

**Zeitschrift:** Bulletin technique de la Suisse romande  
**Band:** 57 (1931)  
**Heft:** 2

**Artikel:** Sur le rendement des obligations qui appartiennent à des emprunts amortissables  
**Autor:** Chuard, Jules  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-44124>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 18.02.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

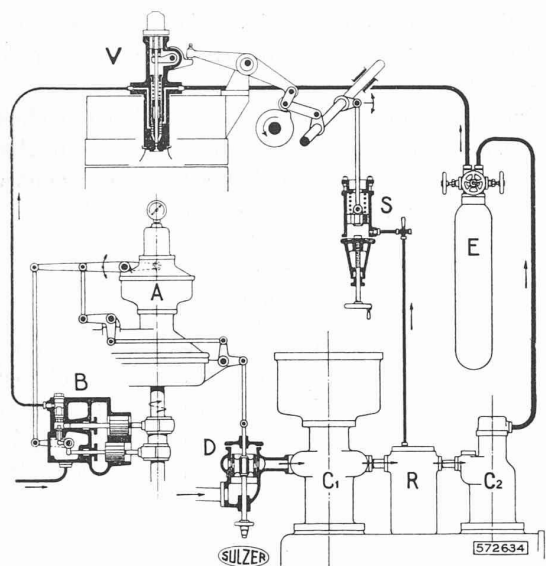


Fig. 5. — Schéma du nouveau réglage des moteurs Sulzer stationnaires, à deux temps, de grande puissance.

Légende. — A. Régulateur. — B. Pompe à combustible. — C<sub>1</sub>. Premier étage du compresseur d'injection. — C<sub>2</sub>. Deuxième étage du compresseur d'injection. — D. Tiroir d'étranglement. — E. Bouteille d'air d'injection. — R. Receiver basse pression. — S. Servo-moteur. — V. Pulvérisateur.

ainsi comprimé s'élève à 500 ou 550° C. Lorsque le piston arrive au point mort supérieur le combustible est pulvérisé et insufflé par de l'air comprimé dans l'espace de compression ; il s'y enflamme et brûle complètement. Lorsque le piston descend, il transmet la pression de détente des gaz à l'arbre-manivelle. Avant d'atteindre le point mort inférieur le piston découvre les lumières d'échappement et une partie des gaz de combustion est déchargée à basse pression dans la conduite d'échappement ; peu après, les lumières de balayage s'ouvrent automatiquement et l'air de balayage pénètre dans le cylindre, refoulant les gaz restés dans ce dernier et le remplissant d'air frais. Le balayage dure  $\frac{1}{10}$  de seconde environ, puis le cycle recommence.

Le réglage, d'une grande précision, est représenté schématiquement par la figure 5. Le régulateur A commande d'une part la pompe à combustible en dosant son débit suivant la charge ; il agit d'autre part sur le tiroir D placé avant le compresseur donnant la première phase de compression de l'air d'insufflation, en réglant la quantité d'air envoyée dans la bouteille d'insufflation puis dans la soupape à combustible V. La levée de l'aiguille à combustible varie également suivant la charge ; à cet effet, les mouvements des leviers qui commandent l'aiguille sont influencés par un servo-moteur S relié à la phase de basse pression du compresseur d'insufflation. La position du servo-moteur est fonction de la pression de l'air à la première phase de compression ; comme cette pression est elle-même réglée par le régulateur, la levée de l'aiguille dépend indirectement de celui-ci.

La mise en parallèle des générateurs avec le réseau se fait en variant le nombre de tours des moteurs jusqu'à concordance des fréquences du générateur et du réseau.

On règle le nombre de tours des moteurs en agissant sur la tension du ressort du régulateur par l'intermédiaire d'un petit moteur électrique placé sur le bâti du régulateur et commandé du tableau de distribution. Si le courant nécessaire vient à manquer, le mécanicien peut agir sur le régulateur à la main.

Les moteurs démarrent à l'air comprimé accumulé dans des bouteilles de démarrage qui seront rechargées après chaque lancement. Ces bouteilles sont placées contre le mur latéral de la salle des machines et sont visibles sur la figure 2.

Le bruit de l'échappement est amorti par des silencieux placés au sous-sol à côté du bloc de fondations (fig. 2).

(A suivre.)

## Sur le rendement des obligations qui appartient à des emprunts amortissables,

par le Dr Jules CHUARD, professeur à l'Université de Lausanne.

