'acception rigoureuse de ce mot, tout jugement porté sur une ou sur plusieurs grandeurs géométriques, telles que points, lignes, angles, surfaces, etc., lequel jugement découle directement, sans raisonnement intermé-

diaire, d'un fait qui se révèle à nous par les impressions qu'il produit sur un ou sur plusieurs de nos sens, et qui ne peut pas être déduit d'un autre fait dont la vérité s'imposerait à notre esprit d'une façon plus impérieuse, plus pressante que la sienne.

Ayant ainsi fixé le sens que nous allons attribuer dans cette note au mot « axiome », il nous reste avant d'entamer notre tâche, à indiquer brièvement le sens exact de l'assertion qu'énonce le susdit axiome α . Car, si évident que ce sens puisse être aux yeux de la grande majorité des lecteurs, plusieurs écrits sur la matière nous ont montré qu'il n'est pas toujours bien compris.

Nous faisons donc observer en premier lieu que les deux points dont il s'agit dans cet axiome, sont implicitement supposés se trouver dans un état de repos, l'un par rapport à l'autre, en d'autres mots, qu'ils sont supposés maintenir constamment leurs mêmes positions relatives. Si l'on voulait rendre l'axiome vrai également pour des points qui se déplacent, l'un par rapport à l'autre, il faudrait introduire dans sa rédaction l'élément du temps, et le rédiger par exemple ainsi : « Par deux points on ne saurait « à un moment donné » mener qu'une seule droite. » Mais il est évident qu'en énonçant l'axiome α , les mathématiciens n'ont pas l'intention de lui accorder un tel caractère général, en vertu duquel il serait aussi applicable à des points variant de position relative d'un instant à l'autre, et il n'est pas douteux que, dans leur conception de l'axiome, les deux points en question se trouvent dans un état d'immobilité relative permanente.

Ces points sont-ils par eux également supposés immobiles dans le sens absolu de ce mot?

A cette question nous pouvons franchement répondre par la négative. D'abord, pour le motif bien simple qu'on ne saurait affirmer qu'une immobilité absolue est chose possible dans l'univers. Pendant longtemps les savants

ont cru devoir admettre cette possibilité en regard des lois d'inertie qui régissent le mouvement des corps, et plus particulièrement en regard de la tension qui se développe invariablement à l'intérieur de chaque corps tournant autour d'un axe, peu importe d'ailleurs la position et le mouvement de cet axe dans le monde. Mais actuellement ils pensent plutôt — et je crois devoir partager cette opinion — que ces lois d'inertie ont leur cause dans certaines propriétés du milieu éthéré, au sein duquel les corps se meuvent et qui remplit également les interstices entre leurs molécules et leurs atomes, propriétés inconnues jusqu'à aujourd'hui, mais qui seront peut-être découvertes demain. Il me semble du reste probable qu'une action réciproque entre ce milieu, d'un côté, et les molécules et les atomes des corps, de l'autre, joue également un rôle essentiel dans la formation ou la détermination des lois en question. D'ailleurs, l'immobilité et le mouvement absolus fussent-ils un jour reconnus comme étant des notions rationnelles — ce que nient à présent pertinemment philosophes et mathématiciens — dût-on donc plus tard considérer l'immobilité absolue comme étant une condition très bien réalisable chez les corps de l'univers ; eût-on acquis même la certitude que certains d'entre ces corps se trouvent réellement dans cette condition — chose du reste infiniment improbable — on n'en serait pas moins obligé d'attribuer à l'axiome α un sens plus général, en vertu duquel les deux points dont il y est question ne sont pas nécessairement des points qui, par rare exception, se trouveraient dans un état d'immobilité absolue. Pour le comprendre, il suffira de se rappeler que les géomètres appliquent l'axiome α en premier lieu aux points situés à la surface de la terre, à des points donc qui assurément ne partagent pas le dit état. Ces points participent en effet aux différents mouvements dont la surface terrestre est animée en vertu des mouvements multiples de la terre, de celui autour de son axe,

de celui autour du soleil, etc., et il est évident que tous ces mouvements ne sauraient avoir pour résultat un état d'immobilité absolue de cette surface durant un temps tant soit peu prolongé, en admettant même qu'un tel état fût possible pendant un temps infiniment court.

On ne peut donc pas douter que, dans la pensée de ceux qui les premiers ont formulé l'axiome α comme de tous les mathématiciens qui depuis l'ont appliqué ou énoncé de nouveau, l'immobilité des deux points dont il s'agit est, non pas une immobilité absolue, mais simplement une immobilité de l'un de ces deux points par rapport à l'autre.

Je dois encore faire une autre remarque :

Si l'on veut vérifier le fait qu'énonce l'axiome α par quelque expérience directe — ce qui ne saurait se faire, on le conçoit, qu'à la surface de notre terre — ou bien si l'on veut simplement se rendre compte par la réflexion du sens exact que comporte ce fait, il faudra naturellement envisager, en dehors des deux points A et B auxquels on appliquera dans ce but l'axiome, d'autres points encore qui sont situés sur les lignes droites ou courbes qu'en vue du même but on croit devoir mener par A et B. Or, envisager un de ces points c'est évidemment, dans le cas qui nous occupe, déterminer sa position par rapport à la surface terrestre, c'est donc établir ses distances à trois points fixes de cette surface. Pour deux de ces points on peut choisir les points A et B eux-mêmes, si, comme il est commode de l'admettre dans l'expérience, ces derniers sont immobiles par rapport à la surface terrestre. Le choix du troisième point reste alors seul à faire ; ce choix est entièrement libre pourvu que le point ne soit pas pris sur la droite menée par A et B elle-même.

