

**Zeitschrift:** Bulletin technique de la Suisse romande

**Band:** 63 (1937)

**Heft:** 15

**Artikel:** Calcul de la contraction causée par une vanne plane dans le cas d'un écoulement dénoyé

**Autor:** Fawer, Carlos

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-48459>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 30.03.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Cherchons la valeur de  $H$  pour  $\varphi = 30^\circ$ .

Pour  $\alpha = 90^\circ$  : On suit le demi-cercle  $\alpha = 90^\circ$  jusqu'au rayon  $\varphi = 30^\circ$ , soit donc jusqu'au point  $N$ , pour lequel on trouve  $H = 1,3 P$ , valeur correspondant au pendule mathématique, et en suivant l'horizontale jusqu'en  $Q$  on aboutit le long de la ligne oblique descendant à gauche au point  $R$  pour lequel  $H = 0,65 P$ .

Pour  $\alpha = 60^\circ$ , on procéderait de même en partant du point  $S$  et l'on obtiendrait  $H = 0,4 P$  (Point  $T$ ).

La figure 4 représente, pour le cas de l'angle de battement maximum  $\alpha = 90^\circ$ , qui est en somme le cas extrême pour une cloche, les valeurs de  $V$  et de  $H$ , en fonction de l'angle  $\varphi$ . Cette même figure pourrait naturellement être tracée pour toutes les différentes valeurs de  $\alpha$ . La figure 4 a, avant tout, pour but d'orienter le lecteur sur la manière dont varient  $V$  et  $H$ , pour un  $\alpha$  déterminé.

Pour l'analyse de la stabilité d'un clocher il convient de relever que l'influence de  $V$  max est d'une importance relativement faible puisque  $V$  max n'atteint qu'une valeur de quelques pourcents seulement du poids du clocher lui-même.

Par contre, l'influence de la composante horizontale  $H$  max est beaucoup plus importante, ce qui rend désirable, sinon indispensable, une détermination aussi exacte que possible de la valeur de  $H$  max pour chacune des cloches installées à l'intérieur du clocher.

## Concours pour les motifs de sculpture destinés au quai Turretini, à Genève.

Etaient admis à prendre part à ce concours les sculpteurs domiciliés à Genève dès avant le 1<sup>er</sup> janvier 1930 ainsi que ceux de nationalité genevoise domiciliés hors du canton.

Il était mis à la disposition du jury une somme de Fr. 12 000.— Sur ce montant, il devait être prélevé Fr. 8000.— pour être répartis par le Jury aux meilleurs projets retenus. Le solde de Fr. 4000.— était mis à la disposition du jury pour l'attribution d'allocations aux auteurs de projets non retenus, et émanant de personnes plus particulièrement atteintes par la crise.

### Conditions spéciales.

Les concurrents devaient indiquer le coût de leur projet, qui, compris tous frais accessoires, transport, mise en place, honoraires etc., ne devait pas dépasser au total : Fr. 30 000.— par motif.

Les concurrents avaient toute latitude pour le choix de la pierre ; toutefois, celle-ci devra se rapprocher du granit comme teinte et comme grain (exemple : pierre de Samoëns etc.).

Les concurrents avaient aussi la plus entière liberté quant au choix des motifs sculpturaux, mais une très grande importance était attachée à leur échelle qui devait être proportionnée au parti architectural du quai.

(Voir page 193).

(A suivre).

## Calcul de la contraction causée par une vanne plane dans le cas d'un écoulement dénoyé<sup>1</sup>

par M. CARLOS FAWER, ingénieur<sup>2</sup>.

### Introduction.

Plusieurs auteurs ont étudié ce problème théorique et sont arrivés à des résultats différant les uns des autres. En outre, nous ne connaissons pas le degré d'approximation des quelques formules empiriques établies jusqu'ici.

Nous avons ainsi été amenés à reprendre l'étude théorique du problème et à juger ses conclusions sur la base d'expériences personnelles effectuées au *Laboratoire d'hydraulique de l'Ecole d'ingénieurs de Lausanne*.

