

**Zeitschrift:** Bulletin technique de la Suisse romande  
**Band:** 57 (1931)  
**Heft:** 12

**Artikel:** Moments fléchissants de la dalle simple et largeur solidaire d'une charge concentrée  
**Autor:** Paris, A.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-44146>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 13.03.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Moments fléchissants de la dalle simple et largeur solidaire d'une charge concentrée,

par M. A. PARIS, professeur à l'Université de Lausanne.

Comme le rappelait notre précédent article du « Bulletin », le calcul analytique des dalles procède avantageusement de l'emploi des séries trigonométriques de Fourier, dès que les conditions de symétrie orthogonale de l'ouvrage et des charges s'y prêtent. Le D<sup>r</sup> Lewe en a fait la preuve définitive<sup>1</sup> postérieurement à un essai un peu oublié maintenant du prof. K. Hager<sup>2</sup>.

Supposons le cas d'une dalle parfaitement libre sur deux lignes d'appui parallèles ; elle supporte une double rangée de charges localisées sur les rectangles  $h \times g$  de la

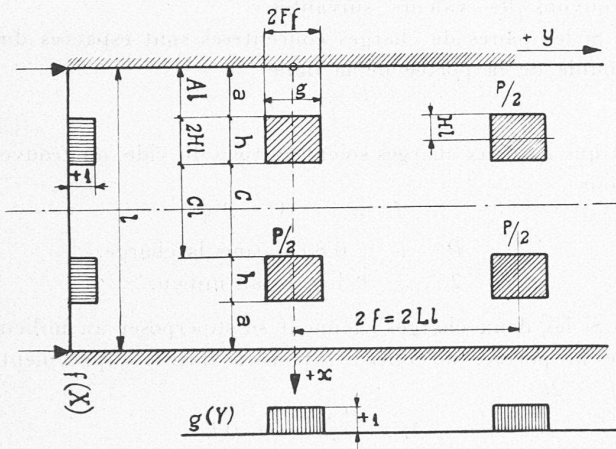


figure ci-dessus. La « fonction de charge » peut s'exprimer par le produit

$$p(x, y) = p \cdot f(X) \cdot g(Y)$$

où

$$X = \frac{\pi \cdot x}{l} \quad Y = \frac{\pi \cdot y}{f}$$

Les séries  $f$  et  $g$  prennent la valeur + 1 entre les abscisses  $x$  et  $y$  correspondant aux rectangles de charge de la figure ; elles sont nulles partout ailleurs, et leur produit avec elles : la charge  $p$  n'existe donc différente de zéro que dans les rectangles hachurés de la dalle ; elle reste absente sur le reste de la superficie de la plaque.

Les deux fonctions  $f$  et  $g$  s'expriment comme suit, en séries de Fourier :

En travers d'abord, avec la portée comme demi-période,

$$f(x) = \sum_{m=1,3,5}^{\infty} a_m \cdot \sin mX$$

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(X) \cdot \sin mX \cdot dX = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(X) \cdot \sin mX \cdot dX$$

série sinusoidale puisque la demi-période positive  $l$  est contiguë à deux demi-périodes égales négatives, la

<sup>1</sup> Lewe. Pflzdecken, 1926.  
<sup>2</sup> K. Hager. Eisenbeton, 1916.

tangente à la ligne élastique étant oblique à l'appui, où elle passe par zéro. Nous savons en outre que

$f(X) = +1$  pour  $X$  de  $A\pi$  à  $(A+2H) \cdot \pi$   
et  $f(X) = 0$  sur le reste de la période. L'intégration nous donne par conséquent

$$a_m = \frac{+8}{m\pi} \sin(A+H)\pi \cdot \sin H\pi.$$

La fonction longitudinale

$$g(Y) = \frac{1}{2} b_0 + \sum_{n=1,2,3}^{\infty} b_n \cdot \cos nY$$

procède suivant les cosinus, parce que prenant des valeurs de même signe quand on se déplace suivant  $y$  vers la gauche ou la droite

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g(Y) \cdot \cos nY \cdot dY = \frac{2}{\pi} (+1) \int_0^{F\pi} \cos nY \cdot dY = \frac{2}{n \cdot \pi} \cdot \sin nF\pi$$

$$b_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} g(Y) \cdot dY = \frac{2}{\pi} \int_0^{F\pi} (+1) \cdot dY = \frac{2}{\pi} F \cdot \pi = 2F.$$

Basés sur la fonction de charge ainsi déterminée, nous obtenons l'équation de la surface élastique par quadruple intégration, terme à terme, du produit  $f(X) \times g(Y)$  ; nous satisfaisons ainsi à la condition générale

$$D \cdot z = \left( \frac{\partial^4 z}{dx^4} + 2 \frac{\partial^4 z}{dx^2 dy^2} + \frac{\partial^4 z}{dy^4} \right).$$

Le moment fléchissant transversal s'exprime ensuite par

$$M_x = -D \left( \frac{\partial^2 z}{dx^2} + \frac{\partial^2 z}{dy^2} \right)$$

où

$$D = E \cdot I \cdot \frac{m^2}{m^2 - 1}$$

$$\mu = \frac{1}{m} = \text{Facteur de Poisson.}$$

$E$  = module d'élasticité  $I$  = moment d'inertie de la tranche de dalle correspondant à la charge.