La nécessité de la détermination des trois distances dont je viens de parler, devient d'ailleurs manifeste dès qu'on envisage quelque autre problème du même genre que celui dont il est question dans l'axiome α . Que, par exemple, on

se pose la question de savoir combien d'arcs de cercle d'un rayon déterminé on peut faire passer par deux points C et D. La réponse exacte est évidemment : un nombre infini. Or, si dans ses recherches, soit expérimentales, soit théoriques, faites en vue de résoudre la question, on rapportait la position des différents points des dits arcs uniquement aux deux points C et D, on serait forcément amené à répondre par contre : un seul arc. C'est, je le répète, que la position d'un point par rapport à la surface terrestre n'est pas déterminée par ses seules distances à deux points fixes de cette surface, aux points C et D, par exemple, mais que sa détermination exige en outre, comme je le faisais déjà remarquer ci-dessus, l'établissement de sa distance à un troisième point fixe faisant partie de la même surface.

Il m'a paru utile d'appeler l'attention sur ce fait, avant de faire connaître un moyen pratique pour se convaincre de la vérité de l'axiome α , parce que la lecture de quelques ouvrages m'a prouvé que le sens même de cet axiome n'est pas toujours bien compris, ce que je crois précisément devoir attribuer à une négligence de la part de leurs auteurs de tenir compte du dit fait. La description de ce moyen, qui du reste est peut-être le plus simple, en tous cas le plus direct qui existe pour vérifier l'axiome α , complétera l'indication que je me proposais de faire du sens exact de ce dernier. Là voici :

On tend un fil très mince entre deux points A et B, fixés quelque part au sol, et l'on marque, par un dispositif quelconque, la position qu'occupent par rapport au sol un certain nombre des points C, D, E, etc., par lesquels passe le fil. Or, il est évident que celui-ci coïncidera nécessairement avec l'un des chemins les plus courts possible entre A et B, s'il existait réellement deux ou plusieurs de ces chemins. En effet, si le fil coïncidait avec un autre chemin plus long qu'eux, la traction exercée, pour le tendre, à ses

extrémités A et B donnerait inévitablement lieu à un certain mouvement, des deux bouts du fil, d'abord, et ensuite de toutes ses parties, jusqu'à ce que les deux extrémités A et B eussent atteint leur éloignement maximum, jusqu'à ce que, en d'autres termes, le fil se confondît avec l'un des chemins les plus courts entre ses extrémités. Si maintenant, après l'avoir momentanément éloigné, on remet le fil en place, le tendant de nouveau entre les points A et B, on constate qu'il passe exactement par les mêmes points intermédiaires C, D, E, etc., et ce même fait se trouvera reproduit toutes les fois qu'on voudra répéter l'expérience, si grande que soit du reste la précision avec laquelle celle-ci aura été faite. Or, comme on ne saurait évidemment découvrir aucune raison pour laquelle le fil coïnciderait avec l'un des dits chemins les plus courts possibles plutôt qu'avec un autre, on sera en droit de déduire de cette expérience qu'il n'existe entre les points A et B qu'un seul de ces chemins ¹.

L'exactitude de l'axiome α ne peut donc assurément faire l'objet du moindre doute. Aussi a-t-elle été reconnue de tout temps par les mathématiciens, qui du reste ont admis sans exception que l'axiome est évident par lui-même, en sorte qu'ils ont même jugé superflue toute expérience faite dans le but de se convaincre de sa vérité. Ce qui plus est, la grande majorité d'entre eux, si non tous, sont d'avis que, non seulement l'aspect du monde extérieur ou, pour parler un langage plus précis et plus propre dans la circonstance, l'aspect de deux ou de plusieurs points disséminés dans l'espace, suffit pleinement pour établir cette conviction et pour la justifier, mais encore qu'il est de toute impossibilité de donner de la vérité de l'axiome α une démonstration

¹ Il ne m'a pas paru inutile de faire connaître cette expérience, quelque élémentaire qu'elle soit, puisque celle que M. Kroman indique dans son ouvrage : *Unsere Naturerkenntniss*, la seule du reste dont j'aie rencontré la description, ne me semble nullement concluante.

autre que celle qui nous est fournie directement par cet aspect, autre que celle qui découle de cet aspect d'une façon immédiate.

Démontrer une proposition, démontrer la vérité d'une assertion, ils l'ont du reste très justement fait remarquer, eux aussi bien que les philosophes, c'est faire ressortir sa justesse au moyen d'un raisonnement rigoureux dont le point de départ, le fondement, est toujours un fait fourni directement par l'observation du monde des phénomènes. Eh bien, les dits mathématiciens prétendent que l'axiome α exprime lui-même un tel fait, et ils prétendent en outre que ce fait ne peut être déduit d'aucun autre fait dont la vérité s'imposerait à nos sens avec plus d'évidence que la sienne.

Or cette dernière prétention de leur part est-elle bien juste ?

Supposons qu'au lieu de vivre sur notre terre où, grâce à la densité presque uniforme de notre atmosphère dans des couches d'épaisseur considérable, les rayons de lumière se propagent suivant des lignes à fort peu près droites sur des parcours relativement longs, supposons, dis-je, que nous fussions placés sur un astre dont l'atmosphère eût une densité si rapidement variable d'une couche horizontale à l'autre que les dits rayons, avant de nous atteindre, eussent en général subi une déviation très importante par rapport à la direction suivie en quittant les objets dont ils émanent. Dans ce cas une ligne droite se montrerait à nous, non pas certes toujours, mais pourtant très souvent telle que nous voyons dans nos conditions terrestres une ligne courbe ; je veux dire que l'image produite par la droite sur notre rétine aurait alors bien des fois une longueur supérieure à celle des images produites par beaucoup de lignes courbes qui uniraient les mêmes points extrêmes et qui en réalité seraient donc plus longues qu'elle. (Le lecteur se convaincra aisément de ce fait par le dessin.)