Les expériences font ressortir que le mouvement est *irrotationnel*<sup>3</sup> à de faibles pertes de charge près, attribuables essentiellement à la rugosité des parois. Nous négligerons ces pertes dans l'étude du mouvement lui-même et n'introduirons leur effet global que dans le calcul du débit.

L'attention sera surtout portée sur la valeur de la contraction que subit la veine par rapport à l'ouverture de la vanne.

Nous ferons d'abord un calcul hydraulique, application directe de notre équation plus générale des mouvements permanents à filets courbes dans un canal de section rectangulaire et de largeur constante.

La validité en étant, comme nous le verrons, limitée aux faibles inclinaisons de la vanne, nous le compléterons par une étude hydrodynamique, valable pour une inclinaison quelconque.

### I. Estimation de la contraction au moyen d'un calcul hydraulique.

Admettons que dans une section quelconque d'une veine libre à filets courbes, la distribution des rayons de courbure soit donnée par la formule

$$\frac{1}{R_z} = \frac{1}{R} \left( \frac{z}{h} \right)^\kappa$$

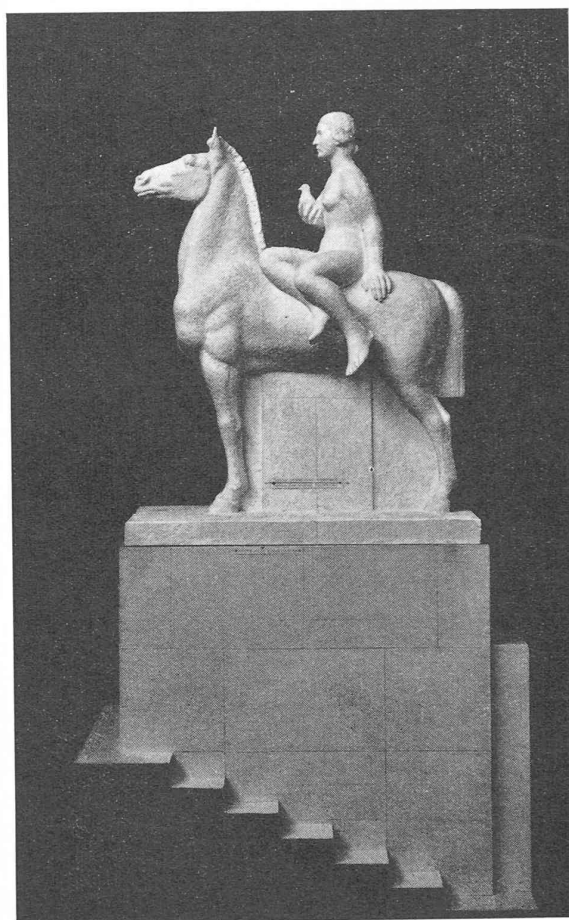
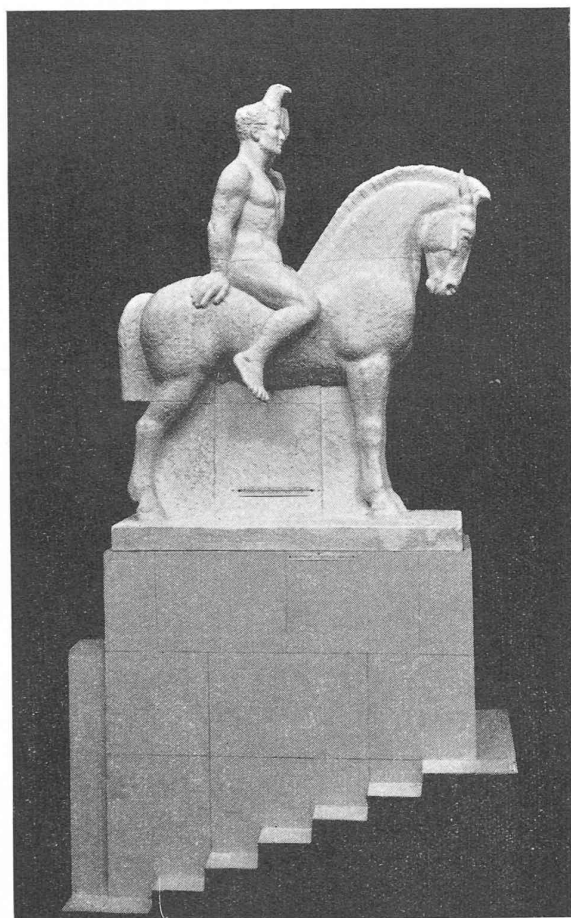
expression valable lorsque le radier est horizontal et dans laquelle

