Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande

Band: 30 (1904)

Heft: 1

Artikel: Application de la statique graphique aux systèmes de l'espace

Autor: Mayor, B.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-24099

pour le ramener à une densité uniforme et pour en chasser les vapeurs hypoazotiques qu'il pourrait contenir, puis mis en touries de grès, renfermées dans des paniers de fer, et conduit sur le parc, où les ouvriers le prendront pour constituer le mélange sulfonitrique. La charge d'une cornue comporte 700 kg. de nitrate de soude sec et 800 kg. d'acide sulfurique, et produit en moyenne 450 kg. d'acide nitrique de 49-49,2° $B^{é}$; durée de l'opération 22-24 heures.

L'acide sulfurique concentré, provenant actuellement des Usines de St-Gobain, arrive en gare de Brigue dans des wagons citernes de 10-12 000 kg., il est ensuite transvasé dans des fûts en fer, conduit à l'Usine, puis vidé dans quatre réservoirs de plomb de 12 000 kg. chacun. Ces réservoirs se trouvent à proximité du parc d'acide nitrique.

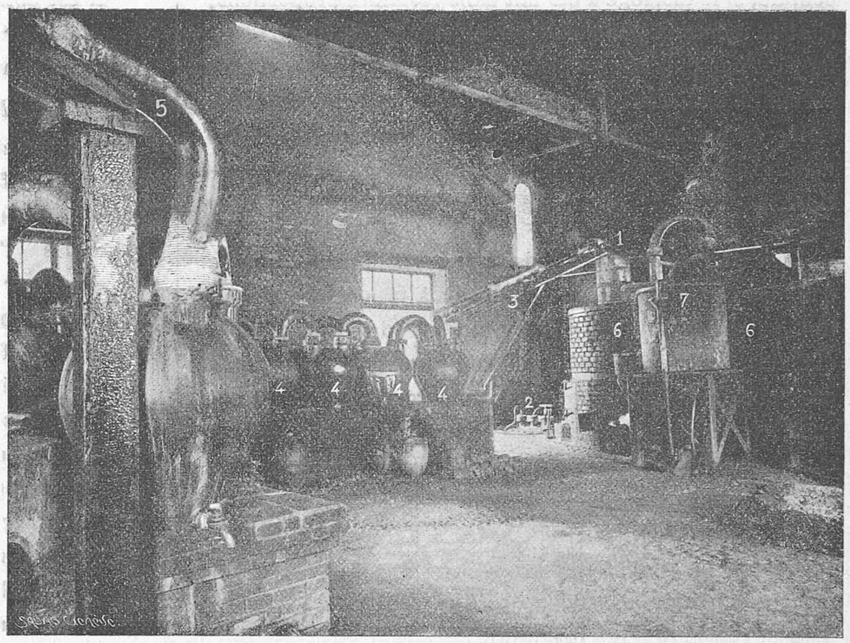

Fig. 10. — Intérieur de l'atelier de regagnage et de concentration des acides résiduels.

LÉGEODE :

1. Tour dénitrante. — 2. Monte-jus pour acide sulfurique à concentrer. — 3. Sortie des vapeurs nitreuses de la tour. — 4. Batterie pour absorption et oxydation de l'acide nitreux et pour sa transformation en acide nitrique. — 5. Sortie de l'acide nitreux non absorbé. — 6. Cornue de concentration de l'acide sulfurique. — 7. Boule réfrigérante pour petites eaux sulfuriques.

Regagnage.

Les acides résiduels sont travaillés à l'atelier de *regagnage,* au moyen de la tour dénitrante. Celle-ci est en lave de Volvic; elle a 3m,50 de hauteur, 80 cm. de diamètre et est évidée à l'intérieur. Elle sert à la décomposition de ces acides au *moyen de vapeur d'eau injectée par le bas.*

Les acides y sont introduits par la partie supérieure et ruissellent de haut en bas sur des fragments de pierre de Volvic. L'acide nitrique volatilisé s'échappe par une ouverture pratiquée au sommet de la tour et est recueilli dans une batterie en grès. On obtient ainsi un acide de 40-42° $B^{é}$, qui est livré au commerce. L'acide sulfurique sort par le bas de la tour, passe dans un réfrigérant, puis dans un monte-jus qui l'envoie dans les cornues de concentration. Il est concentré dans celles-ci jusqu'à 66° $B^{é}$, soit à 96-97 % de monohydrate, puis employé à la fabrication de l'acide nitrique fort.