On néglige volontiers l'effet du gonflement du béton, à cause de son imprécision, et l'on pose par conséquent

$$\mu = 0$$

Les deux dérivées de l'équation en  $z$ , des ordonnées de la surface élastique, s'expriment par

$$D \cdot \frac{\partial^2 z}{dx^2} = \frac{-8pl^2}{\pi^3} \left[ F \sum \frac{1}{m^3} \sin m(A+H)\pi \cdot \sin mH\pi \times \sin \frac{m\pi x}{l} + \frac{2}{\pi} \sum \sum \frac{m}{n} \cdot \frac{1}{(m^2 + n^2 L^2)^2} \times \sin m(A+H)\pi \times \sin mH\pi \times \sin nF\pi \times \sin \frac{m\pi x}{l} \times \cos \frac{n\pi y}{f} \right]$$

et

$$D \cdot \frac{\partial^2 z}{dy^2} = \frac{-16pl^2 L^2}{\pi^4} \sum \sum \frac{m}{n} \cdot \frac{1}{(m^2 + n^2 L^2)^2} \times \sin m(A+H)\pi \cdot \sin mH\pi \cdot \sin nF\pi \cdot \sin \frac{m\pi x}{l} \cdot \cos \frac{n\pi y}{f}$$

Le problème est ainsi complètement résolu au point de vue général. Mais il est intéressant d'en détailler les cas précis suivants.

1. 2 charges symétriques agissent sur des lignes continues

Distance à l'appui =  $a$

Nous faisons  $\mu = 0 \quad F = 1 \quad a = A.l.$

Le moment longitudinal  $M_y$  s'annule ; il reste, si nous faisons encore  $H = 0$  (charge concentrée continue)

$$\frac{P}{2} = 2H.l.p$$

$$M_x = \frac{4l}{\pi^2} \cdot \frac{P}{2} \times \sum \frac{1}{m^2} \cdot \sin mA\pi \cdot \sin \frac{m\pi x}{l}$$

qui devient sous la charge

$$M = \frac{4l.P/2}{\pi^2} \sum \frac{1}{m^2} \sin^2 mA\pi$$

Mettons les charges au tiers de la portée,  $A = 1/3$ , nous trouvons

$$M = \frac{P/2 \times l}{3} \times \frac{3 \cdot 0,866^2 \cdot 1,085 \cdot 4}{\pi^2} = \frac{P}{2} \times \frac{l}{3}$$

Superposons maintenant les deux lignes de charge dans l'axe médian de la dalle, il vient

$$M = \frac{2l \times P/2}{4} \times \frac{8 \cdot 1,223}{\pi^2} = P \cdot \frac{l}{4}$$

\* \* \*

2. Charge uniformément répartie sur toute la dalle.

Le moment longitudinal  $M_y$  s'annule de nouveau avec la dérivée correspondante

$$H = 1/4 \quad A = 0 \quad \sin^2 m \cdot \pi/2 = + 1/2$$

d'où

$$M_x = + \frac{4pl^2}{\pi^3} \cdot \sum \frac{1}{m^3} \sin \frac{m\pi x}{l}$$

qui devient au milieu, pour  $x = l/2$

$$M = \frac{p \cdot l^2}{8}$$

La flèche correspondante sera, en vertu de l'équation de la surface élastique, simplifiée dans ce cas élémentaire,

$$z = \frac{8pl^4}{\pi^5 E.I} \sum \frac{1}{m^5} \sin^2 m\pi/4 \cdot \sin m\pi/2 = \frac{5pl^4}{384 EI}$$

Toutes ces expressions sont connues ; l'analyse mathématique les retrouve dans ces conditions.

\* \* \*

Le cas général de charges distinctes nous permet d'autre part de calculer le moment fléchissant en un point quelconque de la dalle infiniment étendue en direction longitudinale  $y$ , soumise à des paires de charges isolées et symétriques.