<sup>1</sup> L'écoulement est du type dénoyé lorsque immédiatement à l'aval de la vanne le régime est nettement torrentiel, sans qu'aucun tourbillon vienne se superposer à la veine liquide principale. Si tel est le cas les conditions d'écoulement d'aval n'ont aucune influence sur l'écoulement à l'amont de la vanne.

<sup>2</sup> Cet article est la reproduction de la dernière partie d'une thèse présentée avec succès par M. Fawer à l'Ecole d'ingénieurs de l'Université de Lausanne, pour l'obtention du grade de docteur ès sciences techniques. Cette étude a été poursuivie au Laboratoire d'hydraulique de l'Ecole d'ingénieurs, sous la direction de M. le professeur A. Stucky. (Réd.)

<sup>3</sup> Le mouvement est dit *irrotationnel* s'il n'y a point d'échange d'énergie avec l'extérieur, la vitesse dérive alors d'un potentiel.

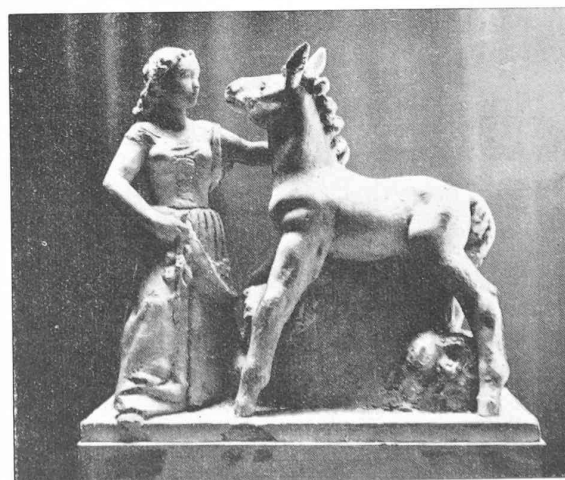
## CONCOURS POUR LES MOTIFS DE SCULPTURE DESTINÉS AU QUAI TURRETTINI, A GENÈVE



1<sup>er</sup> prix : « Aigle de Genève, colombe de la paix », de M. Frédéric Schmied, sculpteur, à Genève.

**Jugement du jury :** *Ce projet répond parfaitement aux conditions du concours et notamment aux dispositions prévues relatives à l'unité d'ensemble et à l'adaptation au parti architectural du quai. En outre, les proportions des différentes parties de la composition sont excellentes. Toutefois, la figure du cavalier n'est pas au point, son torse est trop court. La conception de présenter l'aigle de Genève et la colombe de la paix est heureuse.*

*Examinant les deux variantes présentées, le jury se prononce pour la variante prévoyant une surélévation du socle. Cette variante s'accorde à l'importance du motif ; elle nécessiterait toutefois une modification des proportions des figures de manière à éviter qu'elles paraissent trop courtes.*



II<sup>e</sup> prix : « Jeunesse », de M. Max Weber, sculpteur, à Genève.

**Jugement du jury :** *Ce projet a été retenu par le jury surtout en considération des qualités extrêmement plaisantes de plastique qu'il présente et de la grâce qui s'en dégage. Toutefois, ses déficiences au point de vue architectural sont telles que le jury ne pourrait le retenir pour une exécution.*

$R_z$  = rayon de courbure en un point d'ordonnée  $z$ .  
 $R$  = rayon de courbure de la nappe libre.  
 $h$  = profondeur de la veine liquide dans la section  $x$ .

La courbure  $\frac{1}{R_z}$  varie entre le radier ( $z=0$ ) et la nappe ( $z=h$ ) de  $0$  à  $\frac{1}{R}$ .