Comme nous l'avons vu, l'acide nitrique fort est fabriqué à Gamsen, l'acide sulfurique provient de l'étranger, ainsi que la glycérine et le coton-poudre. Il est probable que, dans la suite, quelques-unes de ces matières seront fabriquées à Gamsen.

L'usine est construite de façon à fournir journellement 2400 kg. d'acide nitrique.

A l'heure actuelle, où les explosifs dits de sûreté sont seulement dans une période d'essais et ne peuvent encore lutter avec la dynamite pour le travail en galerie, l'usine de Gamsen est capable de fournir en explosifs une grande partie des entrepreneurs travaillant en Suisse, en attendant le moment où, lorsque le tunnel du Simplon sera achevé, elle pourra exporter au loin ses produits.

Novembre 1903.

Application de la statique graphique aux systèmes de l'espace.

Par M. B. MAYOR, ingénieur,

Professeur ordinaire.
Ancien élève de l'Ecole d'Ingénieurs (1884-1887).

(Suite)[1].

CHAPITRE III

Mode de représentation spécial.

35. Il résulte des applications qui terminent le chapitre précédent, que le mode de représentation adopté jusqu'ici se prête sans difficulté à la solution des problèmes dans lesquels n'interviennent que les propriétés projectives des figures de l'espace. Mais, si les relations métriques entrent en jeu, et c'est précisément le cas lorsqu'on envisage les problèmes les plus élémentaires de la statique graphique, les solutions ne peuvent être obtenues qu'au prix de constructions souvent fort compliquées. Il est donc essentiel de particulariser ce mode de représentation, de manière que les propriétés métriques qui peuvent exister dans les figures de l'espace se retrouvent sous des formes simples dans leurs éléments représentatifs. Ainsi que nous allons le voir, il suffit, pour atteindre ce but, de choisir le système directeur (F_o) de manière que la droite désignée jusqu'ici par E, c'est-à-

[1] Voir No du 25 décembre 1903, page 355.

dire la caractéristique du plan Π par rapport au complexe directeur, s'éloigne à l'infini.

36. Formules fondamentales. Cherchons en premier lieu les valeurs que l'on doit attribuer aux coordonnées du système (F_0) pour que la condition qui vient d'être indiquée soit satisfaite.

A cet effet, supposons qu'on conserve les notations et les axes coordonnés précédemment choisis de manière que les formules

$$X_0 = o\,, \qquad L_0 = o$$
$$Y_0 = e\,, \qquad M_0 = o$$
$$Z_0 = \omega, \qquad N_0 = ed$$

qui donnent, dans le cas général, les valeurs de ces coordonnées soient encore applicables.

Remarquons ensuite que la force désignée par e doit tendre vers zéro lorsque sa ligne d'action E s'éloigne indéfiniment, car autrement la coordonnée

$$N_0 = ed$$

augmenterait au-delà de toute limite. On aura donc nécessairement

$$Y_0 = o.$$

D'autre part, le moment N_0 de e par rapport à l'axe Oz doit tendre vers une limite finie différente de zéro de manière que la force e devienne, à la limite, assimilable à un couple de moment non nul. Car autrement, le système directeur deviendrait réductible à la seule résultante ω, ce qui serait contraire à une hypothèse essentielle faite au début. On pourra donc poser, en désignant par a une certaine longueur qu'on peut choisir arbitrairement et qui jouera un rôle essentiel dans la suite,

$$N_0 = \omega a.$$

Dans ces conditions, les coordonnées du système directeur prennent les valeurs suivantes :

$$\text{1)} \qquad \begin{aligned} X_0 &= o\,, & L_0 &= o \\ Y_0 &= o\,, & M_0 &= o \\ Z_0 &= \omega\,, & N_0 &= \omega a. \end{aligned}$$

Ce système est donc réductible à une résultante générale ω, ayant l'axe des z pour ligne d'action, et à un couple dont le moment

$$N_0 = \omega a$$

coïncide en direction avec ce même axe. En d'autres termes, l'axe central du système directeur ou, ce qui revient au même, l'axe du complexe directeur coïncide avec Oz. Dès lors, il est évident que si l'on donne, ce que nous ferons dans toute la suite, aux coordonnées de (F_0) les valeurs qui résultent des formules précédentes, la droite E coïncide avec la droite à l'infini du plan Π.

