Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande
Band: 30 (1904)
Heft: 1

Artikel: Deux problèmes relatifs aux rayons de courbure
Autor: Amstein, H.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-24097

fer-blanc. Pour les grandes charges, et lorsqu'il y avait plusieurs mines à faire sauter ensemble, l'allumage était électrique. Pour les petites charges on utilisait la mèche imperméable, allumée à la surface de l'eau ou même remise allumée au plongeur quand il ne s'agissait que de poser une cartouche à la surface du rocher ou au pied d'une paroi rocheuse.

De bourrage il n'était naturellement pas question, du moins quand la charge était à une profondeur suffisante sous l'eau. Pour le même motif, le second procédé décrit ne peut être utilisé que sous une hauteur d'eau de 4 à 5 m. au moins, pour produire un effet utile et convenable.

Le dérochement produit la plupart du temps des déblais de gros échantillon, dont le débitage sous l'eau coûterait cher. On enlève à la drague les blocs de moins de 250 à 300 kg. ; les autres sont amarrés par des plongeurs adroits à la chaîne d'une petite bigue flottante; on enlève de même les blocs de maçonnerie, de pierre de taille ou d'enrochements, vestiges de l'antiquité qui se retrouvent dans presque tous les ports grecs. Au petit port de Carystos, en Eubée, qui servait autrefois à l'embarquement des marbres cipolins, nous avons trouvé le sol ancien littéralement jonché de marbres ébauchés ou taillés, sous une couche de sable de 2 à 3 m. d'épaisseur.

Athènes, le 5 novembre 1903.

Deux problèmes relatifs aux rayons de courbure.

par M. H. AMSTEIN
Docteur en philosophie. Professeur ordinaire.

Premier problème.

Les coordonnées étant cartésiennnes, une courbe (C') est déduite d'une courbe donnée (C) de telle façon qu'en conservant les abscisses des points de (C) on multiplie les ordonnées par $\frac{b}{a}$, où a et b sont des nombres réels et positifs quelconques. Dans le cas où $\frac{b}{a} < 1$, la courbe (C') peut être envisagée comme la projection orthogonale de (C) sur un plan qui fait avec le plan de (C) un angle dont le cosinus $= \frac{b}{a}$. Les points P et P' des courbes (C) et (C') seront dits correspondants s'ils ont la même abscisse. *On demande d'établir la relation qui existe entre les rayons de courbure R et R' aux points P et P' de ces deux courbes, et d'en tirer une construction de R'.*

Soit

$$(C) \qquad y = f(x)$$

l'équation de la courbe donnée (C) ; celle de la courbe (C') sera

$$(C') \qquad \eta = \frac{b}{a} f(x).$$

Les rayons de courbure en question auront pour expressions :

$$R = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}^3}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

$$R' = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{d\eta}{dx}\right)^2}^3}{\frac{d^2\eta}{dx^2}},$$

ou bien, en désignant par $f'(x)$, $f''(x)$ les dérivées première et deuxième de la fonction $f(x)$,

$$R = \frac{\sqrt{1 + f'(x)^2}^3}{f''(x)},$$

$$R' = \frac{\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2} f'(x)^2}^3}{\frac{b}{a} f''(x)},$$

de sorte que l'on a la relation

$$\frac{R'}{R} = \frac{a}{b} \frac{\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2} f'(x)^2}^3}{\sqrt{1 + f'(x)^2}^3}.$$

Posant

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \operatorname{tg} \alpha,$$

$$\frac{d\eta}{dx} = \frac{b}{a} f'(x) = \operatorname{tg} \alpha',$$

on sait que α et α' signifient les angles que font les tangentes aux courbes (C) et (C') aux points correspondants P et P' avec l'axe positif des x, et comme

$$\sqrt{1 + f'(x)^2} = \frac{1}{\cos \alpha},$$

$$\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2} f'(x)^2} = \frac{1}{\cos \alpha'},$$

la relation précédente peut s'écrire

$$(1) \qquad \frac{R'}{R} = \frac{a}{b} \frac{\cos^3 \alpha}{\cos^3 \alpha'}.$$

Sous cette forme elle peut être construite ; mais l'interprétation en est encore facilitée, si l'on y apporte la modification suivante :

On a

$$\cos \alpha' = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2} f'(x)^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{a \cos \alpha}{\sqrt{a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha}};$$

il s'ensuit que

$$\frac{\cos \alpha}{\cos \alpha'} = \frac{\sqrt{a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha}}{a}$$

et, par conséquent,

$$\frac{R'}{R} = \frac{a}{b} \frac{\sqrt{a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha}^3}{a^3} = \frac{1}{a} \frac{\sqrt{a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha}^3}{ab}.$$

Or on reconnaît immédiatement que l'expression

$$R_e = -\frac{\sqrt{a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha}^{\,3}}{ab}$$

est celle du rayon de courbure R_e de l'ellipse

$$x = a\sin\alpha\ ,$$
$$y = b\cos\alpha\ ,$$

au point P'', qui est caractérisé par la valeur particulière que l'on assigne au paramètre variable α. La relation (1) prend ainsi la forme finale

$$(1^a) \qquad R' = -\frac{R\,R_e}{a}\ ,$$

et l'on voit que, R et R_e étant connus, il suffit de construire une quatrième proportionnelle pour obtenir le rayon de courbure cherché R'.

