Zeitschrift: Bulletin de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Herausgeber: Société Vaudoise des Sciences Naturelles
Band: 93 (2012-2013)
Heft: 2

Artikel: Solution du problème du cavalier par Euler
Autor: Sesiano, Jacques
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-319822

Bull. Soc. vaud. Sc. nat. 93.2: 47-65 ISSN 0037-9603

Solution du problème du cavalier par Euler

par

Jacques SESIANO[1]

Résumé.–SESIANO J., 2012. Solution du problème du cavalier par Euler. *Bulletin de la Société vaudoise des Sciences naturelles* 93: 47-65.
Etude du problème du cavalier chez Euler en tenant compte des sources imprimées et manuscrite.

Mots clés: Euler, saut du cavalier sur l'échiquier, récréations mathématiques.

Abstract.–SESIANO J., 2012. Solution du problème du cavalier par Euler. *Bulletin de la Société vaudoise des Sciences naturelles* 93: 47-65.
Euler's study of the knight's move problem on the chessboard according to printed and manuscript sources.

Keywords: Euler, knight's move on the chessboard, mathematical recreations.

Introduction

L'an 2007 a vu la célébration du trois-centième anniversaire de la naissance d'Euler. La notoriété de ce mathématicien bâlois est telle que plusieurs pays et universités ont organisé des manifestations ou des cycles de conférences en son honneur, l'événement le plus considérable étant certainement le congrès de Saint-Pétersbourg (14-17 mai) et la parution du volume commémoratif qui s'en ensuivit (Euler 2008). Il était prévisible que cette localité fêtât cet événement avec faste: ayant quitté Bâle en 1727, Euler y commença sa carrière (1727-1741), la poursuivit à Berlin (1741-1766), et l'acheva à Saint-Pétersbourg (1766-1783), en sorte que la majeure partie de sa vie s'est passée dans la capitale impériale d'alors. C'est là aussi qu'il est inhumé, dans le cimetière attenant au Monastère Nevsky. Sa tombe y est presque toujours fleurie; c'est dire la vénération dont Euler jouit encore en Russie.

Lorsqu'il quitta Berlin, Euler emmena avec lui ses documents manuscrits. Cela explique la conservation de la majeure partie d'entre eux aux Archives de l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg. Les plus impressionnants sont ses cahiers de notes (*Notizbücher*, Записные книжки), qui lui servaient de brouillons ou de mémorial, en sorte qu'on y

[1]Département de mathématiques, EPFL, Station 8, CH-1015 Lausanne.

CODEN: BSVAA6

trouve, entremêlés et sans liens, des tentatives de démonstrations, des calculs, des notes d'événements personnels ou relatifs à son entourage, des mentions de factures payées ou dues, les dates d'envois d'articles à des revues. En bref, nous avons là, outre le rapport d'événements de sa vie, un moyen de suivre le développement ou l'orientation de ses recherches.

Depuis 1911 sont publiées, sous l'égide de l'Académie suisse des sciences naturelles, les œuvres complètes d'Euler, une entreprise point encore achevée aujourd'hui – ce qui incidemment témoigne, plutôt que de la lenteur du comité d'édition, de la prolixité d'Euler. Les défauts du comité d'édition sont ailleurs. On imaginerait en effet que, pour l'édition d'œuvres complètes, lesdits cahiers de notes ont été soigneusement passés au crible. Pourtant, et bien que les originaux eussent été déposés à Bâle pendant un long temps (1913-1949) et que des photographies en soient conservées, ce ne fut que rarement le cas. Il faut dire que les membres de la «commission Euler», en charge de la publication susmentionnée, seraient en général bien en peine de lire un manuscrit d'Euler, voire d'en comprendre la langue puisque les notes sont le plus souvent en latin.

Prenons un exemple caractéristique de cette négligence, ayant trait au fameux «théorème des polyèdres», tout particulièrement célébré en Suisse puisqu'il figura sur le timbre commémoratif de 2007, mais aussi largement connu puisque tout un chacun peut en vérifier la véracité sur un corps considéré comme un polyèdre. Selon ce théorème, si on fait le compte du nombre des sommets, S, du nombre des faces, F, du nombre des arêtes, A, alors ce dernier nombre excédera toujours de 2 la somme des deux premiers, autrement dit on aura:

$$S + F = A + 2.$$

Euler parvint à l'affirmation de ceci en plusieurs étapes, comme il ressort de ses écrits imprimés relatifs au théorème (Fuss I, 536-539; Euler 1752-53a-b): d'abord son énoncé seul, parmi d'autres théorèmes sur les polyèdres, dans une lettre à Christian Goldbach du 14 novembre 1750; ensuite sa vérification sur divers corps polyédriques, dans un mémoire présenté à l'Académie de Berlin le 26 novembre 1750; enfin sa démonstration, dans un mémoire présenté le 9 septembre 1751. Il y manque toutefois une étape, que nous révèle précisément le cinquième de ses cahiers de notes: Euler avait entre-temps établi une démonstration, mais qui omettait la considération d'une situation particulière. Il avait pourtant alors regardé cette démonstration comme suffisante puisqu'il la terminait par un Q E D (*quod erat demonstrandum*). Il y a donc là une étape importante dans le développement par Euler du plus célèbre de ses théorèmes, qu'une simple consultation des manuscrits d'Euler eût permis de relever (Sesiano 2008, p. 80-81).

Un autre problème notoire, mais là encore, comme nous le verrons, historiquement incomplètement étudié, est celui du parcours du cavalier. Il s'agit de couvrir toutes les cases de l'échiquier, en traversant une seule fois chaque case, et ceci à l'aide du seul saut du cavalier, lequel fait passer d'une case à une autre distante de deux cases verticalement puis une case horizontalement, ou inversement; ainsi, dans la figure 1, on a représenté la case de départ avec le signe o et les cases à un saut du cavalier par x. Pour ladite case de départ il y a, pour un échiquier vide, huit possibilités de sauts, et il en ira de même pour toute

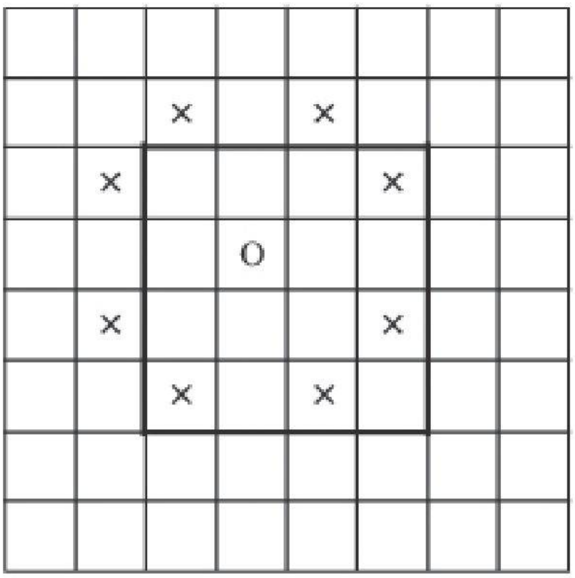

Figure 1.–Marche du cavalier.