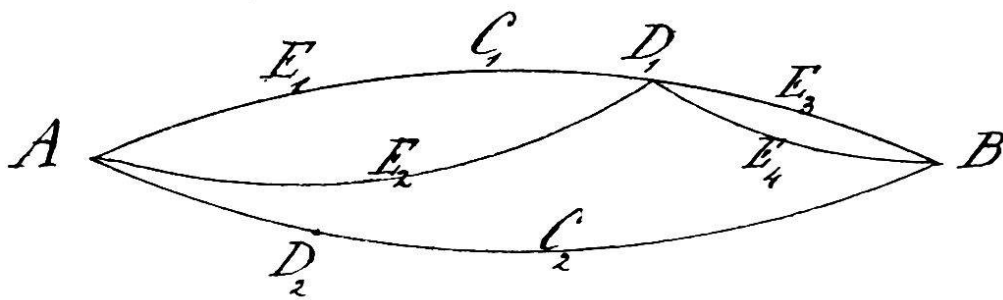


Fig. 1.

Dans de telles circonstances il nous serait, sinon absolument impossible, au moins fort difficile, de nous renseigner sur le fait qu'énonce l'axiome α par les seules impressions qu'éprouverait notre sens visuel, plus spécialement en ce qui concerne les positions relatives des objets placés autour de nous. D'ailleurs, sur la terre telle qu'elle est, l'homme né aveugle se trouve réellement dans cet état d'incapacité. Faut-il donc admettre, ainsi que cela résulterait de l'opinion des mathématiciens rapportée ci-dessus, que ni ce dernier, ni l'homme qui vivrait dans un milieu atmosphérique comme celui que je viens de décrire, ne pourraient jamais se procurer la connaissance du fait qu'énonce l'axiome α sinon en vertu de quelque expérience du genre de celle que j'ai indiquée précédemment ?

Je ne le pense pas, car je crois pouvoir démontrer que ce dernier fait peut être déduit, par la voie du pur raisonnement, de deux autres faits dont la vérité découle avec nécessité directement du caractère essentiel de l'espace, à savoir de son extension illimitée dans tous les sens. Or, de ce caractère l'aveugle-né peut évidemment avoir une claire notion aussi bien que l'homme qui voit ; et l'on verra plus loin, lorsque nous indiquerons les dits deux faits, que pour reconnaître leur vérité il n'est pas nécessaire — comme c'est le cas pour reconnaître, par l'aspect des objets qui nous entourent, la vérité de l'axiome α — qu'on vive dans un milieu tel que notre atmosphère terrestre et qu'on soit pourvu d'un organe visuel pareil ou semblable au nôtre,

afin que l'image d'une droite sur notre rétine ait toujours moins de longueur que celle d'une courbe qui unirait ses deux points extrêmes. On se convaincra que, pour se pénétrer de leur vérité, il suffit du concours ou, si l'on veut, de l'intervention de la notion du mouvement libre — notion qui implique évidemment celle du mouvement non libre ou entravé — puis de la notion de la longueur d'un chemin. Or, comme ces trois notions ne sont pas moins nécessaires pour saisir convenablement le sens de l'axiome α , nous osons hardiment affirmer que les deux faits susdits méritent d'être classés parmi les axiomes, dans l'acception rigoureuse de ce mot, à plus juste titre que ce dernier qui peut être déduit d'eux, et que c'est seulement alors qu'on estimerait que cette acception pût être élargie qu'on pourrait ranger parmi les axiomes également l'axiome α , profitant ainsi de l'heureux hasard qui nous renseigne sur le fait qu'il énonce d'une façon directe, grâce aux conditions favorables de notre atmosphère et de notre organe de la vue.

Cela dit, procédons à la démonstration dont je parlais ci-dessus, et faisons en premier lieu ressortir que la supposition que deux points peuvent être unis par deux droites, c'est à dire donc par deux chemins qui seraient, l'un et l'autre, le plus court possible, que cette supposition, dis-je, implique nécessairement cette autre supposition qu'on peut tracer entre deux points une infinité de droites, c'est à dire une infinité de chemins qui seraient tous les plus courts possible.

A cet effet je vais nommer la première supposition brièvement la supposition β , et j'indiquerai dans la figure 1 par A et B les deux points en question, par AC_1B et AC_2B les deux chemins droits dont il vient d'être parlé.

Prenant alors sur le premier de ces chemins un point quelconque D_1 , on sera obligé d'admettre que ce point peut, lui aussi, être relié au point A par deux droites; car il est évident qu'on ne saurait faire la supposition β

pour les points A et B sans la faire également pour tout autre couple de points pris dans l'espace, quelle qu'en soit du reste la distance. Or, la première de ces deux droites coïncide évidemment avec la partie AE_1D_1 de la ligne AD_1B . Représentons la seconde par AE_2D_1 .

Comme elles ont la même longueur, étant des droites entre les mêmes points extrêmes A et D_1 , il faut aussi admettre que le chemin $AE_1D_1E_3B$, qui unit les points A et B en passant par les points E_1 et D_1 , et le chemin $AE_2D_1E_3B$, qui unit ces points en passant par E_2 et D_1 , sont également longs. Mais, cela étant, on sera obligé d'attribuer une même longueur aux trois lignes AC_2B , $AE_1D_1E_3B$ et $AE_2D_1E_3B$; et, puisque les deux premières sont droites par supposition, on devra regarder comme telle également la troisième, la ligne $AE_2D_1E_3B$.