Il est à remarquer que la même ellipse peut servir de courbe auxiliaire aussi longtemps que le rapport $\frac{b}{a}$ ne change pas de valeur, car la relation (1^a), mise sous la forme

$$R' = -R\,\frac{\sqrt{\cos^2\alpha + \frac{b^2}{a^2}\sin^2\alpha}^{\,3}}{\frac{b}{a}}\ ,$$

montre que son second membre ne dépend que du rapport $\frac{b}{a}$ et que ce rapport n'est pas nécessairement <1.

Dans la figure 1, PN est la normale, PT la tangente à la courbe (C) au point P et $P'T$ la tangente à la courbe (C') au point correspondant P'.

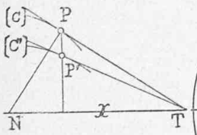

Fig. 1.

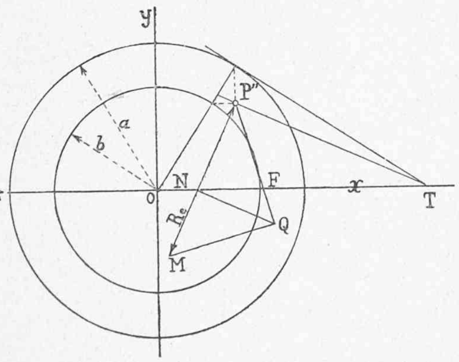

Fig. 2.

Pour déterminer le point P'' de l'ellipse dont le rayon de courbure entre dans la formule (1^a), on mènera par l'origine du plan de l'ellipse une parallèle à la normale au point P de la courbe (C), ce qui fait connaître l'angle α; ensuite on construira le point P'' de la manière habituelle. (De cette façon on trouve, en vérité, souvent un point symétrique de P'' par rapport à un des axes coordonnés ; mais, comme il ne s'agit que de la valeur absolue de R_e, les quatre points de l'ellipse, symétriques de P'' par rapport aux deux axes, rendent le même service).

Dans la figure 2 qui contient, pour mémoire, une des constructions les mieux connues du rayon de courbure de l'ellipse, $P''T$ est la tangente, $P''N$ la normale au point P'' de cette courbe, F en est un des foyers, M le centre de courbure et $P''M$ le rayon de courbure R_e relatifs au point P'' ; les angles QNM et FQM sont droits.

Afin de vérifier la formule (1^a) et de présenter, en même temps, un exemple donnant lieu à une construction de rayon de courbure qui ne soit pas trop simple, nous considérerons la courbe déduite de la spirale d'Archimède de la manière indiquée, c'est-à-dire la courbe qui, dans le cas où $\frac{b}{a} < 1$, peut être envisagée comme une projection orthogonale de cette spirale.

Soient r, t les coordonnées polaires d'un point du plan de la spirale d'Archimède (C), ρ, ψ les coordonnées polaires du point correspondant du plan de la courbe (C'), de sorte que

$$\begin{cases} x = r\cos t\ , \\ y = r\sin t\ , \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \rho\cos\psi, \\ \eta = \rho\,\sin\psi, \end{cases}$$

et soit

$$(C) \qquad r = ct \qquad (c = \text{const.})$$

l'équation de la spirale. Pour établir l'équation de la courbe (C'), on exprimera d'abord ρ et ψ en fonction de t, et on éliminera ensuite le paramètre t entre les deux équations ainsi obtenues. On a

$$\rho = \sqrt{x^2+\eta^2} = \sqrt{x^2 + \frac{b^2}{a^2}\,y^2} = r\sqrt{\cos^2 t + \frac{b^2}{a^2}\sin^2 t}$$
$$= \frac{r}{a}\sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t} = \frac{c}{a}\,t\sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}\ ,$$

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\eta}{x} = \frac{b}{a}\,\frac{y}{x} = \frac{b}{a}\operatorname{tg} t\ ,$$

d'où il suit

$$\operatorname{tg} t = \frac{a}{b}\operatorname{tg}\psi, \quad \cos t = \frac{b\cos\psi}{\sqrt{a^2\sin^2\psi + b^2\cos^2\psi}}\ ,$$

$$\sin t = \frac{a\sin\psi}{\sqrt{a^2\sin^2\psi + b^2\cos^2\psi}}\ ,$$

$$\psi = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{b}{a}\operatorname{tg} t\right), \qquad t = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{a}{b}\operatorname{tg}\psi\right),$$

et l'équation de la courbe (C') devient

$$\rho = bc\,\frac{\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{a}{b}\operatorname{tg}\psi\right)}{\sqrt{a^2\sin^2\psi + b^2\cos^2\psi}}\ .$$