case comprise dans le carré central de côté 4; pour les autres, le nombre de possibilités ira diminuant: six, quatre ou trois en s'approchant de la bordure, et deux seulement pour une case angulaire, à savoir l'entrée et, si ce n'est pas la case terminale du trajet, la sortie. Il apparaît déjà de ceci que l'obtention d'un trajet sur tout l'échiquier ne doit pas être tout-à-fait aisée. Elle en donnera néanmoins l'impression au début: à moins d'avoir une attitude écervelée, on parviendra sans trop de peine à parcourir entre cinquante et soixante cases. Les dernières cases libres seront, elles, hors d'atteinte et feront désespérer de la réussite. Du moins le firent-elles avant que Euler proposât, en 1759, un moyen sûr de remédier à cette situation.

Le trajet qu'on atteignit sans trop de peine est dit «partiel», celui qu'on visait est appelé «complet». Au cas où on serait parvenu à ce dernier, il sera en général «ouvert», c'est-à-dire que la case de départ et la case d'arrivée ne sont pas à un saut du cavalier l'une de l'autre; un tel trajet n'offre donc que deux points de départ possibles, le second revenant à inverser le sens du trajet. On se posera donc d'emblée la question du choix du point de départ, ou plutôt celle de savoir s'il est possible d'établir un trajet complet en partant de n'importe quelle case. Or, la réponse deviendra banale si on parvient à établir un trajet «fermé», à savoir un trajet complet dans lequel la case de départ serait à un saut du cavalier du point d'arrivée: puisque le trajet forme une boucle, n'importe quelle case sera éligible comme point de départ. Les figures 2, 3, 4 représentent respectivement un trajet partiel, ouvert, fermé. Les deux dernières, qui répondent aux questions de possibilité, ouvrent l'article imprimé d'Euler; la première, qui pourrait symboliser une première tentative, est extraite de ses notes manuscrites, et nous verrons plus loin comment Euler parvient à compléter ce trajet puis à le fermer.

34			51		31	20	7
	52	35	32	19	8		30
36	33	18	9	50	29	6	21
17	10	37	28	5	22	49	
44	27		11	38		4	23
	16	45	26	3	12	39	48
	43	2	15	46	41	24	13
1			42	25	14	47	40

Figure 2.–Trajet partiel.

42	59	44	9	40	21	46	7
61	10	41	58	45	8	39	20
12	43	60	55	22	57	6	47
53	62	11	30	25	28	19	38
32	13	54	27	56	23	48	5
63	52	31	24	29	26	37	18
14	33	2	51	16	35	4	49
1	64	15	34	3	50	17	36

Figure 3.–Trajet ouvert.

42	57	44	9	40	21	46	7
55	10	41	58	45	8	39	20
12	43	56	61	22	59	6	47
63	54	11	30	25	28	19	38
32	13	62	27	60	23	48	5
53	64	31	24	29	26	37	18
14	33	2	51	16	35	4	49
1	52	15	34	3	50	17	36

Figure 4.–Trajet fermé.

35	40	47	44	61	8	15	12	*h*
46	43	36	41	14	11	62	9	*z*
39	34	45	48	7	60	13	16	*u*
50	55	42	37	22	17	10	63	*e*
33	38	49	54	59	6	23	18	*d*
56	51	28	31	26	21	64	3	*g*
29	32	53	58	5	2	19	24	*b*
52	57	30	27	20	25	4	1	*a*
t	*s*	*r*	*q*	*m*	*l*	*k*	*i*	

Figure 5.–Trajet arabe.

Le problème avant Euler

On conçoit que la mémorisation d'un trajet fermé complet devait apporter une aura considérable: on pouvait relever le défi de parvenir à parcourir tout l'échiquier en peu de temps et en laissant à l'adversaire le choix d'imposer la case de départ. Aussi trouve-t-on, dans les plus anciens textes mentionnant le problème du cavalier, des auxiliaires de mémorisation. C'est le cas dans un texte arabe, copié en 1140 mais préservant des documents antérieurs de deux ou trois siècles, ce qui nous ramène à trois ou quatre siècles après l'invention du jeu d'échecs aux Indes, son passage en Perse puis dans les pays arabes. On y trouve un poème de soixante-quatre vers permettant de retenir un trajet fermé, les deux premières lettres de chaque vers indiquant les coordonnées de la case, et le quantième du vers le nombre à y placer (Kitâb al-Shaṭranj, p. 148 et 271-272). La figure 5 indique le système de coordonnées et le trajet résultant. Ainsi, le premier vers contient au début les lettres i (ي) et a (ا), le second les lettres b (ب) et l (ل), et ainsi de suite. De fait, le manuscrit contenant le poème en question contient aussi trois autres poèmes ayant le même but et décrivant le même trajet (ibid., p. 273-278). Nous en inférons d'abord que ce trajet fermé a dû être le fruit d'un travail considérable, puisqu'il a été ainsi honoré, ensuite, et pour la même raison, qu'on ne devait pas disposer de beaucoup de tels trajets, enfin qu'il ne saurait avoir existé une méthode rapide qui permît d'en déduire un, ce qui aurait épargné la peine de mémoriser soixante-quatre vers, qui plus est rébarbatifs du fait de leur contenu parfaitement utilitaire.

L'histoire du problème du cavalier en deçà de ces deux siècles relève plus du domaine de la conjecture. Il semblerait toutefois qu'il se fût tout d'abord agi d'enlever les trente-deux figures sur le *demi*-échiquier, et que le problème vint ensuite à être étendu à l'échiquier tout entier en supposant, dans un stade intermédiaire, sa couverture par un double jeu de figures. Au reste, ce pourrait être là une évolution naturelle: tant des Indes que des pays musulmans et que de l'Europe chrétienne nous ont été transmis des exemples, remontant à l'époque médiévale, de demi-échiquiers couverts par le saut du cavalier, dont on ne voit pas pourquoi quelque intérêt s'y serait attaché si le problème s'était d'emblée fixé sur l'échiquier entier.

