Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande

Band: 59 (1933)

Heft: 1

Artikel: Calculs des moments fléchissants sur appuis de poutres continues à n travées

Autor: Meyer, G.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-45623

Calculs des moments fléchissants sur appuis de poutres continues à *n* travées

par G. MEYER, ingénieur.[1]

Les moments fléchissants sur appuis d'une poutre continue peuvent être déterminés soit analytiquement, soit graphiquement.

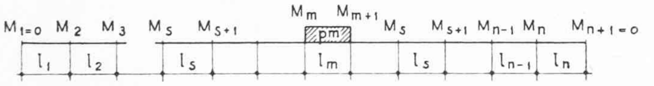
La méthode graphique est assez simple mais exige l'emploi de la règle et du compas et ne permet pas d'obtenir des résultats très exacts à moins de travailler à grande échelle.

La méthode analytique repose sur la résolution des formules de Clapeyron qui donnent les relations des moments pour trois appuis successifs. Pour déterminer les moments d'une poutre à n travées on doit résoudre un système de $n—1$ équations à $n—1$ inconnues.

Dès que le nombre des travées dépasse 3 à 4, cette résolution d'équations devient longue et fastidieuse et, en outre, les moments sur appuis des travées non chargées étant obtenus par une petite différence de deux grands nombres, deviennent rapidement très inexacts si ce n'est même faux, comme signe, dès que l'on n'opère plus avec un grand nombre de décimales.

Nous avons cherché à établir pour la résolution de ces équations une méthode plus rapide et donnant des résultats exacts même avec l'emploi de la règle à calculer.

Pour y arriver, nous avons tiré des équations de Clapeyron des coefficients en fonction desquels nous obtenons directement la valeur des moments, coefficients jouant un rôle analogue aux foyers de la méthode graphique.



Soit une poutre à n travées, l_m est la portée de la seule travée chargée et p_m sa surcharge uniforme par m^1. l_s est une travée quelconque de l_2 à l_{n-1}, soit à gauche, soit à droite de la travée chargée.

Nous aurons, d'après Clapeyron, les équations suivantes à résoudre :

$$1) \quad 2 M_2 (l_1 + l_2) + M_3 l_2 = 0$$

$$2) \quad M_2 l_2 + 2 M_3 (l_2 + l_3) + M_4 l_3 = 0$$

$$3) \quad M_3 l_3 + 2 M_4 (l_3 + l_4) + M_5 l_4 = 0$$

$$m—1) \quad M_{m-1} l_{m-1} + 2 M_m (l_{m-1} + l_m) + M_{m+1} l_m = -\frac{p_m l_m^3}{4}$$

$$m) \quad M_m l_m + 2 M_{m+1} (l_m + l_{m+1}) + M_{m+2} l_{m+1} = -\frac{p_m l_m^3}{4}$$

$$n—3) \quad M_{n-3} l_{n-3} + 2 M_{n-2} (l_{n-3} + l_{n-2}) + M_{n-1} l_{n-2} = 0$$

$$n—2) \quad M_{n-2} l_{n-2} + 2 M_{n-1} (l_{n-2} + l_{n-1}) + M_n l_{n-1} = 0$$

$$n—1) \quad M_{n-1} l_{n-1} + 2 M_n (l_{n-1} + l_n) = 0$$

De la première équation de Clapeyron nous tirons

$M_2 = -\frac{M_3 l_2}{2(l_1 + l_2)}$ et, en posant $J_2 = 2(l_1 + l_2)$, nous aurons $M_2 = -\frac{M_3 l_2}{J_2}$

De l'équation 2), dans laquelle nous remplaçons M_2 par cette dernière valeur, nous tirons $M_3 = -\frac{M_4 l_3}{2(l_2 + l_3) - \frac{l_2^2}{J_2}}$

et en posant $J_3 = 2(l_2 + l_3) - \frac{l_2^2}{J_2}$, nous aurons : $M_3 = -\frac{M_4 l_3}{J_3}$; en continuant, nous obtenons d'une manière plus générale :

$$a) \quad J_s = 2(l_{s-1} + l_s) - \frac{l^2_{s-1}}{J_{s-1}} \quad \text{et} \quad b) \quad M_s = -\frac{M_{s+1} l_s}{J_s}$$