Mais les calculs que l'on aura à effectuer deviennent un peu plus simples, si l'on conserve le paramètre t, de sorte que la courbe (C') sera donnée par les deux équations

$$(C')\begin{cases} \rho = \frac{c}{a}\,t\sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}\ , \\ \psi = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{b}{a}\operatorname{tg} t\right). \end{cases}$$

Le rayon de courbure R' au point P' (ρ, ψ) a pour expression

$$R' = \frac{\sqrt{\rho^2 d\psi^2 + (d\rho)^2}^{\,3}}{\rho^2 d\psi^3 + 2\,(d\rho)^2 d\psi + \rho\,d\rho\,d^2\psi - \rho\,d^2\rho\,d\psi}\ .$$

On trouve successivement :

$$d\psi = \frac{ab}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}\,dt,$$

$$d\rho = \frac{c}{a}\,\frac{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t - (a^2 - b^2)\,t\sin t\cos t}{\sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}}\,dt,$$

$$d\sigma = \sqrt{\rho^2 d\psi^2 + (d\rho)^2} =$$

$$= \frac{c}{a}\sqrt{a^2(t\sin t - \cos t)^2 + b^2(t\cos t + \sin t)^2}\,dt,$$

$$d^2\psi = 2ab\,(a^2 - b^2)\,\frac{\sin t\cos t}{(a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t)^2}\,dt^2,$$

$$d^2\rho = -\frac{c}{a}\,(a^2 - b^2)\times$$

$$\frac{2\,(a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t)\sin t\cos t + t\,(a^2\cos^4 t - b^2\sin^4 t)}{\sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}^{\,3}}\,dt^2.$$

En introduisant ces valeurs dans l'expression de R', on obtient, toute réduction faite,

$$R' = \frac{c}{a^2 b}\,\frac{\sqrt{a^2(t\sin t - \cos t)^2 + b^2(t\cos t + \sin t)^2}^{\,3}}{t^2 + 2}.$$

Si dans cette égalité on fait $b = a$, elle fournit, pour le rayon de courbure R au point $P\,(r,\,t)$ de la spirale d'Archimède,

$$R = c\,\frac{\sqrt{t^2+1}^{\,3}}{t^2+2},$$

expression qui admet une construction connue et facile (voir fig. 3.)

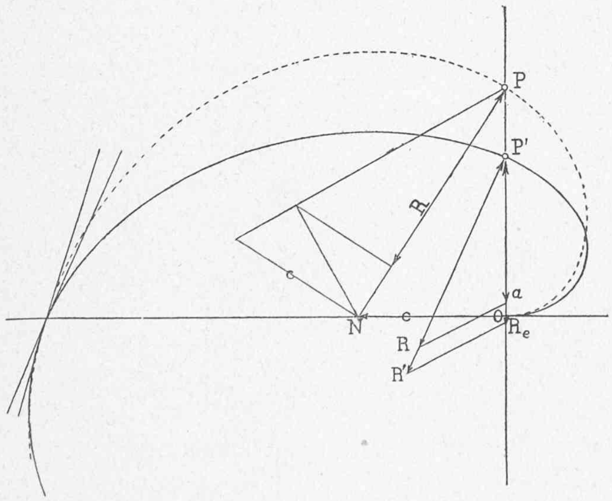

Fig. 3.

En vue de la vérification en question, il est nécessaire d'exprimer aussi le rayon de courbure au point P'' de l'ellipse, à savoir

$$R_e = -\frac{\sqrt{a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha}^{\,3}}{ab},$$

au moyen du paramètre t.

Comme

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{d\,(r\sin t)}{d\,(r\cos t)} = \frac{d\,(ct\sin t)}{d\,(ct\cos t)} = -\frac{t\cos t + \sin t}{t\sin t - \cos t}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{t\sin t - \cos t}{\sqrt{t^2+1}},$$

$$\sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = -\frac{t\cos t + \sin t}{\sqrt{t^2+1}},$$

il vient

$$R_e = -\frac{1}{ab}\sqrt{\frac{a^2(t\sin t - \cos t)^2 + b^2(t\cos t + \sin t)^2}{t^2+1}}^{\,3}.$$

Or on peut écrire

$$R' = -\frac{1}{a}\left[\frac{c\sqrt{t^2+1}^{\,3}}{t^2+2}\right]\times$$

$$\left[-\frac{1}{ab}\sqrt{\frac{a^2(t\sin t - \cos t)^2 + b^2(t\cos t + \sin t)^2}{t^2+1}}^{\,3}\right],$$

ce qui montre qu'effectivement

$$R' = -\frac{R\,R_e}{a}.$$

Second problème.