Mais revenons à Euler. Il apprit, nous dit-il au début de son article imprimé, l'existence de ce jeu lors d'une soirée mondaine. Son article étant rédigé en français – comme nombre de ses articles présentés à l'Académie de Berlin où le français était langue de cour –, nous pouvons nous contenter de le citer (EULER 1759, p. 310): «*Je me trouvai un jour dans une compagnie, où, à l'occasion du jeu d'echecs quelqu'un proposa cette question: "de parcourir avec un cavalier toutes les cases d'un échiquier, sans parvenir jamais deux fois à la même, & en commençant par une case donnée". On mettoit pour cette fin des jettons sur toutes les 64 cases de l'échiquier, à l'exception de celle où le Cavalier devoit commencer sa route; & de chaque case où le Cavalier passoit conformément à sa marche, on ôtoit le jetton, de sorte qu'il s'agissoit d'enlever de cette façon successivement tous les jettons. Il faloit donc éviter d'un côté, que le cavalier ne revint jamais à une case vuide, & d'un autre côté il faloit diriger en sorte sa course, qu'il parcourut enfin* (= à la fin) *toutes les cases.*

Ceux qui croyoient cette question assez aisée firent plusieurs essais inutiles sans pouvoir atteindre au but; après quoi celui qui avoit proposé la question, ayant commencé par une case donnée, a sçu si bien diriger la route, qu'il a heureusement (= avec succès) *enlevé* *tous les jettons. Cependant la multitude des cases ne permettoit pas qu'on ait pû imprimer à la mémoire la route qu'il avoit suivie; & ce n'étoit qu'après plusieurs essais, que j'ai enfin rencontré une telle route, qui satisfit à la question; encore ne valoit-elle que pour une certaine case initiale. Je ne me souviens plus, si on lui a laissé la liberté de la choisir lui-même; mais il a très positivement assuré qu'il étoit en l'état de l'éxécuter, quelle que soit la case où l'on voulut qu'il commençat.»*

Il est très dommage que la mémoire d'Euler ait failli sur ce dernier point, qui laisse sans réponse la question de l'ouverture ou de la fermeture du trajet présenté. L'idée de recouvrir l'échiquier de jetons pourrait remonter à la réédition par M. Grandin des *Récréations mathématiques* de J. Ozanam, publiée en 1741. En effet, à l'article "probleme LII" qui examine la question de «*Faire parcourir au Cavalier du Jeu des Echets toutes les cases du Damier, l'une après l'autre, sans entrer deux fois dans la même case*», Grandin suggère la manière suivante de se rendre compte de la progression du trajet: «*Pour executer ce Problême sur un Damier, il faut mettre un jetton sur chaque case, en sorte que toutes les cases blanches & noires soient couvertes de jettons. On commencera par ôter le jetton de la case où l'on placera d'abord* (= en premier lieu) *le Cavalier, & à mesure qu'on le fera entrer dans une autre case, on ôtera le jetton qui la couvre. Ainsi on sera sûr d'avoir fait parcourir toutes les cases au Cavalier, quand tous les jettons auront été levez*» (Ozanam 1741, p. 263).

Ceci pourrait être la source du démonstrateur, mais cela n'est pas certain. D'abord, l'idée de placer des jetons n'est pas vraiment originale, elle ne fait que simplifier l'idée, sans doute déjà présente dans les essais médiévaux, de recouvrir l'échiquier d'un double jeu de figures qu'on enlèvera tour à tour. Ensuite, des trois trajets proposés en exemple par Grandin, dus respectivement aux mathématiciens de Montmort et de Moivre ainsi qu'à de Mairan, Secrétaire de l'Académie des Sciences, aucun n'est fermé.

Mais la première mention certifiée du problème par Euler remonte à 1757 au moins. Il écrit en effet à Christian Goldbach, dans une lettre datée du 26 avril, «Die Erinnerung einer mir vormals vorgelegten Aufgabe hat mir neulich zu artigen Untersuchungen Anlass gegeben», après quoi il explique en quoi consiste le problème (Fuss 1843, I, p. 654-655). Il s'agit donc ici d'un problème qui lui a été *proposé*, et ceci *récemment*. Il joint à sa lettre l'exemple d'un trajet, déjà notablement élaboré (figure 6): outre qu'il est fermé, il est symétrique, c'est-à-dire que la différence de paires de cases diagonalement opposée est constante, égale à 32.

Or, cette date de 1757 peut être reculée encore: ce même trajet apparaît au fol. 239^{r} de son sixième cahier de notes, parmi quantité d'autres essais et tentatives d'Euler relatives au problème du cavalier qui pourraient remonter aux années 1755-1756. Certains de ces résultats seront repris dans l'article imprimé, d'autres non. C'est dire qu'une source importante des recherches d'Euler est restée simplement ignorée. C'est d'autant plus regrettable que là se trouve la majeure partie de ses essais d'étendre le problème du cavalier à d'autres types d'échiquiers, dont seule une petite partie, et sous forme de résultats seuls, a passé à l'impression, alors que la partie manuscrite montre comment Euler y est parvenu ou, aussi, quand ses tentatives sont restées vaines.

54	49	40	35	56	47	42	33
39	36	55	48	41	34	59	46
50	53	38	57	62	45	32	43
37	12	29	52	31	58	19	60
28	51	26	63	20	61	44	5
11	64	13	30	25	6	21	18
14	27	2	9	16	23	4	7
1	10	15	24	3	8	17	22

Figure 6.–Trajet fermé symétrique.

Traitement par Euler du probleme du cavalier

Toute la méthode d'Euler repose sur une seule et unique règle, communément appelée règle de Bertrand. Euler dit en effet dans son article qu'il a été conduit à ses recherches «par une idée toute particuliere, que Mr. Bertrand de Geneve m'a fournie» (Euler 1759, p. 311-312). Il n'en dit pas plus. De la personne, on sait qu'il s'agit du Genevois Louis Bertrand, arrivé à Berlin le 29 octobre 1752 pour étudier avec Euler, puis reçu membre de l'Académie en 1754 (c'est un honneur: à l'époque, il ne suffisait pas de payer une cotisation pour être membre d'une société savante); ensuite, après un périple européen, Bertrand retourna à Genève, où il put enseigner les mathématiques à l'Académie. Quant à l'«idée toute particuliere», il doit s'agir de l'observation – en apparence insignifiante mais capitale pour son application – qu'étant donné un trajet quelconque ouvert, partiel ou complet, on peut, tout en conservant les cases déjà occupées, en changer l'extrémité si sa case terminale ne permet pas de joindre une case désirée. Ceci permettra en particulier, dans le cas d'un trajet partiel (éventuellement après plusieurs essais) d'atteindre des cases jusqu'alors isolées.

Soit en effet un trajet couvrant m cases,

$$1, 2, \ldots, m-1, m,$$

et supposons qu'une case intérieure x, différente de $m-1$, soit à un saut du cavalier de m. Alors

$$1, 2, \ldots, x, m, m-1, \ldots, x+1$$

est un nouveau trajet, couvrant exactement les mêmes cases, mais avec une nouvelle extrémité (figure 7). Tel est l'*unique* moyen d'Euler, qu'il applique comme un forcené dans son manuscrit, et qui le mènera aux résultats et déductions de son article. C'est pourquoi il écrit dans l'article qu'il va «expliquer une méthode certaine, qui nous conduira infailliblement au but proposé, & par le moyen de laquelle on sera en état de découvrir autant de routes satisfaisantes qu'on voudra» (Euler 1759, p. 314).