Dans une précédente étude, publiée dans ce Bulletin (N° 21, octobre 1929), nous avons envisagé l'échéance moyenne des emprunts amortissables et fait une comparaison entre sa valeur exacte et celle que, très souvent, l'on calcule dans la pratique des affaires. Dans cette étude, nous nous proposons de résoudre un problème de même nature, mais qui cette fois, se rapporte au calcul du taux de rendement que l'on réalise en achetant des obligations d'un emprunt amortissable, à un cours déterminé. De telles études sont peut-être d'importance minime, si l'on se place uniquement au point de vue des applications pratiques. Il n'en demeure pas moins qu'elles présentent un grand intérêt scientifique, puisqu'elles font ressortir le sens et la grandeur des erreurs commises lorsque l'on utilise la méthode empirique, ainsi que les limites de durée entre lesquelles cette méthode doit être raisonnablement appliquée.

Les notations que nous adopterons, sont identiques à celles que nous avons utilisées dans notre précédent article. Nous désignerons ainsi par :

- n* le nombre de périodes que comporte l'emprunt, ou aussi le nombre de périodes compté à partir du moment où l'on achète des titres.
- c* le cours des titres au moment de l'émission, ou aussi à l'époque où l'on procède à l'achat de certains d'entre eux.
- i* le taux.

A l'égard de cette dernière quantité, nous devons remarquer qu'il existe différentes espèces de taux : a) le taux nominal, soit celui qui est imprimé sur le titre, que nous caractériserons par l'expression  $i_0$  ; b) le taux approximatif obtenu par l'application de la formule empirique que nous désignerons par  $i'$  ; c) le taux de rendement exact qui résulte de l'application d'une

méthode rationnelle de résolution, et auquel nous ne réserverons aucun indice.

Rappelons encore que

$$1 + i = u \quad \text{et} \quad \frac{1}{u} = v$$

et que par suite

$$1 + i_0 = u_0 \quad \frac{1}{u_0} = v_0$$

Enfin l'on sait que la valeur initiale d'une rente de  $n$  termes égaux à l'unité, payables à termes échus, est, au taux  $i$ ,  $a_{\overline{n}|}$

où

$$a_{\overline{n}|} = \frac{1 - v^n}{i}$$

et que de même

$$a_{\overline{n}|}^0 = \frac{1 - v_0^n}{i_0}$$

La formule empirique que nous avons en vue ici, et qui est d'un usage pratique fréquent, est la suivante :

$$i' = \frac{i_0}{c} + \frac{1 - c}{\frac{2}{3}n} \quad (1)$$

Elle revient à calculer tout d'abord un taux brut  $\frac{i_0}{c}$ ,

que l'on augmente ou diminue, suivant que le titre est coté au-dessous ou au-dessus du pair, c'est-à-dire suivant que le cours  $c$  est inférieur ou supérieur à l'unité, d'une partie de la prime au remboursement. Or celle-ci est reportée d'une manière uniforme sur les deux tiers de la durée de l'emprunt, ou du temps qui reste à courir jusqu'à son amortissement complet.

Nous regardons ici le taux nominal  $i_0$  et le cours  $c$  comme des quantités fixes, et nous imaginons que le nombre des périodes  $n$  est variable. La quantité  $i'$  est alors une fonction de  $n$ , qui est connue en algèbre sous le nom de fonction *homographique*. Elle se représente graphiquement par une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont, d'une part l'axe vertical des  $i'$  et de l'autre, une parallèle à l'axe horizontal des  $n$ , tracée à une hauteur égale à  $\frac{i_0}{c}$ .

La position et la forme de cette hyperbole équilatère dépendent évidemment des valeurs que l'on attribue à l'avance aux quantités  $i_0$  et  $c$ . Il peut être intéressant d'indiquer les résultats que l'on obtient pour quelques valeurs particulières de ces quantités. C'est ainsi que l'on est conduit au tableau suivant :

Taux approximatif.