En examinant s'il existait, pour les coordonnées polaires, une formule analogue à celle qui vient d'être vérifiée pour les coordonnées cartésiennes, j'ai été amené à poser et à résoudre le problème qui va être énoncé.

On dira que deux ou plusieurs points d'une même courbe ou de courbes différentes se correspondent, s'ils répondent à une même valeur de φ. Les centres de courbure relatifs à des points de ce genre seront également dits correspondants. Ceci posé, le problème qui va être résolu peut s'énoncer comme il suit :

Etant donnée une courbe

$$r = f(\varphi),$$

déterminer toutes les courbes

$$\rho = F(\varphi)$$

telles que les centres de courbure correspondants soient avec l'origine en ligne droite.

Si l'on désigne par α, β les coordonnées cartésiennes du centre de courbure relatif au point $(r,\,\varphi)$ de la courbe $r = f(\varphi)$ et par r', r'' les deux premières dérivées de r par rapport à φ, on sait que

$$\alpha = \frac{-r'(r^2 + r'^2)\sin\varphi + r\,(r'^2 - rr'')\cos\varphi}{r^2 + 2r'^2 - rr''},$$

$$\beta = \frac{r'(r^2 + r'^2)\cos\varphi + r\,(r'^2 - rr'')\sin\varphi}{r^2 + 2r'^2 - rr''}$$

et que, par conséquent,

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{r'(r^2 + r'^2)\cos\varphi + r\,(r'^2 - rr'')\sin\varphi}{-r'(r^2 + r'^2)\sin\varphi + r\,(r'^2 - rr'')\cos\varphi}.$$

En désignant par α', β' les coordonnées rectangulaires du centre de courbure relatif au point $(\rho,\,\varphi)$ de la courbe $\rho = F(\varphi)$ et par ρ', ρ'' les deux premières dérivées de ρ par rapport à φ, on a de même

$$\frac{\beta'}{\alpha'} = \frac{\rho'(\rho^2 + \rho'^2)\cos\varphi + \rho\,(\rho'^2 - \rho\rho'')\sin\varphi}{-\rho'(\rho^2 + \rho'^2)\sin\varphi + \rho\,(\rho'^2 - \rho\rho'')\cos\varphi}.$$

Pour que les points (α, β), (α', β') et l'origine soient en ligne droite, il suffit de poser

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta'}{\alpha'},$$

c'est-à-dire

$$\frac{r'(r^2 + r'^2)\cos\varphi + r(r'^2 - rr'')\sin\varphi}{-r'(r^2 + r'^2)\sin\varphi + r(r'^2 - rr'')\cos\varphi} =$$

$$= \frac{\rho'(\rho^2 + \rho'^2)\cos\varphi + \rho(\rho'^2 - \rho\rho'')\sin\varphi}{-\rho'(\rho^2 + \rho'^2)\sin\varphi + \rho(\rho'^2 - \rho\rho'')\cos\varphi},$$

condition qui peut être ramenée à celle-ci :

$$(\alpha) \qquad \frac{r}{r'} \cdot \frac{r'^2 - rr''}{r^2 + r'^2} = \frac{\rho}{\rho'} \cdot \frac{\rho'^2 - \rho\rho''}{\rho^2 + \rho'^2}.$$

Telle est l'équation à laquelle doit satisfaire le rayon vecteur ρ considéré comme fonction de φ ; c'est une équation différentielle pour ρ.

Indépendamment de la forme particulière que prend la fonction $r = f(\varphi)$ dans chaque cas particulier, on peut satisfaire à l'équation (α) par les deux hypothèses

$$(\beta) \qquad \rho = Ar\,, \quad \rho = \frac{B}{r}\,,$$

où A et B sont des constantes arbitraires. Interprété géométriquement, ceci veut dire que 1° les courbes semblables et semblablement placées, et 2° les courbes déduites de l'une d'elles par une inversion, satisfont aux conditions du problème. Le premier de ces théorèmes est à peu près évident, et le second est une conséquence immédiate des principes qui ont cours dans la théorie des représentations conformes.

Les solutions (β) doivent nécessairement se retrouver dans la solution générale de l'équation (α).

Afin d'intégrer l'équation différentielle (α) on remarque tout d'abord que

$$\frac{\rho'^2 - \rho\rho''}{\rho^2 + \rho'^2} = \frac{d}{d\varphi}\,\mathrm{arc\ tg}\,\frac{\rho}{\rho'}.$$