Nous supposons des charges parfaitement concentrées

$P/2$ , pour simplifier les formules et faciliter l'évaluation des séries ; nous trouvons ainsi, pour  $F = 0$

$$D \cdot \frac{\partial^2 z}{dx^2} = \frac{-2l.P/2}{\pi^2 \cdot f} \left[ \sum \frac{1}{m^2} \cdot \sin mA\pi \cdot \sin \frac{m\pi x}{l} + 2 \sum \sum \frac{m^2}{(m^2 + n^2 L^2)^2} \cdot \sin mA\pi \cdot \sin \frac{m\pi x}{l} \cdot \cos \frac{n\pi y}{f} \right]$$

et sous la charge  $P/2$ , en direction longitudinale,

$$D \cdot \frac{\partial^2 z}{dy^2} = \frac{-4L^2}{\pi^2} \cdot \frac{l.P/2}{f} \sum \sum \frac{n^2}{(m^2 + n^2 \cdot L^2)^2} \times \sin^2 mA\pi \times \cos \frac{n\pi y}{f}$$

La largeur de la dalle solidaire d'une des charges correspond au rapport existant entre le moment de la poutre simple et celui donné par le calcul de la plaque. Nous en trouvons les valeurs suivantes :

Si les paires de charges concentrées sont espacées du double de la portée de la dalle

$$f = l$$

et que les deux charges soient au tiers du vide, on trouve pour

$$L = 1 \quad A = 1/3$$

$$M = \frac{P}{2} \times \frac{l}{3} : \begin{cases} 0,80 l & \text{sous la charge.} \\ 1,55 l & \text{au milieu.} \end{cases}$$

Si les deux charges viennent se superposer au milieu de la portée, on obtient, pour le même espacement  $2f = 2l$

$$M = \frac{P \times l}{4} : 0,650 l$$

Si ces deux charges superposées prennent d'autres espacements, on trouve par exemple

$$\text{espacement } l \quad M_x = \frac{P \cdot l}{4} : 0,46 l$$

$$\text{dit } 4l \quad M_x = \frac{P \cdot l}{4} : 0,91 l$$

La largeur de dalle solidaire n'atteint donc pas la moitié de l'espacement quand les charges sont rapprochées d'une portée ; elle atteint au contraire les neuf dixièmes de la portée si les charges sont espacées de 4 fois la largeur de la dalle. Ces chiffres font naturellement abstraction de la largeur supplémentaire immédiatement atteinte par la charge ; celle-ci n'est jamais mathématiquement concentrée, elle couvre au contraire une surface de dallage ou de chaussée qui élargit encore la répartition par son talus intérieur de transmission.

Ces proportions s'alignent à peu près sur la droite

$$0,30 \times l (1 + f/l)$$

dès que l'espacement dépasse la portée ; elles croissent du reste moins vite au delà de l'espacement de quatre portées.

La largeur solidaire augmente quand les deux charges cessent d'être superposées.



Le moment longitudinal  $-D \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$  croît parallèlement au moment fléchissant transversal caractéristique ; il prend les valeurs suivantes

$$\text{Espacement} = \text{portée} \times \left\{ \begin{array}{l} 2 \\ 4 \end{array} \right.$$

$$M_y = \frac{P \cdot l}{4} \times \left\{ \begin{array}{l} 1/0,77 \cdot l \\ 1/0,91 \cdot l \end{array} \right.$$

c'est-à-dire de 85 à 87% du moment principal. Le rapport, présenté l'an passé au congrès de Liège par MM. le Dr Ros et Eichinger (Zurich), a conduit ces auteurs à des constatations expérimentales analogues, quoique basées sur la mise en charge de dalles-champignons.

\* \* \*

Comparant ces résultats aux indications de nos Ordonnances fédérales, on doit conclure à l'opportunité d'un changement important de leurs prescriptions à cet égard. Celles-ci, données aux textes de 1915, autorisent de majorer du tiers de la portée de la dalle la largeur immédiatement atteinte par la charge ; elles ne demandent par contre qu'une armature de répartition faisant « par mètre courant, un poids au moins égal à 30% de celui des fers des armatures principales ». Ces indications restent donc loin de la réalité et, craignant de tenir suffisamment compte de la faculté de répartition longitudinale des dalles bien constituées, elles les affaiblissent à cet égard. Ce tort est évident quand les charges fortement localisées sont prépondérantes, comme dans les ponts, certains bâtiments industriels, ou autres ; il peut s'effacer et disparaître lorsque les charges réparties, mortes ou accidentelles, prennent le dessus, parce qu'alors la majoration artificielle de l'armature principale se reflète sur les barres de répartition, qui peuvent devenir suffisantes parce que les autres sont exagérées, et parce que le rapport définitif des moments a changé.

La norme de répartition des charges doit donc être adaptée aux véritables conditions de résistance des dalles, c'est-à-dire tenir compte de l'espacement des charges comme de la portée entre appuis ; elle doit exiger une armature de répartition mieux proportionnée à la possibilité et à l'importance de charges concentrées et à leur rapport aux charges réparties, mortes ou accidentelles.