| Taux nominal | 3 %   |      |      | 4 %   |      |      | 5 %   |      |      |
|--------------|-------|------|------|-------|------|------|-------|------|------|
|              | Cours | 0,7  | 0,8  | 0,9   | 0,7  | 0,8  | 0,9   | 0,7  | 0,8  |
| $n=10$       | 8,79  | 6,75 | 4,83 | 10,21 | 8,00 | 5,94 | 11,64 | 9,25 | 7,06 |
| 20           | 6,54  | 5,25 | 4,08 | 7,96  | 6,50 | 5,19 | 9,39  | 7,75 | 6,31 |
| 30           | 5,79  | 4,75 | 3,83 | 7,21  | 6,00 | 4,94 | 8,64  | 7,25 | 6,06 |
| 40           | 5,41  | 4,50 | 3,71 | 6,84  | 5,75 | 4,82 | 8,27  | 6,95 | 5,93 |
| 50           | 5,19  | 4,35 | 3,63 | 6,61  | 5,60 | 4,74 | 8,04  | 6,85 | 5,86 |
| 60           | 5,04  | 4,25 | 3,58 | 6,46  | 5,50 | 4,69 | 7,89  | 6,75 | 5,81 |
| 70           | 4,93  | 4,18 | 3,54 | 6,35  | 5,43 | 4,65 | 7,78  | 6,68 | 5,77 |
| 80           | 4,85  | 4,12 | 3,52 | 6,27  | 5,38 | 4,63 | 7,70  | 6,62 | 5,75 |
| 90           | 4,79  | 4,08 | 3,50 | 6,21  | 5,33 | 4,61 | 7,64  | 6,58 | 5,73 |
| 100          | 4,74  | 4,05 | 3,48 | 6,16  | 5,30 | 4,59 | 7,59  | 6,55 | 5,71 |

La valeur exacte du taux  $i$  s'obtient par un procédé tout différent, et ne conduit pas à une formule dont l'étude analytique soit aussi aisée.

Désignons en effet par  $C$  la valeur nominale de chaque titre et soit  $N$  leur nombre. L'annuité constante  $A$  qui est nécessaire au service de l'intérêt et de l'amortissement de cet emprunt, est donnée par la formule

$$A = \frac{NC}{a_{\overline{n}|}^0}$$

Si, d'autre part, les titres sont achetés au cours  $c$ , la valeur actuelle de l'emprunt est  $NCc$ . Elle est d'ailleurs représentée par la valeur initiale des  $n$  termes de la rente  $A$ , cette valeur initiale étant calculée au taux  $i$  qui est précisément le taux exact de rendement cherché. On a de ce fait :

$$NCc = A a_{\overline{n}|}$$

et par suite

$$NCc = \frac{NC}{a_{\overline{n}|}^0} \cdot a_{\overline{n}|}$$

soit

$$a_{\overline{n}|} = c \cdot a_{\overline{n}|}^0$$

formule qui est équivalente à

$$\frac{1 - v^n}{i} = c \cdot \frac{1 - v_0^n}{i_0}$$

ou à

$$\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} = c \frac{1 - (1 + i_0)^{-n}}{i_0} \quad (2)$$

Telle est la formule qui définit d'une façon implicite la valeur du taux  $i$  en fonction des autres quantités  $i_0$ ,  $c$  et  $n$ . Par analogie avec ce qui précède, on est en droit de regarder  $i$  comme une fonction de  $n$  seul,  $i_0$  et  $c$  ayant des valeurs fixées d'avance.

Remarquons d'emblée qu'il n'est pas possible de comparer cette fonction à une autre fonction algébrique dont la forme soit connue, et que de plus, son étude par le procédé ordinaire de l'étude des fonctions, présente de réelles difficultés. Il nous paraît préférable de tourner ces difficultés en faisant emploi des tables financières, grâce auxquelles nous sommes à même de présenter le tableau suivant :

Taux exact.