Si donc on pose pour un instant

$$\frac{\rho}{\rho'} = z\,, \quad \frac{r}{r'} = t\,,$$

on peut en la multipliant par $d\varphi$, donner à l'équation (α) la forme

$$z\,d\,\mathrm{arc\ tg}\,z = t\,d\,\mathrm{arc\ tg}\,t\,,$$

ou bien

$$\frac{1}{2}\,d\log(1 + z^2) = \frac{1}{2}\,d\log(1 + t^2).$$

L'intégration de cette dernière équation fournit immédiatement

$$\log(1 + z^2) = \log(1 + t^2) + \log m^2,$$

où $\log m^2$ désigne la constante d'intégration. Il s'ensuit

$$1 + z^2 = m^2(1 + t^2)\,,$$

puis

$$z^2 = m^2(1 + t^2) - 1\,,$$

$$z = \sqrt{m^2 - 1 + m^2 t^2}$$

ou, en remplaçant z et t de nouveau par leur valeur,

$$\frac{\rho}{\rho'} = \sqrt{m^2 - 1 + m^2\frac{r^2}{r'^2}} = \frac{\sqrt{(m^2 - 1)\,r'^2 + m^2 r^2}}{r'}.$$

On a donc

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{r'}{\sqrt{(m^2 - 1)\,r'^2 + m^2 r^2}}\,,$$

et l'intégration de cette équation donne

$$(\gamma) \qquad \log\rho = \int\frac{dr}{\sqrt{(m^2 - 1)\,r'^2 + m^2 r^2}} + \log A\,,$$

$\log A$ représentant la constante d'intégration. Passant des logarithmes aux nombres, il vient

$$\text{I.} \qquad \rho = Ae^{\int\frac{dr}{\sqrt{(m^2 - 1)\,r'^2 + m^2 r^2}}}.$$

Telle est l'intégrale générale de (α); elle est ramenée à une quadrature, puisque r et r' sont des fonctions de φ.

Dans le cas particulier où $m = 1$, l'équation (γ) devient

$$\log\frac{\rho}{A} = \int\frac{dr}{r} = \log r\,,$$

d'où

$$\rho = Ar.$$

Pour $m = -1$, le radical doit être pris négativement comme nous le reconnaîtrons dans un instant. L'équation (γ) donne alors

$$\log\frac{\rho}{A} = -\int\frac{dr}{r} = -\log r\,,$$

d'où

$$\rho = \frac{A}{r}.$$

On retrouve donc bien les deux solutions particulières signalées plus haut, et ces solutions sont même plus importantes que la formule I, vu qu'elles s'étendent à toutes les courbes qu'elles soient données par une équation $r = f(\varphi)$ ou seulement graphiquement.

Il ne sera pas inutile de calculer pour les courbes I quelques-unes des quantités les plus importantes que l'on a l'habitude de considérer dans la théorie des courbes.

On trouve d'abord

$$\rho' = \rho\,\frac{r'}{\sqrt{(m^2 - 1)\,r'^2 + m^2 r^2}}\,,$$

$$\rho'' = \rho\left[\frac{r'^2}{(m^2 - 1)\,r'^2 + m^2 r^2} + m^2 r\,\frac{rr'' - r'^2}{\sqrt{(m^2 - 1)\,r'^2 + m^2 r^2}^{\,3}}\right]$$

Si l'on désigne par $d\sigma$ l'élément de la courbe $\rho = F(\varphi)$, il vient

$$\frac{d\sigma}{d\varphi} = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} = m\rho\,\frac{\sqrt{r^2 + r'^2}}{\sqrt{(m^2 - 1)\,r'^2 + m^2 r^2}}.$$

Dans cette formule $\sqrt{r^2 + r'^2}\,d\varphi = ds$ signifie l'élément de la courbe donnée $r = f(\varphi)$. Or, en géométrie, on considère les éléments de courbes comme des quantités essentiellement positives, surtout dans le calcul des rayons de courbure. Il s'en suit que

$$m \text{ et } \sqrt{(m^2 - 1)\,r'^2 + m^2 r^2}$$

doivent, en général, être affectés du même signe. (Il se peut d'ailleurs que les valeurs $+m$ et $-m$ amènent les mêmes courbes; dans ce cas le radical devra être muni du signe double).

Soient ϑ et τ les angles que font les tangentes aux points correspondants (r, φ), (ρ, φ) des courbes $r = f(\varphi)$, $\rho = F(\varphi)$ avec les rayons vecteurs respectifs.

Il vient

$$\text{II.} \qquad \operatorname{tg} \tau = \frac{\rho}{\rho'} = \frac{\sqrt{(m^2-1)\,r'^2 + m^2 r^2}}{r'}.$$

Pour $m = 1$ cette formule se spécialise en

$$\operatorname{tg} \tau = \frac{r}{r'} = \operatorname{tg} \vartheta,$$

et pour $m = -1$ en

$$\operatorname{tg} \tau = -\frac{r}{r'} = -\operatorname{tg} \vartheta,$$

deux formules bien connues, dont la première peut servir à définir les courbes semblables et semblablement placées.

Le rayon de courbure R' au point (ρ, φ) de la courbe $\rho = F(\varphi)$ a pour expression

$$\text{III.}\left\{\begin{aligned} R' &= \frac{\left(\dfrac{d\sigma}{d\varphi}\right)^3}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\,\rho''} = \\ &= m\rho \frac{\sqrt{r^2 + r'^2}^{\,3}}{r\,(r'^2 - r\,r'') + (r^2 + r'^2)\sqrt{(m^2-1)\,r'^2 + m^2 r^2}}. \end{aligned}\right.$$

Terminons cette note par l'application des formules trouvées à quelques courbes usuelles.