On peut remarquer, avant de poursuivre, que la longueur désignée par a est égale à ce que l'on appelle fréquemment la *flèche* du système directeur, c'est-à-dire au rapport entre le moment de ce système, calculé par rapport à l'axe central, et la résultante générale. Ajoutons encore que a est une quantité essentiellement positive en vertu des hypothèses faites sur les sens des deux forces ω et e.

On voit ensuite immédiatement que le moment (F, F_0) d'une force quelconque (F) par rapport au système directeur a pour expression

$$(F, F_0) = \omega\,(N + aZ),$$

tandis que l'automoment de (F_0) a pour valeur

$$2\,H_0 = 2\,\omega^2\,a.$$

Par suite, le complexe directeur est caractérisé par l'équation

$$N + aZ = o,$$

et les formules qui permettent de calculer les coordonnées de la conjuguée (F') d'une force quelconque (F) prennent les formes suivantes :

$$\text{2)} \qquad \begin{aligned} X' &= -X\,, & L' &= -L\,, \\ Y' &= -Y\,, & M' &= -M\,, \\ Z' &= \frac{1}{a}N\,, & N' &= aZ\,. \end{aligned}$$

Comme ces relations peuvent être immédiatement résolues par rapport aux coordonnées de la force donnée (F), il devient inutile d'indiquer les formules inverses qui permettraient de calculer ces coordonnées en fonction de celles de la conjuguée (F').

Ces résultats obtenus, on voit facilement que les équations des lignes d'action f et f' des forces représentatives F et F' d'une force quelconque (F) prennent respectivement les formes suivantes

$$f) \qquad x\,Y - y\,X = N\,,$$
$$f') \qquad x\,Y - y\,X = -aZ\,,$$

tandis que les coordonnées des points représentatifs Φ' et Φ deviennent

$$\Phi') \qquad x' = a\,\frac{M}{N}\,, \qquad y' = -a\,\frac{L}{N}\,,$$

$$\Phi) \qquad x = -\frac{M}{Z}\,, \qquad y = \frac{L}{N}\,.$$

Propriétés des éléments représentatifs d'une force et d'une droite.

37. La droite E étant à l'infini, les lignes d'action des forces représentatives F et F' d'une force (F) et de sa conjuguée (F') sont maintenant parallèles, et il est évident qu'il en est de même pour les lignes représentatives f et f' qui correspondent à une droite quelconque (f) de l'espace. De plus, comme les composantes de F suivant les axes Ox et Oy ont respectivement pour valeurs X et Y, tandis que celles de F' sont égales à X' et Y', il résulte des deux premières formules du groupe 2 que les deux forces F et F' sont égales, parallèles et de sens opposés.

D'autre part, les moments de F et de F' par rapport à l'axe des z ou, ce qui revient au même, par rapport au point O, sont respectivement égaux à ceux de (F) et de (F') par rapport au même axe. Comme, en outre, la composante (Φ) de (F) suivant la normale au plan Π est précisément égale à Z, et que la dernière des formules du groupe 2 peut se mettre sous la forme

$$Z = (\Phi) = \frac{1}{a}\,N'\,,$$

on peut énoncer le théorème suivant :

La composante, suivant la normale au plan Π, d'une force quelconque est égale au produit du moment, par rapport à O, de la force représentative de sa conjuguée par le facteur constant $\frac{1}{a}$.

Ce théorème, qui d'ailleurs s'applique sans modifications à la conjuguée de la force donnée, doit être considéré comme fondamental. Au reste, nous allons en déduire immédiatement quelques conséquences importantes.

38. Remarquons, en premier lieu, que si l'on connaît uniquement la force représentative F' de la conjuguée d'une force (F) de l'espace, cette dernière force se trouve déterminée en grandeur, direction et sens. Sa composante suivant le plan Π est, en effet, connue puisqu'elle est égale et parallèle à F', mais de sens opposé ; d'autre part, le théorème qu'on vient d'énoncer permet de déterminer la composante (Φ) de cette même force suivant la normale au plan Π. D'ailleurs, il est évident que ces deux composantes suffisent pour définir l'intensité, la direction et le sens de (F).

Nous verrons, plus tard, que ce seul fait conduit à des conséquences d'une importance exceptionnelle dans la théorie et le calcul des systèmes articulés gauches.

39. Ce même théorème conduit à un procédé simple qui permet de retrouver une force, ou une droite de l'espace, définie à l'aide de ses éléments représentatifs.