Remarquons maintenant que l'introduction de la supposition β oblige de reconnaître non seulement l'existence de deux chemins droits entre les points A et D_1 , ainsi qu'il a été dit ci-dessus, mais encore celle de deux chemins droits entre les points D_1 et B. Le premier de ces chemins est évidemment la partie D_1E_3B de la droite AC_1B ; indiquons le second par la ligne D_1E_4B .

Si nous répétons pour ces deux chemins le raisonnement fait ci-dessus pour les chemins AE_1D_1 et AE_2D_1 , nous serons aisément conduits, par une considération trop simple pour que je la consigne ici, à la nécessité de reconnaître déjà l'existence de cinq chemins droits entre les points A et B, à savoir celle des chemins AC_2B , $AE_1D_1E_3B$, $AE_1D_1E_4B$, $AE_2D_1E_3B$ et $AE_2D_1E_4B$.

Mais le nombre des points, tels que D_1 , qu'on peut choisir sur la droite AC_1B pour y appliquer le raisonnement exposé plus haut, est infini, la distance entre les points A et B étant supposée dans l'axiome α soit de grandeur finie, soit infiniment grande.

Puis il est évident que le même raisonnement peut être appliqué à chacun des points infiniment nombreux, tels

que D_2 , par exemple, qui sont situés sur la seconde droite AC_2B , par laquelle on pourrait, conformément à la supposition β , unir les points A et B.

Enfin, rien n'empêche qu'on applique le dit raisonnement à tous les points infiniment nombreux de chacune des autres droites, ainsi que AE_2D_1 et D_1E_4B , dont un raisonnement antérieur nous a obligé de reconnaître l'existence.

En regard de ces trois motifs, nous sommes manifestement en droit de conclure qu'il serait possible de mener par les deux points A et B un nombre infiniment grand de droites, c'est à dire un nombre infiniment grand de chemins qui sont tous le plus court possible, si la supposition β était vraie.

Maintenant cette conclusion suffit-elle, par son inadmissibilité apparente, pour rejeter comme fausse la dite supposition ?

J'ose affirmer que non ; car, ainsi que je l'ai fait remarquer tout au commencement de ma note, aussi bien qu'il est possible de joindre deux points par une infinité de chemins différents dont la longueur est la même, mais supérieure à celle du chemin le plus court qui existe entre ces points, aussi bien doit-on à priori admettre comme étant possible de les unir par un nombre infiniment grand de chemins qui ont tous exactement la longueur de ce plus court chemin.

Toutefois nous allons pouvoir utiliser la conclusion obtenue ci-dessus pour atteindre notre but, en montrant qu'elle entraîne forcément une conséquence dont la fausseté ne saurait, cette fois, pas être mise en doute.

Pour ce faire, il sera cependant nécessaire que nous donnions d'abord à la démonstration exposée ci-dessus une forme tant soit peu différente.

Représentons de nouveau (voir la fig. 2) par AC_1B et AC_2B les deux droites qui, d'après la supposition β , pourraient être menées par les points A et B, et prenons sur

la première de ces droites deux points G_1 et G_2 , éloignés de la même distance du point C_1 , que je suppose être situé juste en son milieu.

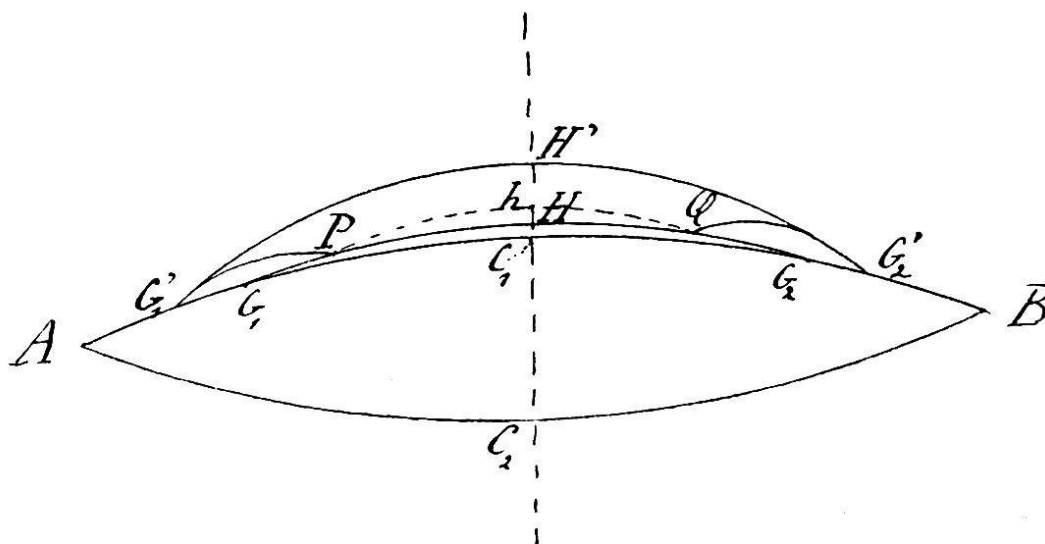


Fig. 2.