A. PARIS.

### La déviation de la ligne Lausanne-Neuchâtel, entre Ependes et Yverdon.

Dans notre numéro du 18 avril écoulé, nous mentionnions en quelques lignes les travaux importants en cours d'exécution sur la ligne Lausanne-Neuchâtel, entre Ependes et Yverdon. Comme il s'agit là d'un grand chantier, nous avons pensé intéresser nos lecteurs en leur donnant ici, sous la forme d'un reportage technique, quelques renseignements le concernant.

Nous sommes allé le visiter l'autre jour. Pour faciliter la compréhension de notre exposé, nous y joignons un croquis à l'échelle du 1 : 25 000, indiquant dans leurs grandes lignes les caractéristiques du projet.

*Description des travaux.* — L'âme de tout ingénieur doit tressaillir d'aise en les parcourant, car ils offrent des aspects variés, sollicitent de tous côtés l'attention des constructeurs, et font vibrer, si j'ose dire, toutes les cordes de leur arc.

On ne peut pas dire qu'il s'agisse d'un chantier ramassé, où l'œil du maître peut embrasser d'un coup ses équipes au labeur, ce qui, on ne l'ignore certes pas, contribue efficacement au rendement de la main-d'œuvre.

De la gare d'Ependes au lieu dit « Le Valentin » (km 35 648,50) soit environ sur 3 km, on effectue la pose de la double voie en suivant le tracé existant. Sur ce tronçon, qui constitue un peu moins de la moitié de l'ensemble, les travaux, pour l'instant, se résument, au fond, en un facile jardinage. (Enlèvement de la terre herbeuse.)

Mais dès le Valentin, le tracé change. La nouvelle double voie décrit une boucle à l'est, traverse une première fois le Buron, passe à niveau de la route Neuchâtel-Lausanne (route cantonale 401) dont on supprime ce tronçon pour la raccorder à la route cantonale 422, d'Yverdon à Thierrens.

La nouvelle double voie passe sous cette dernière, puis s'engage à travers la butte de Jolimont entièrement en tranchée. Celle-ci atteint près de 13 m à sa plus grande profondeur. On avait étudié, en variante, de faire passer la voie en tunnel, cela essentiellement pour des raisons d'esthétique. Car la colline de Jolimont est un endroit charmant qu'une tranchée dont la largeur approche à un moment donné des 50 m dépare évidemment quelque peu.

Sur les deux aboutissants de la boucle décrite par le nouveau tracé, soit de part et d'autre de Jolimont, la ligne est en remblai prononcé. D'où nécessité de se procurer des terres en suffisance. Dans l'étude de la variante avec tunnel, on avait, à cause de cela, prévu la possibilité de créer deux emprunts (82 000 m<sup>3</sup>), dont l'un, le plus au nord, aurait ensuite été aménagé comme place de tir. Mais, ainsi que cela résulta de l'examen des soumissions, la solution en tunnel fut rejetée parce que notablement trop coûteuse.

La déviation, avant de se raccorder à la ligne de Payerne, franchit par le passage inférieur de Clindy la route cantonale 402, d'Yverdon à Estavayer, enjambe encore une fois le Buron, puis la rue de l'Industrie, puis le chemin de Saint-Roch, et va enfin rejoindre l'entrée de la gare d'Yverdon au km 39 080,50. La longueur de la déviation est donc de 3432 m.

La ligne de Payerne, prévoit le projet, sera surélevée depuis l'endroit où elle traverse la route cantonale d'Estavayer, afin de regagner le niveau de la nouvelle double voie.

Les pentes et rampes de la déviation — ligne à gros trafic — ne dépassent pas 0,010, et le plus petit rayon de courbure est de 400 m.

*Quelques chiffres.* — Le cube des déblais est estimé à 126 000 m<sup>3</sup> dont 80 000 m<sup>3</sup> en rocher. Surface de revêtement en terre végétale : 42 000 m<sup>2</sup>. Cube total de ballast pour le bétonnage : environ 7000 m<sup>3</sup>. Ce chiffre comprend le cube nécessaire à l'exécution du mur de protection des entrepôts Delmarco, au pont de Clindy. Ciment : 1200 tonnes, au minimum. Fers ronds pour B. A. : 20 tonnes environ. Ballast pour voie ferrée : 17 000 m<sup>3</sup>.

Les travaux comportent le déplacement ou la pose d'un certain nombre de canalisations : 1600 à 1700 m de tuyaux allant du diamètre 10 cm à 80 cm.

Pour la déviation de la route 402, dont nous avons parlé