Exemple 1. La spirale d'Archimède.

Si

$$r = c\varphi, \quad (c = \text{const.})$$

est l'équation de la courbe donnée, on a

$$r = c\varphi, \quad r' = c,$$

$$\int \frac{dr}{\sqrt{(m^2-1)\,r'^2 + m^2 r^2}} = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{m^2 - 1 + m^2 \varphi^2}} =$$

$$= \frac{1}{m} \log\left(m\varphi + \sqrt{m^2 - 1 + m^2\varphi^2}\right).$$

L'équation du système de courbes cherché devient

$$\rho = A\left(m\varphi + \sqrt{m^2 - 1 + m^2 \varphi^2}\right)^{\frac{1}{m}}.$$

Cette formule fournit

pour $m = 1$, $\rho = 2A\varphi$; (Spirales d'Archimède)

pour $m = -1$, $\rho = -\dfrac{A}{2\varphi} = \dfrac{B}{\varphi}$. (Spirales hyperboliques.)

Exemple 2. La cardioïde.

Si

$$r = a(1 + \cos\varphi), \quad r' = -a \sin\varphi, \quad (a = \text{const.})$$

il vient

$$\int \frac{dr}{\sqrt{(m^2-1)r'^2 + m^2 r^2}} = \int \frac{d\cos\varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi + 2m^2\cos\varphi + 2m^2 - 1}}$$

$$= \int \frac{d\cos\varphi}{\sqrt{(\cos\varphi + m^2)^2 + 2m^2 - m^4 - 1}}$$

$$= \log\left(\cos\varphi + m^2 + \sqrt{\cos^2\varphi + 2m^2\cos\varphi + 2m^2 - 1}\right)$$

et, par conséquent,

$$\rho = A\left(\cos\varphi + m^2 + \sqrt{\cos^2\varphi + 2m^2\cos\varphi + 2m^2 - 1}\right).$$

Pour $m = 1$ cette équation se spécialise en

$$\rho = 2A(1 + \cos\varphi), \quad \text{(Cardioïdes)}$$

et pour $m = -1$ on trouve directement

$$\int \frac{dr}{\sqrt{(m^2-1)\,r'^2 + m^2 r^2}} =$$

$$= -\int \frac{d\cos\varphi}{1 + \cos\varphi} = -\log(1 + \cos\varphi),$$

d'où

$$\rho = \frac{A}{1 + \cos\varphi}. \quad \text{(Paraboles).}$$

Exemple 3. La circonférence.

L'équation de la circonférence étant donnée sous la forme

$$r = a \cos\varphi, \quad (a = \text{const.})$$

on obtient pour les courbes cherchées

$$\rho = A\left(\cos\varphi + \sqrt{m^2 - 1 + \cos^2\varphi}\right)$$

ou, en coordonnées cartésiennes,

$$(x - A)^2 + y^2 = A^2 m^2.$$

Comme il fallait s'y attendre, le système de courbes cherché est le même que le système de circonférences donné, en considérant dans l'équation de départ a comme un paramètre variable.

Pour $m = -1$ on calcule directement

$$\log \frac{\rho}{A} = -\log r = -\log(a\cos\varphi),$$

d'où

$$\rho = \frac{A}{a \cos\varphi}$$

ou bien

$$x = \frac{A}{a} \quad \text{(Droites.)}$$

Exemple 4. Soit

$$r = \sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi} \quad (a = \text{const.}, \; b = \text{const.})$$

l'équation de la courbe donnée. En la mettant sous la forme

$$r = \sqrt{p^2 + q^2 \cos 2\varphi},$$

où

$$p^2 = \frac{a^2 + b^2}{2}, \quad q^2 = \frac{a^2 - b^2}{2},$$

on trouve successivement

$$r' = -\frac{q^2 \sin 2\varphi}{\sqrt{p^2 + q^2 \cos 2\varphi}},$$

$$\int \frac{dr}{\sqrt{(m^2-1)\,r'^2 + m^2 r^2}} = \frac{1}{2}\,q^2 \int \frac{d\cos 2\varphi}{\sqrt{p^2+q^2\cos 2\varphi}\,\sqrt{(m^2-1)\dfrac{q^4 \sin^2 2\varphi}{p^2+q^2\cos 2\varphi} + m^2(p^2+q^2\cos 2\varphi)}}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d\cos 2\varphi}{\sqrt{\cos^2 2\varphi + 2m^2\dfrac{p^2}{q^2}\cos 2\varphi + \dfrac{m^2(p^4+q^4)-q^4}{q^4}}}$$

$$= \frac{1}{2}\log\left(\cos 2\varphi + m^2\frac{p^2}{q^2} + \sqrt{\cos^2 2\varphi + 2m^2\frac{p^2}{q^2}\cos 2\varphi + \frac{m^2(p^4+q^4)-q^4}{q^4}}\right),$$

et les courbes cherchées auront pour équation

$$\rho = A\sqrt{\cos 2\varphi + m^2\frac{p^2}{q^2} + \sqrt{\cos^2 2\varphi + 2m^2\frac{p^2}{q^2}\cos 2\varphi + \frac{m^2(p^4+q^4)-q^4}{q^4}}}.$$