| Taux nominal | 3 %   |      |      | 4 %   |      |      | 5 %   |      |      |
|--------------|-------|------|------|-------|------|------|-------|------|------|
|              | Cours | 0,7  | 0,8  | 0,9   | 0,7  | 0,8  | 0,9   | 0,7  | 0,8  |
| $n=10$       | 10,67 | 7,65 | 5,12 | 11,88 | 8,78 | 6,18 | 13,10 | 9,88 | 7,25 |
| 20           | 7,23  | 5,57 | 4,17 | 8,46  | 6,67 | 5,23 | 9,65  | 7,79 | 6,29 |
| 30           | 6,03  | 4,83 | 3,84 | 7,26  | 5,95 | 4,90 | 8,54  | 7,10 | 5,95 |
| 40           | 5,46  | 4,47 | 3,67 | 6,67  | 5,62 | 4,74 | 7,92  | 6,77 | 5,81 |
| 50           | 5,10  | 4,26 | 3,57 | 6,37  | 5,43 | 4,64 | 7,65  | 6,59 | 5,73 |
| 60           | 4,87  | 4,12 | 3,51 | 6,16  | 5,30 | 4,58 | 7,47  | 6,48 | 5,68 |
| 70           | 4,72  | 4,02 | 3,46 | 6,01  | 5,21 | 4,54 | 7,36  | 6,41 | 5,65 |
| 80           | 4,60  | 3,95 | 3,43 | 5,91  | 5,13 | 4,51 | 7,29  | 6,36 | 5,63 |
| 90           | 4,52  | 3,91 | 3,41 | 5,87  | 5,10 | 4,49 | 7,24  | 6,33 | 5,62 |
| 100          | 4,47  | 3,87 | 3,39 | 5,83  | 5,07 | 4,48 | 7,21  | 6,28 | 5,61 |

La comparaison des valeurs correspondantes des deux tableaux ci-dessus permet de fixer le sens et la grandeur de la différence  $i' - i$ . C'est ainsi que nous obtenons le troisième tableau :

Différence des taux  $i' - i$ .

| Taux nominal | 3 %   |       |       | 4 %   |       |       | 5 %   |       |       |     |
|--------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
|              | Cours | 0,7   | 0,8   | 0,9   | 0,7   | 0,8   | 0,9   | 0,7   | 0,8   | 0,9 |
| $n=10$       | -1,88 | -0,90 | -0,29 | -1,67 | -0,78 | -0,24 | -1,46 | -0,62 | -0,19 |     |
| 20           | -0,69 | -0,22 | -0,09 | -0,50 | -0,17 | -0,04 | -0,26 | -0,04 | 0,02  |     |
| 30           | -0,24 | -0,08 | -0,01 | -0,05 | 0,05  | 0,04  | 0,10  | 0,15  | 0,11  |     |
| 40           | -0,05 | 0,03  | 0,04  | 0,17  | 0,13  | 0,08  | 0,35  | 0,23  | 0,12  |     |
| 50           | 0,09  | 0,09  | 0,06  | 0,24  | 0,17  | 0,10  | 0,39  | 0,26  | 0,13  |     |
| 60           | 0,17  | 0,13  | 0,07  | 0,30  | 0,20  | 0,11  | 0,42  | 0,27  | 0,13  |     |
| 70           | 0,21  | 0,16  | 0,08  | 0,34  | 0,22  | 0,11  | 0,42  | 0,27  | 0,12  |     |
| 80           | 0,25  | 0,17  | 0,09  | 0,34  | 0,24  | 0,12  | 0,41  | 0,26  | 0,12  |     |
| 90           | 0,27  | 0,17  | 0,09  | 0,34  | 0,23  | 0,12  | 0,40  | 0,25  | 0,11  |     |
| 100          | 0,27  | 0,18  | 0,09  | 0,33  | 0,23  | 0,11  | 0,38  | 0,23  | 0,10  |     |

Il convient d'examiner un instant les nombres qui sont contenus dans ce dernier tableau. On constate que dans l'espace de temps qui s'écoule entre 10 et 100 périodes (celles-ci sont en général des années) la différence  $i' - i$  est tout d'abord négative, puis elle s'annule pour une valeur de  $n$  que nous conviendrons de caractériser par l'indice zéro, et enfin elle devient positive. La valeur de  $n_0$  dépend à la fois du taux nominal et du cours. Lorsque le nombre  $n$  est voisin de  $n_0$  la différence  $i' - i$  est, dans l'un ou l'autre sens, négligeable. Cette différence s'accroît assez rapidement si le cours s'écarte de l'unité. De plus elle paraît passer par un maximum pour une valeur de  $n$  supérieure à  $n_0$ , mais qui est d'autant plus grande que le taux nominal est plus bas.

Ces remarques caractérisent fort bien la nature de la fonction  $i' - i$  considérée comme une fonction de  $n$ , lorsque  $n$  varie entre 10 et 100 périodes. Il est encore intéressant de savoir ce qui se passe quand  $n$  est inférieur à 10 ou supérieur à 100. Or cela ne présente pas de difficultés. En effet, regardons  $n$  comme une quantité infiniment grande. Dans ce cas, la formule (2) devient :

$$\frac{1}{i} = c \cdot \frac{1}{i_0} \quad \text{soit :} \quad i = \frac{i_0}{c}$$

ce qui montre que  $i$  est égal à  $i'$ , c'est-à-dire que la différence  $i' - i$  est nulle.