On sait que la pression en un point d'altitude  $z$  d'une veine à filets courbes est différente de la pression hydrostatique. La surpression est

$$\Delta p_z = \int_z^h \frac{v^2}{gR_z} dz = \int_z^h \frac{v^2}{g} \cdot \frac{1}{R} \left(\frac{z}{h}\right)^K dz$$

et la moyenne pour l'ensemble de la veine

$$\Delta p = \frac{1}{h} \int_0^h \Delta p_z dz.$$

Pour permettre un calcul, nous confondons dans l'expression de  $\Delta p_z$  la vitesse locale  $v$  avec la vitesse moyenne  $U$ . Il vient donc

$$\Delta p_z = \frac{U^2 h}{(K+1)gR} \left[ 1 - \left(\frac{z}{h}\right)^{K+1} \right] \quad \text{et} \quad \Delta p = \frac{U^2 h}{(K+2)gR}$$

Le mouvement étant supposé irrotationnel, nous pouvons écrire, si  $H$  est la charge totale, constante pour chaque filet

$$H = h + \frac{v^2}{2g} + \Delta p_z$$

et pour l'ensemble de la veine

$$H = h + \frac{U^2}{2g} + \Delta p.$$

Nous supposons la courbure de la nappe suffisamment faible pour pouvoir poser

$$\frac{1}{R} = \frac{d^2 h}{dx^2}.$$

En introduisant  $k^3 = \frac{q^2}{g}$ , où  $k$  est la profondeur critique et  $q = U \cdot h$  le débit par unité de largeur du canal, nous obtenons

$$\Delta p = \frac{k^3}{(k+2)h} \cdot \frac{d^2 h}{dx^2}.$$

En portant cette valeur dans l'expression de Bernoulli, nous arrivons à l'équation différentielle

$$\frac{d^2 h}{dx^2} = \frac{(K+2)h}{k^3} \left[ H - h - \frac{k^3}{2h^2} \right].$$

Multiplions les deux membres de cette équation par  $dh$ , puis intégrons entre deux sections  $x_0$  et  $x$ . En ces points, le tirant est respectivement de  $h_0$ ,  $h$ , et la pente de la nappe de

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dx_0} = \text{tg } \varphi \quad \text{et} \quad \frac{dh}{dx} \\ \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{dh}{dx}\right)^2 - \text{tg}^2 \varphi \right] = \\ = \frac{K+2}{k^3} \left( H \cdot \frac{h^2 - h_0^2}{2} - \frac{h^3 - h_0^3}{3} - \frac{k^3}{2} \lg \frac{h}{h_0} \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Appliquons l'équation 1) à l'étude de la partie de la veine située à l'aval de la vanne. Introduisons les conditions aux limites : (fig. 1)

$$\begin{aligned} x_0 = \infty, \quad h_0 = h_2, \quad \text{tg } \varphi = 0 \quad (\text{point à l'infini aval}) \\ x = s, \quad h = a, \quad \frac{dh}{dx} = \text{tg } \alpha \quad (\text{point de détachement}). \end{aligned}$$

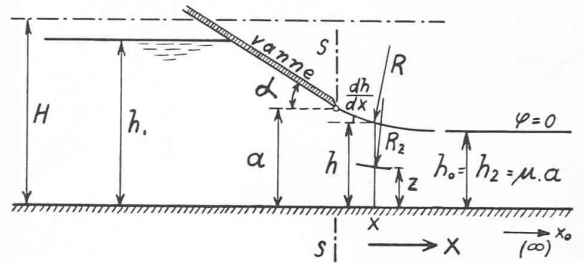


Fig. 1.