Pour $m = -1$ il vient directement

$$\log\frac{\rho}{A} = -\log r$$

ou bien

$$\rho = \frac{A}{r} = \frac{A}{\sqrt{p^2+q^2\cos 2\varphi}} = \frac{A}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}}. \quad \text{(Ellipses)}$$

La courbe donnée est donc déduite de l'ellipse

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi}}$$

au moyen d'une inversion.

Exemple 5. La lemniscate. L'équation donnée étant

$$r = a\sqrt{\cos 2\varphi}, \qquad (a = \text{const.})$$

on obtient pour les courbes cherchées

$$(\delta) \qquad \rho = A\sqrt{\cos 2\varphi + \sqrt{\cos^2 2\varphi + m^2 - 1}}$$

et pour $m = -1$

$$\rho = \frac{A}{\sqrt{\cos 2\varphi}}. \qquad \text{(Hyperboles équilatères.)}$$

Afin d'examiner les courbes (δ) d'un peu plus près, on remarquera d'abord qu'elles sont symétriques par rapport à l'axe des x et à l'axe des y. Lorsque $m^2 < 1$ elles se composent de deux ovales placés symétriquement par rapport à l'axe des y; pour $m^2 = 1$ elles deviennent des lemniscates et lorsque $m^2 > 1$ elles sont formées d'un seul trait entourant l'origine. Pour ces courbes on a

$$\operatorname{tg}\tau = -\frac{\sqrt{m^2 - 1 + \cos^2 2\varphi}}{\sin 2\varphi},$$

$$R' = \frac{m\rho}{2\cos 2\varphi + \sqrt{m^2 - 1 + \cos^2 2\varphi}}$$

et la droite sur laquelle sont situés les centres de courbure correspondants, a pour équation

$$\frac{y}{x} = -tg^3\varphi.$$

Observation 1. Quand $m^2 > 1$ l'angle φ parcourt toutes les valeurs réelles de 0 à 2π, tandis que, pour la lemniscate ($m^2 = 1$), φ est réduit aux valeurs renfermées dans l'intervalle de $-\frac{\pi}{4}$ à $+\frac{\pi}{4}$. Il paraît s'ensuivre que la connaissance des centres de courbure de la lemniscate n'est plus d'aucune utilité pour la construction des rayons de courbure des autres courbes (δ), dès que φ sort de l'intervalle de $-\frac{\pi}{4}$ à $+\frac{\pi}{4}$, car pour de telles valeurs $r = \sqrt{\cos 2\varphi}$ devient imaginaire. Il n'en est cependant pas tout à fait ainsi. En effet, on remarque aisément que les formules générales I, II et III, pour ρ, $\operatorname{tg}\tau$, R' et l'équation des droites contenant les centres de courbure correspondants, ne sont pas modifiées si l'on y remplace r par ir ($i = \sqrt{-1}$), c'est-à-dire si l'on tourne la lemniscate d'un angle droit autour de l'origine. (Il est clair que cette observation importante ne se borne ni à la lemniscate, ni au seul facteur i. On voit immédiatement comment il faudrait la modifier, si pour certaines valeurs de φ le rayon vecteur r prenait un facteur imaginaire constant $\alpha + i\,\beta$). Dans l'exemple actuel, lorsque φ n'est pas compris dans l'intervalle de $-\frac{\pi}{4}$ à $+\frac{\pi}{4}$, la lemniscate $r = i\sqrt{\cos 2\varphi} = \sqrt{-\cos 2\varphi}$ rend donc le même service que la lemniscate proposée à l'intérieur de cet intervalle.

Observation 2. Cette méthode de construire les rayons de courbure de certaines courbes à l'aide des centres de courbure connus d'autres courbes, est en défaut aux seuls points où la normale se confond avec la droite des centres de courbure correspondants. Malheureusement ces points exceptionnels seront presque toujours les sommets de la courbe, où le rayon de courbure atteint son maximum ou son minimum. En de tels points le cercle osculateur a quatre points infiniment voisins communs avec la courbe, et sa connaissance serait précisément le plus utile.

La figure 4 contient quatre représentants des courbes (δ), répondant aux valeurs particulières :

$$m = \sqrt{2}\,;\; m = 1\,;$$

$$m = \sqrt{\tfrac{3}{4}}\,;\; m = 1.$$

Les centres de courbure en ligne droite y sont entourés de petits ronds.