Soient en effet, F et Φ' (fig. 8) les éléments représentatifs donnés d'une force (F) ayant une ligne d'action que

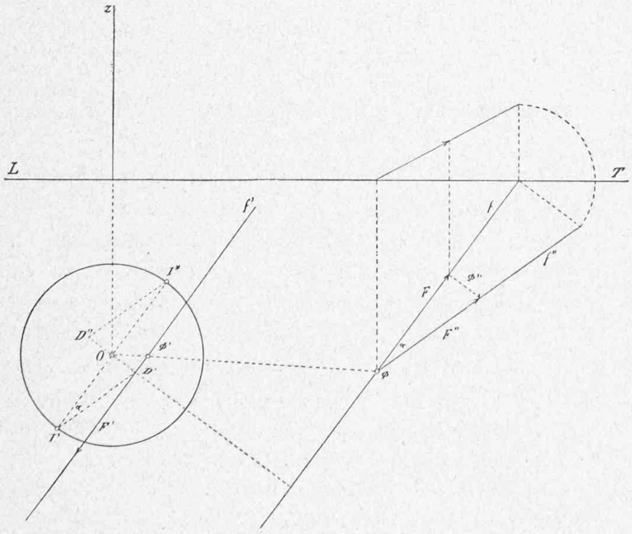

Fig. 8.

nous désignerons par (f). Si cette ligne d'action n'est pas spéciale, on peut déterminer immédiatement les éléments représentatifs F' et Φ de la conjuguée (F'). Si (f), au contraire, est une droite spéciale, f passe par O, Φ' est à l'infini sur cette droite et il devient nécessaire, comme nous l'avons déjà vu, de donner F' et Φ si l'on veut que la force de l'espace soit bien représentée. Si, enfin, la droite (f) est à la fois singulière et spéciale, le procédé que nous allons décrire n'est plus applicable et il est nécessaire de recourir à d'autres considérations.

Ces préliminaires posés, décrivons une circonférence ayant O pour centre et a pour rayon. Cette circonférence, qu'il convient de tracer une fois pour toutes dans chaque épure, joue un rôle prépondérant dans l'étude des propriétés métriques. Comme elle dépend uniquement du choix du complexe directeur, nous la désignerons sous le nom de circonférence directrice.

Abaissons ensuite du point O une perpendiculaire sur la ligne d'action f' de la force F', puis joignons le pied D'' de cette perpendiculaire à l'un des points d'intersection, I' par exemple, de la circonférence directrice et de la parallèle à f ou f' menée par O. Si l'on mène enfin par Φ une parallèle à $I'D'$, on obtient une droite désignée par f'' sur la figure et qui coïncide avec la position que prend la ligne d'action de la force de l'espace lorsqu'en prenant f comme charnière, on rabat son plan projetant sur le plan Π.

Puisqu'en effet le point Φ est la trace de la ligne d'action (f), il suffit, pour vérifier l'exactitude de cette construction, de montrer que l'angle I' du triangle rectangle $OI'D'$ est égal à l'angle α formé par (f) et par sa projection f.

Or on a évidemment

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Phi}{F}$$

et comme en vertu du théorème énoncé

$$(\Phi) = \frac{1}{a} F'. \overline{OD'}$$

ou, en ne tenant compte que des valeurs absolues,

$$(\Phi) = \frac{1}{a} F. \overline{OD'},$$

la relation précédente donne, lorsqu'on y remplace (Φ) par cette valeur,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{OD'}}{a},$$

ou encore

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{OD'}}{\overline{OI'}} = \operatorname{tg}(OI'D').$$

La droite f'' est donc bien le rabattement de (f) sur le plan Π.

Ce rabattement connu, on peut immédiatement déterminer l'intensité et le sens de la composante normale (Φ). Il suffit, si l'on admet par exemple que l'origine de la force F coïncide avec Φ, de construire le triangle rectangle représenté sur la figure et dont un des côtés de l'angle droit coïncide précisément avec cette composante F. L'intensité de la composante normale est alors égale à l'autre côté de l'angle droit, côté désigné par Φ'' sur la figure, tandis que l'intensité de la force (F) est égale à l'hypothénuse F''. Quant au sens de la composante normale, il résulte immédiatement du signe du moment de la force

F' par rapport à O. Par exemple, dans le cas de la figure, ce moment est positif et le sens de la composante normale coïncide avec le sens positif de l'axe Oz. Si donc on suppose, ainsi que nous le ferons dans la suite, que le plan Π soit horizontal, la partie positive de l'axe des z doit être dirigée vers le haut pour que les moments positifs aient le sens de rotation habituel, et la composante (Φ), que nous pouvons appeler la composante verticale, sera elle-même dirigée vers le haut.