D'autre part, les expériences nous ont conduit à donner à l'exposant  $K$  la valeur 2. L'équation devient donc

$$\text{tg}^2 \alpha = \frac{4}{k^3} \left[ H(a^2 - h_2^2) - \frac{2}{3}(a^3 - h_2^3) + k^3 \lg \frac{h_2}{a} \right].$$

Les données étant l'ouverture  $a$  de la vanne d'inclinaison  $\alpha$ , et la charge  $H$ , le facteur de contraction

$$\mu = \frac{h_2}{a}$$

s'obtiendra en exprimant dans la relation précédente  $k$  et  $h_2$  en fonction de  $\mu$  et des données :

$$q = [2g(H - h_2)]^{1/2} \cdot h_2 \quad k^3 = \frac{q^2}{g} = 2h_2^2(H - h_2).$$

Nous parvenons finalement à la relation cherchée du facteur de contraction

$$\mu = f\left(\frac{H}{a}, \alpha\right)$$

qui s'exprime par

$$\begin{aligned} \text{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\mu^2(n-\mu)} \left[ 2n(1-\mu^2) - \frac{4}{3}(1-\mu^3) \right] + 4 \lg \mu \\ \text{avec } n = \frac{H}{a}. \end{aligned} \quad (23)$$

Pour une retenue infiniment élevée, elle devient

$$\text{tg}^2 \alpha = \frac{2}{\mu^2} - 2 + 4 \lg \mu. \quad (23 \text{ bis})$$

La fonction  $\mu$  est représentée sur la figure 4.  $\mu$  est porté en ordonnée,  $n$  en abscisse, tandis que l'angle  $\alpha$  intervient comme paramètre.

Le facteur de contraction théorique  $\mu$  diminue constamment avec la charge. Il en est de même des valeurs observées, excepté lorsque le rapport  $H : a$  se rapproche de 1,5 (régime critique), limite pour laquelle le niveau à l'amont de la vanne est égal à  $a$  et par conséquent  $\mu$  égal à 1 (fig. 2).

L'expérience montre aussi que le débit, après avoir atteint pour un rapport  $\frac{H}{a} = l$  la valeur du débit critique,  $q_c = a(ag)^{1/2}$ , ne descend plus guère au-dessous

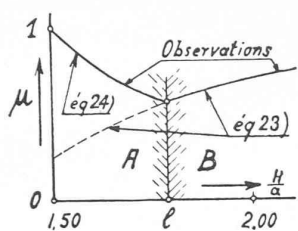


Fig. 2.

Coefficient de contraction  $\mu$  et débit spécifique  $q$  donnés en fonction du rapport  $\frac{H}{a}$  pour  $\frac{H}{a}$  voisin de 1,50.

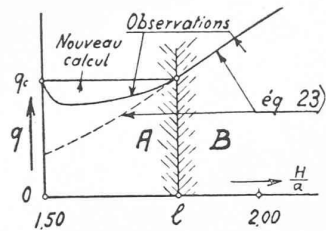


Fig. 3.

de cette valeur, pour reprendre la valeur  $q_c$  lorsque  $\frac{H}{a} = 1,5$  (fig. 3).

En complément à notre formule 23, non valable dans l'intervalle  $\frac{H}{a} = l$  à  $\frac{H}{a} = 1,5$ , nous donnons une nouvelle expression de  $\mu$ . Si le débit reste constant dans cet intervalle (hypothèse plus ou moins vérifiée par l'expérience), nous pouvons écrire la formule de Bernoulli :

$$H = h + \frac{q_c^2}{h^2} \frac{1}{2g} = h + \frac{a^3}{2h^2}$$

$$\frac{H}{a} = \frac{h_1}{a} + \frac{a^2}{2h_1^2} = \frac{h_2}{a} + \frac{a^2}{2h_2^2} = \mu + \frac{1}{2\mu^2}$$

où  $h_1$  et  $h_2$  sont les deux valeurs que peut prendre  $h$  pour une valeur déterminée de  $H$ , l'une caractérisant le régime amont tranquille, l'autre le régime aval torrentiel (fig. 5). L'expression de  $\mu$  prend alors la forme :

$$\mu = \left( \frac{h_1}{a} + \mu \right)^{\frac{1}{2}} \frac{a}{h_1} \cdot 2^{-\frac{1}{2}} \tag{24}$$

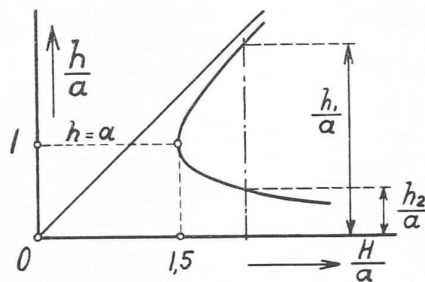


Fig. 5.