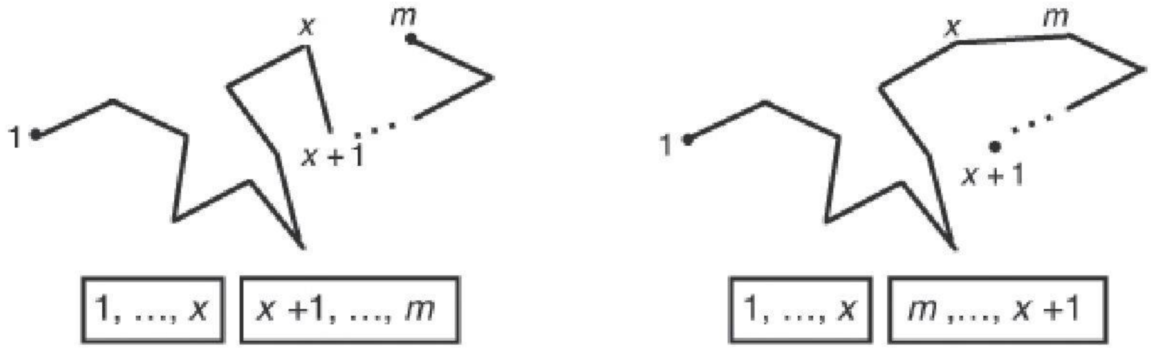

Figure 7.–Règle attribuée à Bertrand.

Construction d'un parcours complet

Grâce à l'exemple qui suit, repris du sixième cahier de notes d'Euler, on pourra se familiariser avec la méthode d'obtention d'un trajet complet. Alors que le trajet partiel de l'article imprimé laisse deux cases inoccupées, celui du manuscrit, laissant douze cases vides, est peut-être plus général, puisque nous avons précédemment mentionné qu'un trajet prudemment mené laisserait libres entre cinquante et soixante cases.

Soit donc le trajet de la figure 8, dans lequel les cases libres sont désignées par les lettres de *a* à *l*. On peut d'emblée remarquer que certaines de ces cases sont jointes entre elles par le saut du cavalier; ce qui est plus une situation courante qu'une circonstante fortuite. Nous pouvons donc déjà répartir nos douze cases inoccupées en cinq groupes, à savoir *a–b*, *c–d–e*, *f–g–h–i*, *j*, et *k–l*. Notre tâche se réduit donc à l'annexion de cinq groupes d'éléments au trajet déjà existant.

1°) *Annexion de a–b.*

Notre trajet partiel peut donc être représenté comme 1, …, 52. Sa dernière case ne communiquant pas avec l'une ou l'autre des deux cases à annexer, recherchons quelles sont les cases que 52 pourrait rejoindre, car nous pourrons alors, grâce à la règle, trouver une nouvelle extrémité au trajet existant. Dans notre écriture, 52] 17 37 9 51 signifiera que depuis 52 on peut passer aux cases 17, 37, 9, 51; les quantités indiquées en indice sont leurs suivants immédiats dans le trajet déjà existant, elles deviendront donc les nouvelles cases terminales du trajet reformé. On a donc ici

$$52 \;]\; 17_{18}\; 37_{38}\; 9_{10}\; 51_{52},$$

alors que

$$\mathrm{a} \;]\; 10\; 18\; \mathrm{b}.$$

Comparant les nombres en indice avec les cases reliées à *a*, il apparaît qu'on a deux possibilités de joindre *a* (et donc *b*) au trajet, par l'intermédiaire de 18 ou de 10. Choisissons, comme Euler, 18. Nous obtiendrons ainsi le nouveau trajet, augmenté de deux cases,

1, …, 17, 52, …, 18, *a*, *b*.

2°) *Annexion de c–e.*

L'extrémité 1 étant la plus proche du groupe à intégrer, inversons le trajet existant:

b, *a*, 18, …, 52, 17, …, 1

et considérons les cases communiquant avec 1 et les voisins de *c* (entendant par «voisins» les cases distantes d'un saut du cavalier):

$1 \;]\; 16_{15}\; 2_1$ $\qquad\qquad$ c] d 45 15.

Il n'y a pas de choix, seul 15 permettra d'annexer notre second groupe. Le parcours étendu deviendra donc

b, *a*, 18, …, 52, 17, 16, 1, …, 15, *c*, *d*, *e*,

que nous remettons maintenant dans le sens initial:

e, *d*, *c*, 15, …, 1, 16, 17, 52, …, 18, *a*, *b*.

A ce stade, il peut être utile de renuméroter le trajet déjà couvert pour avoir une meilleure idée de la situation. Nous l'avons fait dans la figure 9, à l'instar d'Euler (qui numérote un peu différemment); le nouveau parcours couvre maintenant 57 cases.

34	*j*	*b*	51	*f*	31	20	7
a	52	35	32	19	8	*g*	30
36	33	18	9	50	29	6	21
17	10	37	28	5	22	49	*h*
44	27	*e*	11	38	*i*	4	23
d	16	45	26	3	12	39	48
l	43	2	15	46	41	24	13
1	*c*	*k*	42	25	14	47	40

Figure 8.–Trajet partiel sur 52 cases.

39	*j*	57	22	*f*	42	53	12
56	21	38	41	54	11	*g*	43
37	40	55	10	23	44	13	52
20	9	36	45	14	51	24	*h*
29	46	1	8	35	*i*	15	50
2	19	28	47	16	7	34	25
l	30	17	4	27	32	49	6
18	3	*k*	31	48	5	26	33

Figure 9.–Trajet partiel sur 57 cases.

3°) *Annexion de f–i.*

Le voisinage de l'extrémité 1 offrant plus de choix, inversons – suivant là encore Euler – le trajet, qui devient donc 57, …, 1, et considérons les voisins de 1, avec leurs successeurs dans le trajet, et de *i*:

$1 \;]\; 10_9\; 14_{13}\; 16_{15}\; 4_3\; 30_{29}\; 2_1\; 20_{19}\; 40_{39},$

i] 13 *h* 25 49 27 47 45 23.

Il y a une possibilité d'annexion directe puisque 13 est commun, et on parviendra à la nouvelle extension

57, …, 14, 1, …, 13, *i*, *h*, *g*, *f*,

ou, prenant cette suite à rebours pour une question de commodité ultérieure,

f, *g*, *h*, *i*, 13, …, 1, 14, …, 57.