Ayant ainsi déterminé le sens de cette composante verticale, on en peut déduire le sens dans lequel le rabattement du plan projetant de (f) a dû être opéré pour que cette droite vienne s'appliquer sur f''. On voit, par exemple, que, dans le cas considéré, ce sens a dû être tel que le point du plan projetant qui est venu en coïncidence avec O était primitivement situé au-dessous du plan Π.

Il est encore utile de remarquer que la détermination de la composante verticale (Φ) se simplifie lorsqu'on suppose a égal à l'unité de longueur. Dans ce cas, en effet, l'intensité de cette force devient numériquement égale au moment de F' par rapport à O.

40. Le problème inverse du précédent et ayant pour objet la recherche des éléments représentatifs d'une force (F) définie dans l'espace, peut être résolu avec autant de facilité.

Cette force étant, par hypothèse, bien définie on pourra toujours, en effet, déterminer préalablement les éléments désignés sur la figure 8 par les notations F, F'', Φ et Φ'', et l'on connaîtra, de plus, le signe de la composante (Φ). C'est ainsi qu'à l'aide des constructions indiquées dans la partie supérieure de la figure et qui s'expliquent d'elles-mêmes, on peut déterminer ces éléments lorsque la force (F) est représentée par les procédés ordinaires de la géométrie descriptive, le plan horizontal de projection étant supposé confondu avec Π et la ligne de terre coïncidant avec LT.

Ces opérations préliminaires étant terminées, abaissons du point O une perpendiculaire OD' sur la ligne d'action f de la composante horizontale F, puis déterminons les points d'intersection I' et I'' de la circonférence directrice et de la parallèle à f qui passe par ce même point O. Enfin déterminons les points d'intersection D' et D'' de la perpendiculaire OD' avec les parallèles à la ligne d'action de F'' issues respectivement des points I' et I''. Il résulte alors de tout ce qui précède que c'est par l'un ou l'autre de ces points que doit passer la ligne d'action f' de la force F'. Comme, d'autre part, le moment de F' par rapport à O doit avoir le signe, connu à l'avance et positif dans le cas de la figure, de la composante verticale (Φ), on voit immédiatement que c'est par D', et non par D'', que doit passer f'. Ayant ainsi déterminé f' on obtient enfin le point représentatif Φ' puisqu'il se trouve à la fois sur f' et sur $O\Phi$.

41. Si l'on réserve toujours le cas où la ligne d'action de la force considérée est spéciale et singulière, en d'autres termes, si l'on suppose que cette droite n'est pas, simultanément, dans un plan passant par l'axe Oz et perpendiculaire à cet axe, on reconnaît sans peine que les solutions qui précèdent sont générales et ne conduisent à aucune indétermination. C'est ainsi qu'on voit immédiatement que la ligne représentative de la conjuguée d'une droite parallèle à Π passe par le point O et que le point représentatif d'une droite du plan Π coïncide avec O.

Cependant, le cas d'une force normale à Π présente encore une exception d'une nature spéciale. Il résulte, en effet, des formules (2) que la conjuguée d'une telle force est assimilable à un couple. Dans ces conditions, il devient naturel de renvoyer l'examen de ce cas après l'étude de la représentation des systèmes de forces.

42. Les considérations qui précèdent conduisent immédiatement à quelques propriétés qu'il est nécessaire de signaler maintenant.

La formule

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{OD'}}{a},$$

obtenue au paragraphe 39, montre que l'angle formé avec le plan Π par la ligne d'action d'une force quelconque dépend uniquement de la distance du point O à la ligne représentative de la conjuguée de cette droite. Si donc cet angle demeure constant, cette distance demeure elle-même constante et nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Les lignes représentatives des conjuguées des droites de l'espace qui forment un angle donné avec le plan Π sont toutes tangentes à une même circonférence concentrique à la circonférence directrice.

En particulier, si l'on suppose $\operatorname{tg} \alpha = 1$, on aura $OD' = a$ et l'on peut donner la définition suivante de la circonférence directrice :

La circonférence directrice est l'enveloppe des lignes représentatives des conjuguées des droites de l'espace qui font un angle de 45° avec le plan Π.