Comme je l'ai fait remarquer déjà précédemment, on sera, en vertu de la supposition β , obligé d'admettre deux droites entre les points G_1 et G_2 , comme on les admet entre les points A et B. L'une de ces droites étant évidemment la partie $G_1 C_1 G_2$ de la droite $A C_1 B$, j'indiquerai l'autre par $G_1 H G_2$. Or il est clair que la longueur totale des trois droites $A G_1$, $G_1 H G_2$ et $G_2 B$ est la même que la longueur totale des trois droites $A G_1$, $G_1 C_1 G_2$ et $G_2 B$; et, puisque cette dernière longueur totale est celle d'un des chemins les plus courts entre A et B, étant par supposition une des droites qui unissent ces deux points, la ligne $A G_1 H G_2 B$ doit également se confondre avec un de ces chemins; elle aussi est donc une droite entre les points A et B.

Mais le nombre des points G_1 et G_2 que compte la droite $A C_1 B$ et pour lesquels on peut donc répéter le raisonnement qui précède, est infiniment grand. Par conséquent nous sommes obligé de conclure à l'existence d'un nombre infini de droites entre A et B.

Nous arrivons ainsi à la même conclusion à laquelle nous a ci-dessus conduit une considération un peu différente. Mais ce que cette dernière considération ne permettait guère de faire ressortir, nous allons facilement le déduire de celle que nous venons d'exposer.

Nous faisons remarquer, en effet, que chacune des droites qui, d'après ce qui précède, uniraient, en vertu de la supposition β , les points A et B, telle que AG_1HG_2B , a au milieu son cours propre, c'est à dire distinct de celui de chacune des autres droites, en sorte qu'il faut admettre que la situation dans l'espace de l'élément du milieu qui est situé à une même distance des deux points A et B est différente aussi pour toutes ces droites ¹.

Mais, cela étant, on sera obligé d'admettre qu'une surface sphérique ayant pour centre un des deux points A ou B et pour rayon la moitié de la distance AB, est rencontrée par les susdites droites en des points tous différents entre eux. Or une telle assertion pouvant être faite pour

¹ On pourrait, il est vrai, admettre à la rigueur le contraire. On pourrait, par exemple, admettre que la droite qui, avec la droite $G'_1C G'_2$ constitue le couple de celles qui, d'après la supposition β , existeraient entre les points G'_1 et G'_2 , et la droite qui, avec la droite $G_1C_1G_2$ constitue le couple de celles qui, d'après la même supposition, existeraient entre les points G_1 et G_2 , se confondissent dans leur partie du milieu; que la première droite eût par exemple le cours indiqué dans la figure par les lettres $AG'_1PHQG'_2B$, la seconde celui indiqué par les lettres AG_1PHQG_2B , la partie PHQ étant commune à l'une et à l'autre. Mais dans cette supposition il suffirait d'appliquer à cette partie commune la même supposition β , suivant laquelle il y aurait entre ses extrémités P et Q, non pas une seule, mais deux droites, disons les droites PHQ et PhQ . Puis, on remplacerait dans la pensée la seconde des droites susdites, à savoir la droite AG_1PHQG_2B , par la droite AG_1PhQG_2B qui a évidemment la même longueur, tandis qu'on conserverait à la première, c'est à dire à la droite $AG'_1PHQG'_2B$ le cours qu'on lui supposait d'abord. Or les éléments situés au milieu des deux droites AG_1PhQG_2B et $AG'_1PHQG'_2B$, respectivement donc l'élément qui se trouve en h et l'élément qui se trouve en H, ont visiblement une situation différente dans l'espace. Par conséquent il sera, en partant de la supposition β , toujours possible d'indiquer deux droites qui, unissant les points A et B, ont respectivement entre les points G'_1 et G'_2 et entre les points G_1 et G_2 un cours autre que la droite AG_1B , et dont les éléments du milieu ne coïncident pourtant pas entre eux.

n'importe qu'elle valeur de la distance AB , on sera en droit de la faire également pour chacune des parties constitutives de la même droite AC_1B ; et, par conséquent, nous pouvons affirmer que l'introduction dans les considérations de la supposition β entraîne la nécessité d'admettre que toute surface sphérique dont le centre coïnciderait avec un point quelconque de la droite AC_1B et dont le rayon aurait une valeur également quelconque, est traversée par les droites infiniment nombreuses qui, en vertu de cette supposition, peuvent être menées par les points A et B , en un nombre infini de points différents.

Tout à l'heure nous utiliserons cette conséquence forcée de la dite supposition.

D'abord nous devons faire observer qu'il sera toujours possible de trouver dans l'espace un nombre infini de points, appelons-les $B_1, B_2, B_3, \text{etc.}$, dont la distance¹ au point A est la même que celle qui sépare de ce point le point B , la totalité de ces points $B_1, B_2, B_3, \text{etc.}$, formant une surface continue et fermée, à laquelle les géomètres donnent, comme l'on sait, le nom de « surface sphérique ».

Le lecteur ne saurait exiger que nous démontrions par un raisonnement la justesse de cette assertion. Elle découle directement de la notion que nous avons tous de l'espace. Aussi n'hésitons-nous pas de classer cette assertion parmi les axiomes fondamentaux de la géométrie, dans l'acceptation rigoureuse de ce mot; elle exprime, soit dit par parenthèse, le premier des deux faits dont j'ai parlé précédemment. Certes, ni Euclide ni, que je sache, aucun autre mathématicien, ne la mentionne comme tel. Mais que tous

¹ Par « la distance entre deux points » nous entendons ici la longueur d'un des chemins les plus courts qui unissent ces points; car, afin de ne pas préjuger sur la solution de notre problème, je suppose ici qu'il existe plus d'un seul de ces chemins. Le lecteur aurait donc tort de croire que l'emploi que je fais ici de la dite expression m'obligerait d'avance à n'admettre qu'un seul chemin le plus court entre deux points, ce qui entacherait évidemment ma solution d'un jugement préconçu.

reconnaissent pourtant sa vérité, cela résulte clairement de la définition même qu'ils donnent de la surface sphérique. Celle-ci, en effet, ils la définissent : une surface dont tous les points se trouvent à une même distance d'un certain point de l'espace, auquel point ils donnent le nom de centre de la dite surface sphérique. Or il est évident que cette définition implique forcément la possibilité même de concevoir une surface qui satisfasse à la condition que je viens d'indiquer et qu'elle reconnaît donc implicitement la vérité de l'assertion énoncée ci-dessus.