A l'autre extrémité,  $n = 0$ , la formule (2) prend une forme indéterminée. Pour lever cette indétermination, il convient de faire usage de la règle de l'Hospital, ce qui conduit à l'expression

$$\frac{i}{\log u} = \frac{i_0}{c \log u_0}$$

de laquelle on déduit une valeur finie de  $i$ , bien déterminée, qui dépend des constantes  $i_0$  et  $c$ . La différence  $i' - i$  est alors infiniment grande.

Or nous avons vu que cette différence était négative si la valeur de  $n$  était égale à 10. Comme elle doit devenir positive, il est nécessaire qu'elle s'annule entre zéro et 10, et passe en outre par un minimum. C'est par exemple

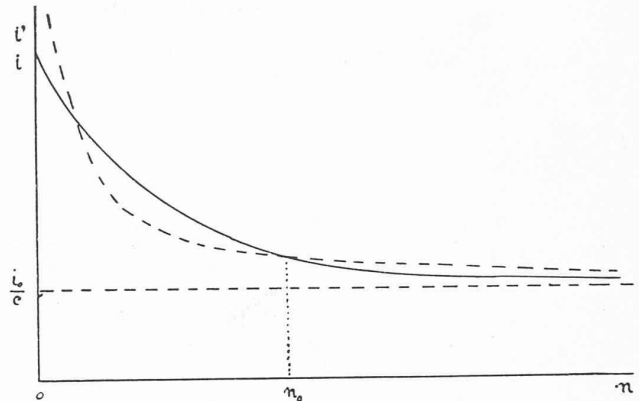


Fig. 1.

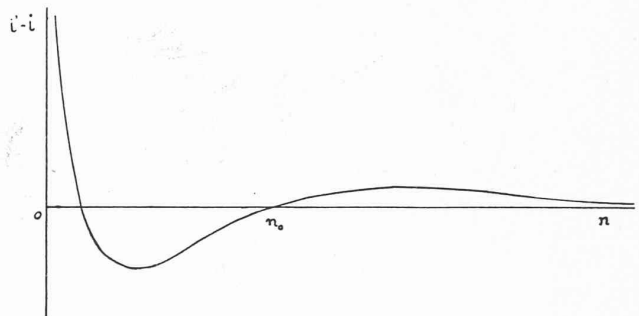


Fig. 2.

ce qui apparaît dans le cas où le taux nominal est 4 % et le cours  $c = 0,8$ . On trouve ainsi :

|         |               |          |                   |
|---------|---------------|----------|-------------------|
| $n = 0$ | $i' = \infty$ | $i = 59$ | $i' - i = \infty$ |
| 1       | 35            | 30       | 5                 |
| 2       | 20            | 21       | -1                |

En résumé, la fonction  $i' - i$  de la variable  $n$  possède deux asymptotes, qui sont les axes de coordonnées. Lorsque  $n$  varie graduellement de zéro à l'infini, la fonction descend asymptotiquement le long de l'axe vertical, s'annule pour une valeur de  $n$  assez voisine de l'unité, passe par un minimum, s'annule une seconde fois, passe par un maximum pour redescendre ensuite et tendre asymptotiquement vers l'axe horizontal. Si en théorie cette fonction peut prendre de grandes valeurs il faut reconnaître qu'en général dans la pratique elle n'intervient que dans les espaces où elle est vraiment petite. On aurait tort cependant de l'appliquer sans restriction, car dès que le cours s'écarte sensiblement de l'unité et que l'on s'éloigne de la valeur  $n_0$ , la différence  $i' - i$  peut prendre des valeurs appréciables.

Nous indiquons, dans les deux graphiques ci-joints, la marche des fonctions  $i'$ ,  $i$  et  $i' - i$  (fig. 1 et 2).

P.S. — Il est bien évident que les taux dont il est question ici sont des taux moyens. Ces taux interviennent dans le cas du placement de la totalité des titres d'un emprunt, ou tout au moins d'un nombre suffisamment grand de titres. Le taux réalisé par l'achat d'un titre unique, est indéterminé, puisqu'il dépend de son remboursement, dont l'époque est liée à un tirage au sort.