43. Condition de parallélisme de deux droites. Les lignes représentatives de deux droites parallèles sont évidemment parallèles. Comme, d'autre part, ces droites forment un même angle avec Π et qu'il est possible d'appliquer, sur chacune d'entre elles, des forces telles que leurs composantes verticales et horizontales aient respectivement les mêmes sens, on voit immédiatement que les lignes représentatives de leurs conjuguées coïncident.

Réciproquement, si les lignes représentatives des conjuguées de deux droites coïncident, ce qui exige que les lignes représentatives de ces droites soient parallèles, on voit immédiatement que ces droites sont elles-mêmes parallèles. Donc :

Pour que deux droites de l'espace soient parallèles, il faut et il suffit que leurs lignes représentatives soient parallèles entre elles et à la ligne qui joint leurs points représentatifs.

44. Condition de perpendicularité de deux droites. On sait que pour que deux droites (f_1) et (f_2), définies chacune par leurs coordonnées homogènes

$$X_1,\ Y_1,\ Z_1,\ L_1,\ M_1,\ N_1,$$

et

$$X_2,\ Y_2,\ Z_2,\ L_2,\ M_2,\ N_2,$$

soient perpendiculaires, il faut et il suffit que l'on ait

$$3)\quad X_1\,X_2 + Y_1\,Y_2 + Z_1\,Z_2 = O.$$

Soient alors, respectivement, $u'_1\ v'_1$ et $u'_2\ v'_2$ les coordonnées tangentielles des lignes représentatives f'_1 et f'_1 des conjuguées des droites considérées (f_1) et (f_2). A l'aide des équations de ces lignes données au paragraphe 36, on trouve immédiatement, pour ces coordonnées, les valeurs suivantes :

$$u'_1 = \frac{1}{a}\frac{Y_1}{Z_1}, \qquad v'_1 = -\frac{1}{a}\frac{X_1}{Z_1}$$

$$u'_2 = \frac{1}{a}\frac{Y_2}{Z_2}, \qquad v'_2 = -\frac{1}{a}\frac{X_2}{Z_2}.$$

Si l'on résoud ces équations par rapport à X_1, Y_1, X_2, Y_2, puis qu'on remplace ces quantités par leurs valeurs dans la relation 3, on obtient, après des simplifications évidentes,

$$4)\quad a^2\,(u'_1\,u'_2 + v'_1\,v'_9) + 1 = O.$$

Il résulte immédiatement de là que lorsque deux droites sont rectangulaires, l'une quelconque des lignes représentatives f'_1 ou f'_2 de leurs conjuguées doit passer par le pôle de l'autre relativement à une circonférence décrite de O comme centre, avec un rayon imaginaire égal à $a\sqrt{-1}$. En d'autres termes, les lignes représentatives f'_1 et f'_2 sont conjuguées par rapport à la circonférence qu'on vient de définir.

Un calcul inverse du précédent montrerait immédiatement que cette condition de perpendicularité, qui est nécessaire, est aussi suffisante.

D'autre part, il résulte de la théorie des pôles et polaires par rapport à une conique qu'on peut remplacer la circonférence imaginaire introduite ainsi par la circonférence directrice, à condition de substituer en même temps à la notion de pôle celle d'antipôle. Dans ces conditions nous pouvons énoncer le théorème fondamental qui suit :

Pour que deux droites de l'espace soient rectangulaires, il faut et il suffit que la ligne représentative de la conjuguée de l'une quelconque d'entre elles passe par l'antipôle de l'autre relativement à la circonférence directrice.

Au sujet de la circonférence imaginaire de rayon $a\sqrt{-1}$ on peut remarquer qu'elle est l'enveloppe des lignes représentatives des conjuguées des droites isotropes. Dans une certaine mesure, elle est donc l'image, sur le plan Π, du cercle imaginaire de l'infini.

Propriétés des éléments représentatifs d'un point.

45. Soient P et P' (fig. 9) les éléments représentatifs d'un point (P) quelconque dans l'espace. Ainsi que nous l'avons vu, ces éléments sont toujours associés ; et, puisque la droite E est à l'infini, la ligne représentative P' est toujours parallèle à OP.