En procédant de même avec les équations $n—1$, $n—2$, $n—3....s$ et en appelant K les coefficients obtenus de la même façon que les coefficients J avec les travées 1, 2, 3, ...s, nous aurons :

$$K_{n-1} = 2(l_{n-1} + l_n) \qquad M_n = -\frac{M_{n-1} l_{n-1}}{K_{n-1}}$$

$$K_{n-2} = 2(l_{n-2} + l_{n-1}) - \frac{l^2_{n-1}}{K_{n-1}} \qquad M_{n-1} = -\frac{M_{n-2} l_{n-2}}{K_{n-2}}$$

et, d'une manière plus générale :

$$c) \quad K_s = 2(l_s + l_{s+1}) - \frac{l^2_{s+1}}{K_{s+1}} \qquad d) \quad M_{s+1} = -\frac{M_s l_s}{K_s}$$

Les coefficients J représentent l'influence, sur la travée dont le J considéré porte l'indice, de toutes les travées à sa gauche et les coefficients K l'influence, sur la travée dont le K considéré porte l'indice, de toutes les travées à sa droite. Les formules a) et c), générales de J_3 à J_n et de K_{n-2} à K_1 ne s'appliquent donc pas à J_2 et à K_{n-1}, les coefficients J_1 et K_n n'existant pas. Nous avons d'ailleurs déjà trouvé les valeurs de r) $J_2 = 2(l_1 + l_2)$ et t) $K_{n-1} = 2(l_{n-1} + l_n)$ tirées des équations 1) et n).

Si, maintenant, nous voulons déterminer les moments sur appuis de la travée chargée l_m, nous considérons les deux équations de Clapeyron m-1) et m).

Dans ces équations, nous remplacerons M_{m-1} et M_{m+2} par leurs valeurs $M_{m-1} = -\frac{M_m l_{m-1}}{J_{m-1}}$ et $M_{m+2} = -\frac{M_{m+1} l_{m+1}}{K_{m+1}}$ tirées des égalités b) et d) ; l'équation $m—1$) deviendra alors :

$$-\frac{M_m l^2_{m-1}}{J_{m-1}} + M_m \, 2(l_{m-1} + l_m) + M_{m+1} l_m = -\frac{p_m l^3_m}{4}$$

et, en mettant m_m en facteur :

$$M_m \left\{ 2(l_{m-1} + l_m) - \frac{l^2_{m-1}}{J_{m-1}} \right\} + M_{m+1} l_m = -\frac{p_m l^3_m}{4}$$

mais le coefficient de M_m n'est autre que J_m (voir égalité a) et nous aurons donc e) $M_m J_m + M_{m+1} l_m = -\frac{p_m l^3_m}{4}$

En introduisant la valeur de M_{m+2} ci-dessus dans l'équation m) et en posant $2(l_m + l_{m+1}) - \frac{l^2_{m+1}}{K_{m+s}} = K_m$ (voir égalité c) nous aurons f) $M_m l_m + M_{m+1} K_m = \frac{p_m l^3_m}{4}$

[1] Paris, 8 rue Henner.

Les valeurs de M_m et M_{m+1}, tirées de ces deux équations e et f; sont alors :

$$g)\quad m_m = -\frac{p_m\, l^3_m}{4}\left(\frac{K_m - l_m}{J_m K_m - l^2_m}\right)$$

$$h)\quad m_{m+1} = -\frac{p_m\, l^3_m}{4}\left(\frac{J_m - l_m}{J_m K_m - l^2_m}\right)$$