Croyant donc sans autre justification pouvoir admettre l'existence de la surface sphérique, dont il a été parlé ci-dessus et que nous désignerons dans la suite brièvement par la surface S , nous montrerons en premier lieu que, partant de la supposition β , on pourra trouver sur cette surface S , dans le voisinage plus ou moins immédiat du point B , une infinité de points — nous les nommerons B' , B'' , B''' , etc. — qui sont situés de manière que les droites AB' , AB'' , AB''' , etc., qui les relient respectivement au point A , coupent quelque part entre A et B l'une ou l'autre des deux droites AC_1B et AC_2B par lesquelles il serait, d'après la supposition β , possible d'unir les points A et B (voir la fig. 3).

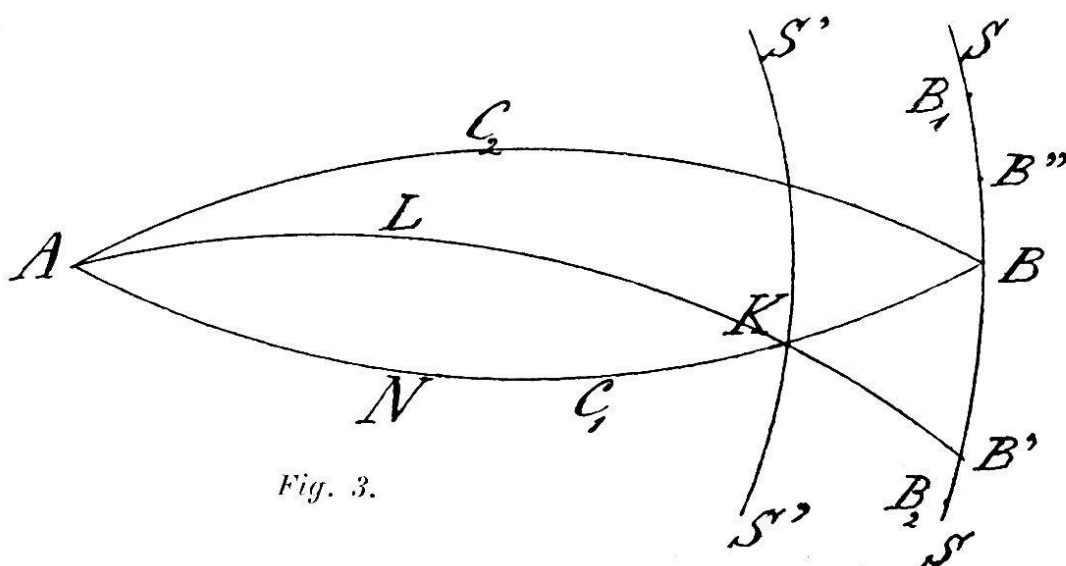


Fig. 3.

A cet effet nous ferons remarquer qu'à l'encontre de ce que pensent plusieurs mathématiciens, nous sommes d'avis qu'aux lignes géométriques il faut nécessairement attribuer une certaine épaisseur, épaisseur infiniment petite, il est vrai, c'est à dire moindre que toute épaisseur donnée, mais qui n'en est pas moins réelle pour cela. C'est que, selon nous, une ligne sans épaisseur — droite ou courbe, peu importe — ne saurait exister, ni réellement ni fictivement.

Qu'elle ne saurait exister réellement, comment pourrait-on en douter lorsqu'on réfléchit que tout ce qui existe dans la réalité occupe de l'étendue — une telle occupation étant une condition *sine qua non* de toute existence réelle — tandis qu'une ligne sans épaisseur ne pourrait évidemment occuper aucune étendue, toutes ses sections étant rigoureusement nulles.

Qu'une telle ligne ne saurait pas, non plus, exister dans notre imagination, comme pure fiction, cela est, selon nous, non moins incontestable.

En effet, chaque fiction est *soit* la reproduction plus ou moins fidèle dans notre esprit de l'impression qu'un objet réel a produite antérieurement sur notre sens de la vue, sur notre rétine, pour être plus précis; *soit* elle se compose de différents éléments qui, chacun d'eux, sont le souvenir d'une telle impression et que l'esprit, suivant son caprice, sciemment ou inconsciemment, joint ensemble ou superpose. Dans le premier, comme dans le second cas, la fiction se rapporte donc, en fin de compte, à des objets réellement existants. Or, comme, en vertu même de cette existence réelle, les objets occupent nécessairement une certaine étendue, il est dès lors évident qu'à toutes ses conceptions, qu'à toutes ses soi-disant créations, l'esprit doit accorder également de l'étendue. Voilà pourquoi il nous semble impossible aussi que l'homme puisse concevoir des lignes sans aucune épaisseur, puisque ces lignes, par le fait

même d'être supposées dépourvues de toute épaisseur, ne pourraient pas occuper la moindre étendue ¹.