4°) *Annexion de j.*

Procédant comme usuellement,

$$57\ ]\ 54_{55}\ 10_{9}\ 40_{41}\ 56_{57}, \qquad j\ ]\ 41\ 55\ 37,$$

nous trouvons deux possibilités, dont nous prendrons, à l'instar d'Euler, la première, ce qui donne le trajet

$$f, g, h, i, 13, \ldots, 1, 14, \ldots, 54, 57, \ldots, 55, j,$$

dont la renumérotation conduit au trajet de la figure 10.

43	62	59	26	1	46	57	6
60	25	42	45	58	7	2	47
41	44	61	8	27	48	5	56
24	9	40	49	18	55	28	3
33	50	17	10	39	4	19	54
16	23	32	51	20	11	38	29
l	34	21	14	31	36	53	12
22	15	*k*	35	52	13	30	37

Figure 10.– Trajet partiel sur 62 cases.

5°) *Annexion de k–l.*

Considérons cette fois les voisins des deux extrémités du trajet 1, …, 62, représenté donc sous les formes directe et renversée:

$$62\ ]\ 45_{46}\ 61_{62}\ 41_{42} \qquad 1\ ]\ 42_{41}\ 8_{7}\ 48_{47}\ 2_{1},$$

et ceux du groupe à intégrer:

$$l\ ]\ 50\ 32\ k \qquad k\ ]\ l\ 23\ 51\ 31.$$

Aucune possibilité ne permettant une annexion directe, Euler considère que dans 62, …, 1 on a

$$1\ ]\ 42_{41} \qquad 41\ ]\ 50_{49} \qquad 49\ ]\ 32_{31}$$

et l'ultime lien permet l'annexion. Le trajet deviendra donc successivement

$$62, \ldots, 42, 1, \ldots, 41,$$
$$62, \ldots, 50, 41, \ldots, 1, 42, \ldots, 49,$$
$$62, \ldots, 50, 41, \ldots, 32, 49, \ldots, 42, 1, \ldots, 31, k, l.$$

Ce parcours, pris à rebours, est celui de la figure 11. Il est maintenant complet.

Remarquons que, dans la figure 10, *k* et *l* eussent pu être intégrés directement au trajet par la boucle 31, *k*, *l*, 32, ou aussi par la boucle 50, *l*, *k*, 51. En outre, si cela avait été fait, le trajet

$$1, \ldots, 31, k, l, 32, \ldots, 64$$

aurait pu être tranformé en

$$1, \ldots, 31, k, l, 32, \ldots, 41, 62, \ldots, 42$$

et donc directement fermé. D'ailleurs, on aurait aussi pu intégrer initialement (figure 8) a et b par une boucle entre 18 et 19 ou entre 9 et 10, ou encore i, h, g, f par une boucle entre 28 et 29. Mais, dans son manuscrit, Euler ne considère aucune simplification; c'est pourquoi nous avons parlé plus haut d'un usage forcené de la règle attribuée à Bertrand.

6°) *Fermeture du trajet.*

Dans le cas de la figure 11 ce n'est guère difficile, car 64 peut communiquer avec 51 et son successeur 52 avec 1. Le trajet 1, …, 64 sera donc changé en 1, …, 51, 64, …, 52. Comme Euler décide de maintenir le terme du trajet à la case de 64, il adopte la suite 51, …, 1, 52, …, 64, dont la renumérotation mène au circuit de la figure 12.

35	64	61	8	33	38	59	28
62	9	34	37	60	27	32	39
51	36	63	26	7	40	29	58
10	25	50	41	16	57	6	31
43	52	17	24	49	30	15	56
18	11	42	53	14	23	48	5
1	44	13	20	3	46	55	22
12	19	2	45	54	21	4	47

Figure 11.–Trajet complété.

17	64	61	44	19	14	59	24
62	43	18	15	60	25	20	13
1	16	63	26	45	12	23	58
42	27	2	11	36	57	46	21
9	52	35	28	3	22	37	56
34	41	10	53	38	29	4	47
51	8	39	32	49	6	55	30
40	33	50	7	54	31	48	5

Figure 12.–Fermeture du trajet.

Construction d'un carré symétrique

Le manuscrit d'Euler rapporte ses premiers pas pour la construction d'un trajet symétrique, donc d'un trajet dans lequel les cases diagonalement opposées diffèrent de 32 (comme dans la figure 6): il place 1 dans un coin, 64 à un pas du cavalier de 1 (pour la fermeture), et commence à inscrire les suites partant de l'un et de l'autre, ou bien seulement la suite issue de l'un mais en ayant soin d'éliminer, en y inscrivant des points, les cases diagonalement opposées. Naturellement, comme pour les autres trajets construits empiriquement, il ne parviendra normalement pas au but, car il restera des cases inatteignables. Voyons donc comment il procède dans son article imprimé, où les explications sont fort claires.

Commençons par placer la suite des nombres depuis 1 et, simultanément, la suite depuis 33, tour à tour, dans les cases diagonalement opposées. Mais comme 1 a été placé dans le coin est que la deuxième case d'accès est restée libre, Euler y inscrit 64, met 32 dans son opposée, et commence là aussi à inscrire les suites décroissantes depuis ces deux nombres dans les cases opposées. Ce faisant, il obtiendra deux suites continues disjointes, en l'occurrence

58, …, 64, 1, …, 19 26, …, 32, 33, …, 51,

lui laissant douze cases vides, soit, nécessairement, six paires de cases opposées qu'il distingue, et associe, par des lettres majuscules et minuscules (figure 13). Pour les transformations, Euler ne considérera qu'une seule suite: l'extension de l'autre sera *ipso facto* déterminée du fait de la symétrie.

Considérons donc les voisins de 19. On a

19] 46 34 6 18.

Comme 46 et 34 appartiennent à l'autre suite alors que 18 ne fera qu'inverser le trajet, seul 6 offre une possibilité, menant à

58, …, 64, 1, …, 6, 19, …, 7,

qui permet de prolonger la suite, et donc l'autre aussi:

58, …, 64, 1, …, 6, 19, …, 7, *f*, *B*, *d*, *C*,

26, …, 32, 33, …, 38, 51, …, 39, *F*, *b*, *D*, *c*.

Mais ici la situation est bloquée. En effet, nous avons, en n'admettant que les termes de la première suite,

C] d_C 6_{19} 8_7,

et aucune de ces possibilités ne permettra de progresser, non plus que les voisins de 58 qui tous (sauf 59) appartiennent à l'autre suite. Cet essai vain d'Euler est naturellement rapporté à dessein dans son article: le lecteur concevra de la sorte qu'il ne faut pas être trop glouton et savoir avancer à petits pas. Ainsi, dans ce cas, nous nous contenterons d'annexer deux cases, à savoir *f* et *B*. Car comme B] 12_{11} et 11] D, notre première suite deviendra

58, …, 64, 1, …, 6, 19, …, 12, *B*, *f*, 7, …, 11, *D*, *c*.