Les formules g et h, générales lorsque la travée chargée est comprise entre l_2 et l_{n-1}, ne s'appliquent pas lorsque soit la première, soit la dernière travée est chargée car les valeurs obtenues ainsi pour M_2 et M_n contiendraient des coefficients J_1 et K_n n'existant pas. Les valeurs de ces moments, tirées directement des équations de Clapeyron 1) et n—1) sont alors :

$$i)\ M_2 = -\frac{p_1\, l_1^3}{4\, K_1} \quad \text{et} \quad k)\ M_n = -\frac{p_n\, l^3_n}{4\, J_n}$$

Pour déterminer d'après ces formules les moments sur appuis d'une poutre à n travées, on calculera tout d'abord les valeurs de J et de K pour chaque travée de l_1 à l_n d'après les égalités a), c) et r), t).

On déterminera, ensuite, les moments sur appuis de la travée chargée par les formules g) et h) ou i) et k) et, enfin, on en déduira successivement les moments sur appuis des travées non chargées : par la formule b) pour les travées à gauche de la travée chargée et par la formule d) pour les travées à sa droite.

Pour faciliter le travail, on inscrira successivement, sous forme de tableau, au-dessous d'une ligne droite représentant la poutre considérée, les valeurs : l_2, $\frac{p\, l^3}{4}$, J et K, puis la succession des moments sur appuis en consacrant une ligne horizontale à chaque cas de charge.

Par simple addition algébrique, on aura les moments sur appuis et par suite les moments dans la travée correspondant aux différents cas de charge.

Au cas où la travée chargée n'est plus sollicitée par une surcharge uniforme, mais bien par une force concentrée P située à la distance x de l'appui de gauche, les équations de Clapeyron restent semblables, sauf celles dont le deuxième membre est fonction de la charge, ces égalités deviennent alors :

$$m-1)'\ M_{m-1}l_{m-1} + 2\, M_m(l_{m-1}+l_m) + M_{m+1}l_m = -M_0(2l - x)$$

$$m')\ M_m l_m + 2\, M_{m+1}(l_m + l_{m+1}) + M_{m+2}l_{m+1} = -M_0(l + x)$$

où M_0 est le moment sous la charge concentrée pour appuis libres. Les coefficients J et K ainsi que les moments sur appuis des travées non chargées ne dépendant que des longueurs des travées s'obtiennent par les formules a), c) et b), d).

En procédant comme pour le cas de la surcharge uniforme, nous déduirons des équations m—1$'$ et m' les valeurs des moments sur appuis de la travée chargée :

$$g')\ M_m = -M_0\,\frac{K_m\,(2\,l_m - x) - l_m\,(l_m + x)}{J_m\,K_m - l^2_m}$$

$$h')\ M_{m+1} = -M_0\,\frac{J_m\,(l_m + x) - l_m\,(2\,l_m - x)}{J_m\,K_m - l^2_m}$$

les moments pour la première et la dernière travée chargée deviennent :

$$i')\ M_2 = -\frac{M_0\,(l + x)}{K_1} \qquad k')\ M_n = -\frac{M_0\,(2\,l_n - x)}{J_n}$$

A propos de la dernière exposition de l'"Ameublement typ".

S'il nous était donné de parler plus longuement de l'exposition d'architecture intérieure que la Société immobilière « Clarté » a tenue récemment à Genève, rue Adrien-Lachenal, dans la maison de verre dressée d'après les plans de *Le Corbusier*, nous voudrions insister, dans une ample étude, sur la portée exceptionnelle de cette manifestation. Mais, à l'instant même où dans l'édifice du précurseur de l'architecture transparente se trouvent déjà en présence deux conceptions de l'éternel dilemme : *architecture-fonction* et *architecture-décor*, nous nous contenterons d'émettre quelques-unes des impressions que nous a suggérées l'ensemble magistral organisé par les soins de l'« Ameublement typ », plus communément connu en Suisse sous le nom de « Wohnbedarf », de Zurich.

Dès que nous pénétrâmes dans le second bâtiment, au

Studio dans la maison de verre, de *Le Corbusier*, à Genève.
Table avec pieds décalés et corps roulant.
Installation de la « Wohnbedarf ».