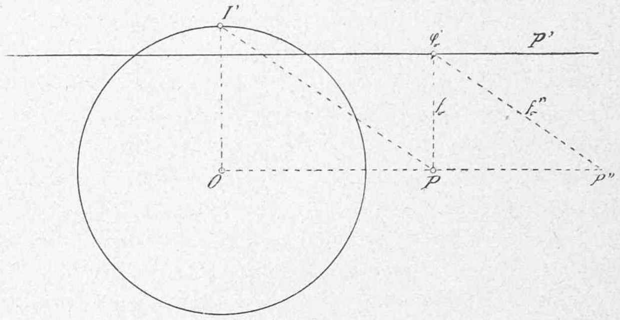

Fig. 9.

Cette remarque faite, proposons-nous de retrouver la position occupée par le point (P) dans l'espace lorsqu'on suppose que P et P' sont donnés.

Il suffit évidemment, dans ce but, de faire passer par (P) une droite quelconque, puis de déterminer, à l'aide de la solution donnée plus haut, la position occupée par cette droite. Mais, comme nous allons le voir, on simplifie notablement les constructions en choisissant cette droite, ce qui est en général possible d'une manière et d'une seule, de façon qu'elle soit singulière et que, de plus, sa ligne représentative $f\sigma$ soit perpendiculaire à P'.

Désignons, en effet, par $(f\sigma)$ cette droite singulière dont on peut immédiatement déterminer la ligne représentative $f\sigma$ puisqu'elle passe par P et qu'elle est perpendiculaire à P'. Son point représentatif $\varphi'\sigma$ est d'autre part déterminé puisqu'il est sur P' et sur $f\sigma$. Si donc on désigne par I' l'un des points d'intersection de la circonférence directrice avec une parallèle à $f\sigma$ menée par O, puis qu'on mène par $\varphi'\sigma$ une parallèle à $I'P$, on obtient une droite $\varphi'\sigma\ P''$ qui, d'après la construction indiquée au paragraphe 39, coïncide avec la position prise par $(f\sigma)$ lorsqu'on rabat, autour de $f\sigma$ comme charnière, son plan projetant sur le plan Π. Dès lors, le point d'intersection P'' de cette dernière droite avec OP est tel que la longueur PP'' est égale à la cote du point (P) par rapport au plan Π.

On peut, d'autre part, à l'aide d'une règle très simple, déterminer le signe de cette cote, ce qui achèvera de résoudre le problème proposé.

Appliquons, en effet, sur $(f\sigma)$ une force $(F\sigma)$ telle que sa composante horizontale $F\sigma$ soit représentée par un vecteur ayant $\varphi'\sigma$ pour origine et P pour extrémité. La composante verticale de cette force, manifestement égale, en grandeur et signe, à la cote considérée, a d'ailleurs le même signe que le moment par rapport à O de la composante horizontale de la conjuguée $F'\sigma$. Comme, enfin, cette dernière composante est égale et directement opposée à $F\sigma$ et qu'on vérifie immédiatement que son moment par rapport à O est égal, en grandeur et signe, à celui d'un vecteur ayant O pour origine et P pour extrémité, ce dernier moment étant calculé par rapport à un point quelconque de P', on peut énoncer la règle suivante :

Le point (P) est situé au-dessus du plan Π lorsqu'un mobile qui décrit le segment OP, en partant de O pour *aboutir en P, a, par rapport à un point quelconque de P', un sens de rotation positif. Dans le cas contraire, le point (P) est situé au-dessous du plan Π.*

En particulier, les éléments représentatifs donnés dans la figure 9 correspondent à un point situé au-dessus du plan Π.

Il n'est presque pas nécessaire d'ajouter qu'à l'aide d'une série d'opérations inverses de celles qui précèdent, on trouverait sans peine les éléments représentatifs d'un point de l'espace dont on connaîtrait la projection sur le plan Π et la cote par rapport au même plan.

46. Les constructions qu'on vient d'indiquer ne tombent en défaut que pour les points de l'espace situés sur la verticale du point O. Si l'on fait abstraction, en effet, du point O lui-même, les éléments représentatifs de tous ces points sont identiques puisque leurs lignes représentatives sont toutes à l'infini et que leurs projections sont confondues. Pour définir un tel point, il est nécessaire de procéder autrement que nous l'avons fait jusqu'ici. D'ailleurs, il suffira de donner, par exemple, les éléments représentatifs d'une droite, nécessairement spéciale, sur laquelle il soit situé.