Puis, avec c] 16_{15} et 15] a, nous aurons

58, …, 64, 1, …, 6, 19, …, 16, *c*, *D*, 11, …, 7, *f*, *B*, 12, …, 15, *a*, *E*,

qui maintenant couvre le nombre dû de cases, et détermine aussi la suite conjuguée, soit

26, …, 32, 33, …, 38, 51, …, 48, *C*, *d*, 43, …, 39, *F*, *b*, 44, …, 47, *A*, *e*.

Il ne reste plus qu'à appondre ces deux suites, l'extrémité de l'une devant être à un saut du début de l'autre. Or

E] 64 2 62_{63} a 6 f A 50, 26] 27 13 63,

ce qui amène à choisir pour la première suite

58, …, 62, *E*, *a*, 15, …, 12, *B*, *f*, 7, …, 11, *D*, *c*, 16, …, 19, 6, …, 1, 64, 63

et conséquemment pour la seconde

26, …, 30, *e*, *A*, 47, …, 44, *b*, *F*, 39, …, 43, *d*, *C*, 48, …, 51, 38, …, 33, 32, 31.

Accolant 63 à 26, on a un circuit complet, qui de plus est fermé puisque 58 est à un saut de 31. Comme il est fermé, on peut reprendre le point de départ initial, avec 1 dans le coin, ce qui produira la figure 14.

Remplissage préalable d'un demi-échiquier

Tant dans son manuscrit que dans l'article, Euler se propose de remplir un demi-échiquier; une situation particulière des cases de 1 et de 32 lui permettra en effet d'obtenir un trajet

10	29	48	35	8	31	46	33
49	36	9	30	47	34	7	58
28	11	*A*	*C*	*f*	45	32	19
37	50	*B*	*D*	*e*	6	59	44
12	27	38	*E*	*d*	*b*	18	5
51	64	13	*F*	*c*	*a*	43	60
26	39	2	15	62	41	4	17
1	14	63	40	3	16	61	42

Figure 13.– Trajet symétrique partiel.

14	59	42	35	16	31	54	33
41	36	15	58	55	34	17	30
60	13	56	43	18	53	32	7
37	40	19	12	57	6	29	52
20	61	38	25	44	51	8	5
39	64	21	50	11	24	45	28
62	49	2	23	26	47	4	9
1	22	63	48	3	10	27	46

Figure 14.– Trajet symétrique complet.

complet fermé sur l'échiquier entier. Tout comme auparavant, on commence par remplir tant bien que mal, puis on complète à l'aide de la règle usuelle. Le manuscrit a un exemple laissant trois cases vides, l'article le cas de quatre cases vides. Rapportons ce dernier. Les cases vides y sont désignées par les lettres *a*, *b*, *c*, *d* qui, de fait, se répartissent en deux groupes, *a*-*c*-*d* et *b*, à annexer au trajet continu 1, …, 28 (figure 15). Comme les sorties non banales de 28 sont vers 25, 11, 17, on en déduit les trajets

$$1, \ldots, 25, 28, \ldots, 26 \qquad 1, \ldots, 11, 28, \ldots, 12 \qquad 1, \ldots, 17, 28, \ldots, 18$$

dont aucun ne convient. Mais comme

$$18 \;]\; 19_{18}\; 17_{28}\; 21_{20} \qquad \text{et} \qquad b \;]\; 24\; 2\; 22\; 20,$$

le choix va de soi; nous obtenons ainsi

$$1, \ldots, 17, 28, \ldots, 21, 18, \ldots, 20, b,$$

et, puisque

$$b \;]\; 24_{23}, \qquad 23 \;]\; 8_9, \qquad 9 \;]\; a,$$

nous obtiendrons les transformations successives

$$1, \ldots, 17, 28, \ldots, 24, b, 20, \ldots, 18, 21, \ldots, 23,$$

$$1, \ldots, 8, 23, \ldots, 21, 18, \ldots, 20, b, 24, \ldots, 28, 17, \ldots, 9,$$

et nous joindrons à 9 les cases *a*, *c*, *d*.

Nous avons ainsi complété le demi-échiquier. Mais notre but était d'obtenir un trajet sur tout l'échiquier. Pour ceci, il faudrait que la dernière case remplie dans le demi-échiquier soit à un saut du cavalier de la première case à remplir dans la deuxième moitié. Si en outre la première case du demi-échiquier est à un saut du cavalier de la dernière dans la moitié supérieure, le trajet sera fermé. Enfin, il serait expédient que nous pussions utiliser la disposition établie dans notre demi-échiquier, car, outre que cela nous facilitera la tâche, cela nous permettra, comme nous le verrons, d'obtenir directement un carré symétrique.

Or, si 14 devient fin de parcours, donc est remplacé par 32, notre but sera atteint: il suffira de prendre comme deuxième moitié le même demi-échiquier, mais avec ses nombres augmentés de 32, puis de le renverser sur le demi-échiquier originel. Car ainsi la case de 1, devenu 33, sera à un saut de 32 (ex-14), et la case de 32, devenu 64, sera à un saut de 1. Notre opération de rabattement produira en outre un carré symétrique.

Il nous faut donc déplacer la fin du parcours, pour le moment en *d*, dans la case de 14. Comme *d*] 15_{14}, nous prendrons

1, …, 8, 23, …, 21, 18, …, 20, *b*, 24, …, 28, 17, …, 15, *d*, *c*, *a*, 9, …, 14.

Le trajet, renuméroté, est celui de la moitié inférieure de la figure 16, laquelle représente aussi le trajet sur tout l'échiquier – après qu'on a traité la deuxième moitié comme mentionné ci-dessus.

1	*a*	*b*	28	7	14	19	16
24	27	8	*c*	20	17	6	13
9	2	25	22	11	4	15	18
26	23	10	3	*d*	21	12	5

Figure 15.–Demi-échiquier incomplet.

37	62	43	56	35	60	41	50
44	55	36	61	42	49	34	59
63	38	53	46	57	40	51	48
54	45	64	39	52	47	58	33
1	26	15	20	7	32	13	22
16	19	8	25	14	21	6	31
27	2	17	10	29	4	23	12
18	9	28	3	24	11	30	5

Figure 16.–Elargissement à tout l'échiquier.

Remarquons encore que ici 1 était dans un coin du demi-échiquier, et que ceci détermine la place que devra occuper 32, soit la troisième comptée depuis l'autre côté. Mais il suffit d'exiger que si l'un est à une distance δ d'un bord, l'autre doit être à la distance δ + 2 de l'autre bord, tous deux dans la ligne supérieure. Euler ne considère pas, ni dans l'article ni dans le manuscrit, que la fin de parcours pourrait être dans la pénultième ligne; il est vrai que ceci ne changerait rien d'essentiel et que la situation permettant d'accoler les deux moitiés pourrait être facilement, *mutatis mutandis*, recréée.