Je dois pourtant faire observer expressément que ce n'est pas pour ce motif-là, c'est-à-dire parce que l'esprit humain ne peut pas concevoir des lignes sans épaisseur, que nous attribuons à celles dont il s'agit dans nos considérations une épaisseur réelle, ne fût-elle qu'infiniment petite. Car il est évident que notre esprit n'est pas davantage capable de se représenter convenablement des lignes infiniment minces, la conception d'une telle ligne, quelque minceur qu'on lui suppose, ne pouvant, par la nature des choses, jamais satisfaire à la condition voulue qui exige que la ligne à concevoir soit toujours plus mince encore que celle qu'on s'est imaginée. Mais, il ne faut pas perdre de vue que la capacité ou l'incapacité de se représenter une grandeur, ne constitue pas le critérium pour décider du droit qu'on aurait d'introduire cette grandeur dans les considérations. Ainsi, pour n'en donner qu'un seul exemple, nous ne sommes pas aptes de concevoir en toute rigueur une parabole ou une hyperbole, vu la longueur infinie de ces lignes; nous ne pouvons nous en représenter qu'une partie. On n'en traite pas moins en géométrie couramment de l'une comme de l'autre.

Non, le motif pour lequel nous attribuerons dans ce qui suit aux lignes une épaisseur réelle, bien qu'infiniment

¹ Il en est de même des points mathématiques. Eux aussi occupent nécessairement de l'étendue; sinon, comment leur situation dans l'espace serait-elle déterminée, comment serait-elle désignable? Pour être, les points mathématiques doivent, comme toute autre chose, être quelque part, et pour être quelque part, ils doivent occuper une certaine étendue. Les points mathématiques sont une partie infiniment petite de l'espace, comme l'espace est composé d'un nombre infiniment grand de points mathématiques. Si l'étendue occupée par ceux-ci était rigoureusement nulle, l'espace qui, dans ce cas, serait composé d'une infinité d'étendues rigoureusement nulles, n'occuperait pas, non plus, de l'étendue, car le produit $\infty \times 0$ est évidemment zéro. Or une telle conséquence est inadmissible, impliquant une contradiction manifeste, « espace » et « étendue » étant des mots différents pour indiquer exactement la même chose.

petite, c'est qu'alors seulement leur conception est rationnelle. Que la conception d'une « ligne sans épaisseur » est irrationnelle par contre, on s'en convaincra aisément en réfléchissant que la notion de « ligne » implique nécessairement l'idée de quelque chose de réel, de véritablement existant, tandis que celle d'« être sans épaisseur » implique au contraire l'idée d'un défaut de toute existence réelle. On ne saurait donc marier ensemble ces trois mots « ligne sans épaisseur », dont les notions s'excluent mutuellement, une chose ne pouvant évidemment être et ne pas être à la fois.

Croyant donc avoir ainsi justifié suffisamment l'introduction dans nos considérations de lignes géométriques conçues comme ayant une épaisseur réelle, bien qu'infiniment petite, nous reprenons notre démonstration.

Outre la surface sphérique S dont j'ai parlé précédemment, nous nous imaginerons une seconde surface sphérique S' , qui contiendra tous les points pour lesquels la distance au point A est la même, mais inférieure à AB , quelconque du reste.

Ci-dessus nous avons montré qu'en partant de la supposition β , il faudra admettre non seulement que le nombre des droites qui unissent le point A et un point donné quelconque de la surface S est infini, mais encore que le nombre des différents points où ces droites passent à travers une même surface sphérique, telle que S' , est infiniment grand. Or, comme d'après ce qui a été dit plus haut, on doit attribuer aux lignes une épaisseur réelle, bien qu'infiniment petite, il faudra aussi attribuer une étendue réelle, quoique infiniment petite, à la section de chacune des dites droites avec la surface S' . Leur nombre étant infiniment grand, il s'ensuit que l'introduction de la supposition β oblige d'attribuer une étendue finie, et non pas infiniment petite, à la somme des sections produites par le passage à travers la surface S' de la totalité des droites infiniment nombreuses

dont il vient d'être parlé. Car il est évident qu'en ajoutant les unes aux autres une infinité de surfaces infiniment petites, on obtiendra une surface dont l'étendue est finie. Soit Ω' l'étendue de la somme susdite.

Imaginons à présent toutes les droites possibles qui, en vertu de la supposition β , existeraient entre le point A, d'un côté, et chacun des points de la surface S, de l'autre.

Comme le nombre de ces derniers points est évidemment infini, la totalité des sections de ces droites avec la surface S' aura une étendue $\infty \times \Omega'$, c'est à dire elle aura une étendue infiniment grande. Or il n'y a qu'un seul moyen pour allier ce résultat avec le fait évident que l'entière surface S' n'a qu'une étendue finie, c'est d'admettre que les dites sections se superposent, qu'elles coïncident en partie. Mais, les différents éléments infiniment petits ω' de la surface S' ayant tous une situation identique tant par rapport au point A qu'à l'égard de la surface S, on doit naturellement supposer que dans chacun de ces éléments le passage des droites en question à travers la surface S' ait lieu avec une même abondance, et dès lors il faut supposer que dans chaque élément ω' les coïncidences des sections de ces droites avec la surface S' se produisent avec la même fréquence. Par conséquent, l'introduction de la supposition β implique forcément la nécessité d'admettre qu'à travers chaque élément ω' de la surface S' il passe un nombre infiniment grand des dites droites. Or ceci revient évidemment à dire que la droite AC₁B dont nous parlions précédemment rencontrera nécessairement à l'endroit K où elle passe à travers la surface S' une infinité d'autres droites qui, conformément à la même supposition β , uniraient le point A et d'autres points de la surface S plus ou moins rapprochés du point B.

C'est ce fait que nous nous proposons de faire ressortir. Etant une fois reconnu, le reste de notre tâche ne nous saurait plus guère offrir des difficultés.