Ajoutons encore que, lorsque le point (P) est dans le plan Π, sa ligne représentative et son point représentatif sont unis. Réciproquement, lorsque les éléments représentatifs d'un point sont unis, ce point est situé dans le plan Π. On vérifie immédiatement cette propriété en remarquant que la droite qui joint ce point à O est une droite singulière.

Propriétés des éléments représentatifs d'un plan.

47. Soient π et π' les éléments représentatifs d'un plan (π), éléments qui doivent être tels, comme on sait, que la droite π soit parallèle à $O\pi'$. Pour déterminer la position de (π) dans l'espace, il suffit de remarquer que, d'une part, π est sa trace sur Π, et d'autre part, π' le point représentatif du foyer de ce plan et π la droite représentative de ce même foyer. Si donc on applique la construction indiquée au paragraphe 45, on pourra retrouver la position de ce foyer et par suite celle du plan, puisqu'il passe par ce foyer et par sa trace.

Ce procédé tombe en défaut lorsque π' et π sont unis, c'est-à-dire quand le foyer du plan (π) est situé dans Π. Mais on peut, dans ce cas, considérer une droite quelconque de ce plan, puis déterminer la position qu'elle occupe dans l'espace.

Une indétermination analogue se présente lorsque le plan (π) est parallèle à Π. On la lève d'ailleurs immédiatement en définissant un pareil plan à l'aide des éléments représentatifs de l'un de ses points.

48. Conditions de parallélisme de deux plans. Lorsque deux plans sont parallèles, leurs lignes représentatives, c'est-à-dire leurs traces, sont évidemment parallèles. Comme, de plus, leurs foyers sont situés sur la conjuguée d'une droite de l'infini, c'est-à-dire sur une verticale, leurs points représentatifs sont confondus.

Réciproquement, lorsque les points représentatifs de deux plans sont confondus, ces plans sont parallèles. Ces plans sont nécessairement, en effet, les plans focaux de deux points situés sur une même verticale; par suite, leur droite d'intersection est tout entière à l'infini. Donc:

Pour que deux plans soient parallèles, il faut et il suffit que leurs points représentatifs soient confondus.

49. Condition de perpendicularité d'une droite et d'un plan. Lorsqu'une droite (f) est perpendiculaire à un plan (π), elle est perpendiculaire à toutes les droites qui se trouvent dans ce plan. Par suite, et en vertu de la condition obtenue au paragraphe 44, les lignes représentatives des conjuguées de ces dernières droites, c'est-à-dire les droites du plan Π qui sont issues du point représentatif π', doivent toutes passer par l'antipôle, relativement à la circonférence directrice, de la ligne représentative f' de la conjuguée de (f). En conséquence, le point π' est nécessairement l'antipôle de cette dernière droite f'. De plus, on voit immédiatement que, lorsque cette condition est satisfaite, la droite et le plan considérés sont rectangulaires. Donc :

Pour qu'une droite soit perpendiculaire à un plan, il faut et il suffit que le point représentatif du plan soit l'antipôle, par rapport à la circonférence directrice, de la ligne représentative de la conjuguée de la droite considérée.

50. Condition de perpendicularité de deux plans. Si nous désignons par (f_1) une droite perpendiculaire à (π_1) et par (f_2) une droite perpendiculaire à (π_2), ces deux droites sont nécessairement rectangulaires et la ligne représentative de la conjuguée de l'une d'elles, f'_1 par exemple, doit passer par l'antipôle de l'autre f'_2 par rapport à la circonférence directrice. Comme, d'autre part, f'_1 est l'antipolaire de π'_1, f'_2 l'antipolaire de π'_2, on voit que l'antipolaire de l'un des points représentatifs, π'_1, par exemple, passe par l'autre point représentatif π'_2. Réciproquement, lorsque cette dernière condition est satisfaite, on voit immédiatement que les deux plans considérés sont rectangulaires. Donc :

Pour que deux plans soient rectangulaires, il faut et il suffit que le point représentatif de l'un d'eux soit situé sur l'antipolaire de l'autre par rapport à la circonférence directrice.

51. Les résultats obtenus dans ce chapitre, consacré entièrement à l'étude du mode de représentation que nous utiliserons exclusivement dans la suite, montrent d'une manière suffisamment nette que les problèmes dans lesquels interviennent les propriétés métriques sont susceptibles de solutions très simples. Dans ces conditions, il nous paraît inutile d'en faire quelques applications particulières.

(A suivre).