Parcours sur d'autres échiquiers

Dans son article, Euler examine à la fin les cas d'autres échiquiers: carrés de dimension différant de 8 x 8, rectangles, croix. Son manuscrit ajoute le cas de losanges et établit aussi (empiriquement) d'autres cas d'impossibilité. Les résultats d'Euler sont les suivants.

1°) *Echiquiers carrés.*

L'ordre 3 est impossible, car il laisse la case centrale vide, et de même l'ordre 4, qui laisse une case angulaire vide.

Quant à l'ordre 5, il permet un trajet complet, mais qui restera toujours ouvert, et il en va de même pour toute «autre figure, qui contient un nombre impair de cases» (EULER 1759, p. 332). La raison en est la suivante. A chaque pas du cavalier la couleur de la case change; conséquemment, la couleur de la case de 1 et de la case du dernier nombre (lui aussi impair) sera la même, et on ne pourra donc jamais sauter de la case finale à la case initiale. De plus, on ne peut partir de n'importe quelle case: il y a 13 cases noires et 12 cases blanches; 1 ne pourra donc jamais occuper une case blanche sans quoi le trajet restera incomplet d'une case. On conçoit aussi, plus généralement, que si la différence des nombres de ces cases excède 1, le trajet sera impossible; il l'est par exemple pour l'échiquier cruciforme de la figure 17 (examiné dans le manuscrit seulement).

L'une des raisons alléguées par Euler pour étudier d'autres échiquiers était que l'échiquier usuel ne permettait pas une énumération des cas possibles du fait de leur trop grande quantité et variété (EULER 1759, p. 331). La réduction de la taille permet de séparer des catégories. Ainsi, pour le carré d'ordre 5, Euler examine quels sont les trajets dans lesquels la somme de deux cases diagonalement opposées fait 26 (ce qui impose 13 pour la case médiane). Il construit huit variations, qui «épuisent entierement cette espece» (EULER 1759, p. 335). Celle de la figure 18 (EULER 1759, p. 335; manuscrit, fol. 229v) en est un exemple. Il applique aussi l'artifice qu'il a développé pour le demi-échiquier: grâce à un carré de 5 particulier, qui peut être relié à son voisin, Euler construit un trajet complet et fermé dans un carré d'ordre 10 (figure 19; EULER 1759, p. 335). Enfin, Euler construit aussi dans son manuscrit de nombreux carrés d'ordre 6, mais un seul a été conservé dans l'article.

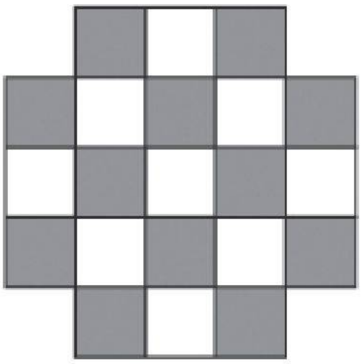

Figure 17.–Echiquier cruciforme.

23	18	11	6	25
10	5	24	17	12
19	22	13	4	7
14	9	2	21	16
1	20	15	8	3

Figure 18.–Carré d'ordre 5.

30	41	46	37	32	53	60	67	72	55
47	36	31	40	45	68	73	54	61	66
42	29	38	33	50	59	52	63	56	71
35	48	27	44	39	74	69	58	65	62
28	43	34	49	26	51	64	75	70	57
7	20	25	14	1	76	99	84	93	78
12	15	8	19	24	89	94	77	98	85
21	6	13	2	9	100	83	88	79	92
16	11	4	23	18	95	90	81	86	97
5	22	17	10	3	82	87	96	91	80

Figure 19.– Carré d'ordre 10.

2°) *Echiquiers rectangulaires.*

Nous considérons des rectangles dont la longueur est supposée supérieure à la hauteur, et la hauteur supérieure à 2 puisque sinon il n'y a pas du tout de trajet.

- Si la hauteur est 3 et la longueur un nombre supérieur à 3, les trajets ne sont pas toujours possibles. Dans la figure 20 (article et manuscrit), donc pour le cas du rectangle 3 x 4, les cases diagonalement opposées font la même somme; mais on ne trouverait pas un trajet fermé. Concernant les rectangles gardant cette même hauteur mais de longueur plus grande, Euler exprime dans son article deux assertions générales: «Si la largeur contient trois cases, & la longueur 5 ou 6, il est impossible de les parcourir; mais, donnant à la longueur 7 ou plusieurs cases, on pourra réussir, pourtant sans rentrer» (EULER 1759, p. 336).

La figure 21 montre un autre exemple d'Euler, cette fois dans le manuscrit seul. Il y transforme ensuite le trajet, et obtient notamment (puisque $27\ ]\ 12_{13}\ 26\ 16_{17}\ 20_{21}$)

1, …, 20, 27, …, 21.

- Nous soulignons cette déduction particulière car, si ce trajet est renuméroté et qu'on lui adjoigne un même rectangle retourné, on pourra construire dans ce rectangle 3 x 18 un trajet complet *fermé* (figure 22). L'eût-il fait, Euler aurait restreint la dernière partie de son affirmation précédente (de fait, les trajets fermés sont possibles depuis la longueur 10, mais seulement pour les longueurs paires puisque autrement le nombre total des cases est impair).

3	6	9	12
8	11	2	5
1	4	7	10

Figure 20.–Rectangle 3 x 4.

11	14	9	24	27	18	5	2	21
8	25	12	15	6	23	20	17	4
13	10	7	26	19	16	3	22	1

Figure 21.–Rectangle 3 x 9.

11	14	9	24	21	18	5	2	27	54	29	32	45	48	51	36	41	38
8	23	12	15	6	25	20	17	4	31	44	47	52	33	42	39	50	35
13	10	7	22	19	16	3	26	1	28	53	30	43	46	49	34	37	40

Figure 22.–Rectangle 3 x 18.

- Nous avons vu un damier de hauteur 4, qui ne pouvait être fermé: le demi-échiquier. Généralement, aucun rectangle de hauteur 4 ne peut l'être, quelle qu'en soit la longueur; Euler s'en est sans doute convaincu par ses essais (dans le manuscrit pour les rectangles 4 x 6, 4 x 8) car il affirme dans l'article que pour une hauteur inférieure à 5 «les routes rentrantes en elles-mêmes ne peuvent pas avoir lieu» (EULER 1759, p. 336). En revanche tous ces rectangles, depuis le moindre 4 x 5, peuvent être parcourus complètement.