En effet, soit AKB' une des droites susdites allant de A à un point B' de S plus ou moins près de B , et coupant la droite AC_1B au point K .

Comme partie de la droite AC_1B , la ligne ANK est nécessairement un des chemins les plus courts possible pour se rendre du point A au point K , toute partie d'une droite étant évidemment droite elle-même.

De son côté, la ligne ALK est, elle également, un de ces plus courts chemins entre les mêmes points extrêmes, puisqu'elle aussi fait partie d'une droite, à savoir de la droite AKB' .

Par conséquent, nous sommes obligé d'attribuer à ces deux lignes ANK et ALK une même longueur.

Mais comme les points B et B' appartiennent tous les deux à la surface sphérique S et qu'ils se trouvent donc à une égale distance du point A , le chemin $ANKB$ doit être considéré comme étant exactement aussi long que le chemin $ALKB'$. Et par conséquent nous devons, en regard de l'égale longueur des lignes ANK et ALK , établie ci-dessus, conclure que les parties KB et KB' de ces deux chemins sont, elles aussi, également longues.

Eh bien, il est facile de voir qu'une telle conclusion est fausse.

En effet, la surface S contient, par supposition, tous les lieux qui se trouvent à une même distance du point A . En regard de l'extension illimitée de l'espace, on ne saurait donc pas admettre que deux quelconques de ces lieux soient situés à une même distance d'un point autre que le point A . Non pas qu'une telle égalité de distance serait chose impossible. Au contraire, le nombre des points en dehors de A , pour lesquels elle existe, est, comme l'on sait, toujours infiniment grand, quelle que soit d'ailleurs la position relative des dits deux lieux. Mais tous ces points-là ont pourtant une situation toute spéciale par rapport à ces derniers. Aussi, chaque fois que pour un point, outre A , on croit pouvoir admettre l'égalité des deux

distances en question, il sera de rigueur que par une démonstration en règle on prouve que cette opinion soit vraiment justifiée. Mais dans le problème qui nous occupe la dite situation toute spéciale ne saurait assurément être supposée au point K dont il a été parlé ci-dessus. Car, ainsi qu'on l'a vu plus haut, *chaque* point de la droite AC_1B doit satisfaire à la condition que les chemins les plus courts possible qui le relie respectivement au point B et au point B' aient une même longueur, en sorte qu'on n'est nullement libre de choisir, en vue d'obtenir l'égalité de ces chemins, la position de ce point K .

Par conséquent nous pouvons hardiment conclure à l'inégalité des deux longueurs KB et KB' , sans que nous soyons tenu d'ailleurs de justifier cette conclusion par une démonstration, quelle qu'elle soit¹. Cette inégalité, je le répète, découle directement et nécessairement du caractère essentiel de l'espace, à savoir de son extension illimitée dans tous les sens. Elle constitue le second fait dont j'ai parlé précédemment comme pouvant être considéré comme un autre axiome de la géométrie, dans l'acception rigoureuse de ce mot.

Evidemment elle nous mène immédiatement au droit de rejeter comme fausse la supposition β , celle-ci nous ayant ci-dessus conduit à un résultat contraire, c'est-à-dire à la nécessité d'admettre l'égalité des longueurs KB et KB' . Or, j'ai à peine besoin d'ajouter que la fausseté de la supposition β implique la vérité de l'axiome α .

¹ Il en est ici exactement comme dans le cas où, tirant par deux points quelconques deux lignes courbes ou droites d'une façon toute arbitraire dans l'espace, l'on affirmerait que ces lignes ne se rencontrent pas. Une telle affirmation n'exigerait évidemment de la part de celui qui la ferait aucune justification spéciale, sa justesse découlant avec nécessité de l'extension illimitée de l'espace dans tous les sens. Mais si, grâce à un choix particulier des deux points et grâce à un cours spécial donné aux deux lignes, on croyait pouvoir admettre la rencontre de celles-ci — ainsi que cela se présenterait, par exemple, s'il s'agissait de lignes droites, dans le cas où ces lignes eussent été tirées dans un même plan — alors il deviendrait par contre de rigueur de démontrer que, dans les circonstances admises, la dite rencontre aura vraiment lieu.

Est-il nécessaire de dire que la démonstration qui dans ce qui précède vient d'être donnée de cette vérité n'est point destinée à figurer dans les Traités élémentaires de la géométrie, qu'en tous cas son insertion dans ces Traités serait particulièrement déplacée au commencement, par exemple immédiatement après avoir énoncé l'axiome α . Son intelligence, en effet, exige, comme on l'a vu, une certaine familiarité avec les notions de l'infiniment grand et de l'infiniment petit, et une telle familiarité ne saurait assurément être supposée chez ceux qui commencent leurs études en géométrie.

Je termine en formulant les deux vérités que, dans le cours de ma démonstration j'ai indiquées comme étant les véritables axiomes de la géométrie, comme constituant son fondement, plutôt que ne le fait la vérité α , qui, ainsi que je l'ai expliqué ci-dessus, n'est pas un axiome dans le sens exact de ce mot.

La première de ces vérités est la suivante :

Il y a autour de chaque point une infinité d'autres points qui se trouvent tous à une même distance du premier ; l'ensemble de ces points constituant une surface continue et fermée.

La seconde c'est que

les distances qui séparent les différents points d'une surface sphérique d'un point autre que le centre de cette surface sont en général inégales.

Mieux que moi, les mathématiciens qui s'occupent de l'enseignement de la géométrie seront à même d'établir à quel moment de cet enseignement les dits axiomes devraient être énoncés et portés à la connaissance des élèves ; si, bien entendu, ils partagent les idées ci-dessus émises à leur égard.

Vevey, juin 1904.