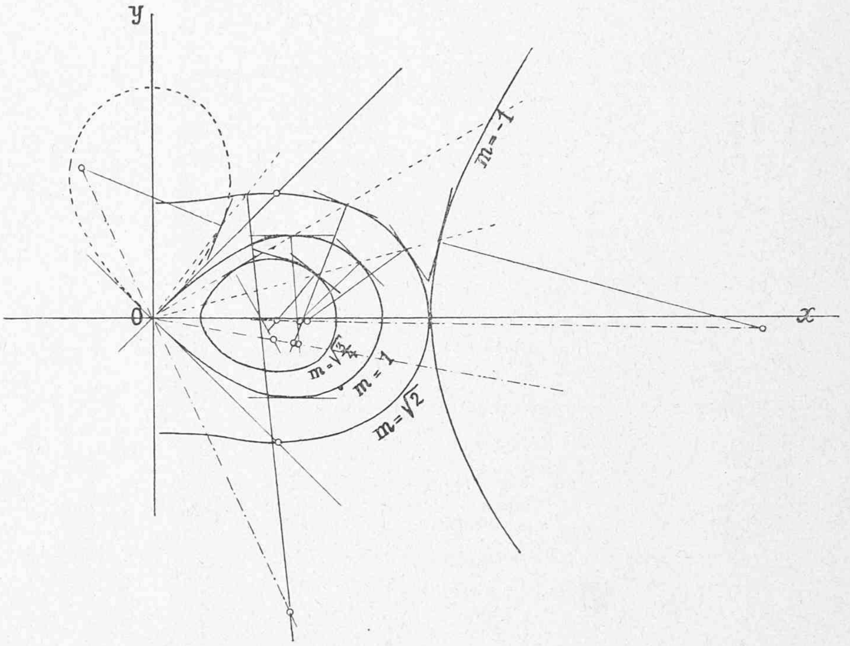

Fig. 4.

La fabrique d'explosifs de Gamsen (Valais).

Société suisse des explosifs, à Brigue.

Par M. G. Brélaz,

Professeur extraordinaire à l'Ecole d'Ingénieurs.

Grâce à la bienveillance de M. l'ingénieur P. Ronchetti, président du Conseil d'administration de la Société et directeur de la fabrique, j'ai obtenu, non seulement l'autorisation de visiter celle-ci et d'étudier la fabrication dans tous ses détails, mais aussi d'en publier une description.

Malgré les visites que j'ai faites à plusieurs reprises à l'usine, je ne serais pas parvenu au résultat désiré avec suffisamment de détails et d'exactitude, sans l'obligeance avec laquelle la Direction a bien voulu compléter mes renseignements.

Ce n'est pas une étude approfondie des questions de chimie qui se rattachent aux explosifs, que je veux présenter ici, mais la description d'une usine, à tous égards remarquablement installée.

A quatre kilomètres de Brigue, sur la route de Brigue à Viège, on trouve à gauche un petit vallon, profondément encaissé, où coule le torrent la Gamsa. Les sables et les graviers charriés par elle ont formé, à son débouché dans la plaine, un cône de déjection qui termine le vallon par une pente régulière et fortement inclinée.

C'est sur ce cône de déjection qu'est placée la fabrique de la *Société suisse des explosifs* (siège social et bureaux commerciaux à Brigue).

Le choix de cet emplacement, excellent au point de vue de la fabrication d'un produit dangereux, a été certainement déterminé par la prévision du percement du tunnel du Simplon, et, en effet, la fabrique fournit les explosifs nécessaires à ce travail.

La Société suisse a été constituée le 9 avril 1894. Elle a pour objet la fabrication et la vente des produits explosifs de toute nature, soit pour l'industrie privée, soit pour les usages de la guerre.

Sa fabrication actuelle comporte tous les genres de dynamites.

L'usine a une surface de 260 000 m²; elle a coûté 450 000 fr. La fabrique n'est pas constituée par un seul bâtiment, mais par une série de constructions ou de baraques étagées en terrasses. Toutes ces constructions sont reliées entre elles par des allées, la plupart souterraines et très bien entretenues, comme toute l'usine du reste.

Des travaux de protection, tels que talus et cavaliers, tous en matériaux sablonneux passés au crible, séparent les uns des autres les ateliers de la dynamiterie, ainsi que les dépôts, et les garantissent complètement de tout danger de destruction générale, comme l'a démontré l'expérience, à Gamsen, lors de l'explosion d'un appareil à nitroglycérine en 1900.

Les constructions ne faisant pas partie de la dynamiterie, telles que fabrique d'acide nitrique, atelier de regagnage et de concentration, magasins généraux, locaux des chaudières et des machines, bureaux, laboratoire, conciergerie, écuries, etc., sont construits en solide maçonnerie, au moyen des matériaux trouvés à profusion dans le lit de la Gamsa. Celle-ci, qui coule immédiatement à côté de l'usine, fournit en outre une force motrice plus que suffisante