- Si la hauteur est supérieure à 4, les trajets auront toujours lieu. De plus, les routes rentrantes, donc les trajets fermés, seront possibles lorsque «le nombre des cases est pair, pourvu qu'il n'y ait pas moins de 5 cases dans un côté» (*ibid.*). Il est ainsi affirmé, de manière générale, que tout rectangle $m \times n$ avec $m < n$ et $m \geq 5$ admet un trajet, et que celui-ci pourra être fermé si le nombre des cases est pair. Ceci clôt la question des rectangles.

Maintenant que nous avons examiné quelques assertions générales d'Euler, et que toutes étaient extraites de son article, il est à propos de remarquer que le manuscrit, lui, ne contient aucune telle assertion, mais au plus qualifie le trajet. Ainsi, un trajet transformé selon la règle sera un *alius ordo*. Quant au degré de perfectionnement du trajet, c'est au carré (*quadratum*) qu'il est rapporté. Celui-ci peut être soit simplement *plenum*, soit *perfectum* (dit aussi *in se rediens*), soit *bipartitum* s'il est formé grâce au demi-échiquier, ces dénominations pouvant être ajoutées l'une à l'autre si elles ne se contredisent pas. Nous trouvons une fois l'expression bâtarde *kein perfectum*. La qualification la plus prolixe concerne un trajet fermé construit par l'intermédiaire du demi-échiquier et symétrique: c'est un *quadratum in se rediens, bipartitum, et numerorum oppositorum differentia est 32.*

3°) *Echiquiers cruciformes.*

On trouve aussi le qualificatif de *perfectum*, ou encore, et de manière plus appropriée, l'expression *forma perfecta* pour une croix contenant un trajet fermé. En effet, comme partout dans son manuscrit, ce sont des trajets complets *et* fermés que Euler recherche en priorité. Tels sont ceux des figures 23 et 24 (les cases symétriques y ont une différence de 10 et 16). Trois des quatre exemples de l'article ont été repris du manuscrit, qui, lui, étudie d'autres cas, possibles ou non. Il arrive pourtant que Euler tente de construire un trajet quand bien même les nombres des cases de couleur différente diffèrent de plus de 1 (figure 17 ci-dessus): il est clair que son manuscrit est une suite de tentatives, où il applique systématiquement la règle de transformation des trajets que nous avons vue au début, sans se préoccuper *a priori* des questions de possibilité; il les déduira ensuite.

		14	19		
		7	12		
6	13	20	15	18	11
1	8	5	10	3	16
		2	17		
		9	4		

Figure 23.–Figure cruciforme.

	1	20	7	26	
21	8	27	32	19	14
2	29	12	15	6	25
9	22	31	28	13	18
30	3	16	11	24	5
	10	23	4	17	

Figure 24.–Autre type.

4°) *Echiquiers rhombiques.*

Aucun n'est reproduit dans l'article. Même pas la plus élégante figure du manuscrit, du moins à notre avis, qui est celle du trajet fermé de la figure 25. Un mélange de croix et de rhombe est représenté dans le trajet ouvert de la figure 26, extraite du manuscrit. Au siècle passé, une main sacrilège a suivi au crayon les pas du trajet, tout comme du reste pour la plupart des autres figures représentant des trajets du cavalier. Parfois maltraité dans son édition, Euler l'aura aussi été dans ses manuscrits.

				14	31				
			30	7	2	15			
		4	13	58	17	32	1		
	40	29	6	3	8	59	16	33	
28	5	26	57	12	49	18	53	60	47
41	24	39	50	9	52	11	48	19	34
	27	42	25	56	21	54	35	46	
		23	38	51	10	45	20		
			43	22	55	36			
				37	44				

Figure 25.–Figure rhombique.

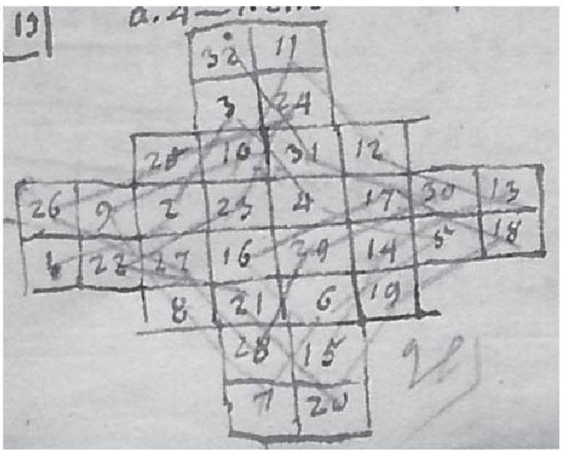

Figure 26.–Figure d'Euler.

Remerciements

Nous savons vivement gré à Elena Schuchman (Orenbourg) de nous avoir procuré en 2007 un premier jeu de photographies des pages en question du manuscrit (nous ignorions alors la présence de reproductions à Bâle). Larisa Brylevskaya (Université des technologies, Saint-Pétersbourg) nous a constamment facilité l'accès aux documents, quand bien même elle était toujours surchargée de tâches, que ce soit par ses cours, par la préparation du Congrès Euler en 2007, par l'organisation des séminaires annuels sur l'histoire des mathématiques et de la mécanique, qui le plus souvent coïncident avec nos passages à Saint-Pétersbourg. L'accueil aux Archives de l'Académie des Sciences a toujours été chaleureux, avec son personnel constamment disposé à accorder son aide.

Bibliographie

EULER L., 1752-53a. Elementa doctrinae solidorum. *Novi Commentarii Academiae scientiarum imperialis Petropolitanae* IV [publié 1758]: 109-140 (*Opera omnia* I/26: 71-93).

EULER L., 1752-53b. Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum quibus solida hedris planis inclusa sunt praedita. *Novi Commentarii Academiae scientiarum imperialis Petropolitanae* IV [1758]: 140-160 (*Opera omnia* I/26: 94-108).

EULER L., 1759. Solution d'une question curieuse qui ne paroit soumise à aucune analyse. *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres* 15 [1766]: 310-337 (*Opera omnia* I/7: 26-56).

EULER L., 1911–. *Opera omnia*. Orell Füssli (*et al.*), Zurich (*et al.*)

EULER L., 2008. Леонард Эйлер, к 300-летию со дня рождения. Нестор-История, Saint-Pétersbourg. 336 p.

FUSS P.H., 1843. *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIII*ème *siècle*. Académie impériale, Saint-Pétersbourg (2 vol.). cxxii + 674, xxiv + 714 p.

KITÂB AL-SHAṬRANJ, 1986: [Fac-simile du manuscrit d'Istamboul Lala Ismail Efendi 560] Institut für Geschichte der arabisch-islamischen Wissenschaften, Francfort. 284 p.

OZANAM J., 1741. *Recreations mathematiques et physiques* (4 vol.). Jombert, Paris. 460 p. (vol. I).

SESIANO J. (СЕЗИАНО Ж.). К истории теоремы Эйлера о многогранниках. *In*: Euler 2008: 79-88.

Manuscrit reçu le 1er octobre 2012