Nous adoptons donc l'équation 24 pour le domaine A et conservons les expressions (23), (23 bis) pour le domaine B (fig. 2 et 3). Les résultats ainsi calculés sont reportés à la fig. 4 où l'on trouvera aussi les coefficients de Koch. Ils sont légèrement supérieurs aux nôtres<sup>1</sup>.

Nous avons limité ce premier calcul au cas de faibles inclinaisons de la vanne. Pour des inclinaisons plus fortes, les hypothèses que nous avons mises à la base de notre calcul ne se justifient plus dans la même mesure. Par contre la méthode hydrodynamique que nous donnons ci-après nous fournira la contraction pour une inclinaison quelconque. Nous comparerons alors l'ensemble de nos résultats aux observations effectuées en laboratoire.

<sup>1</sup> *Bewegung des Wassers*, par KOCH-CARSTANJEN ; éd. J. Springer, Berlin, 1926.

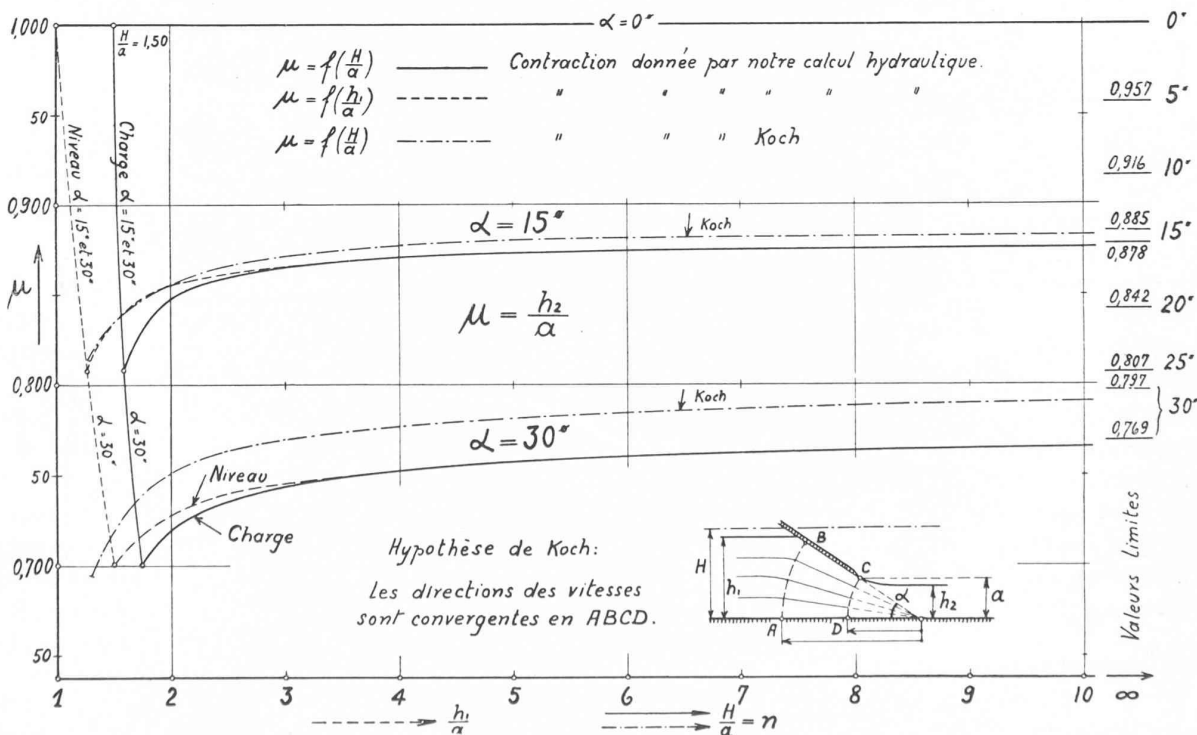


Fig. 4. — Coefficients de contraction  $\mu$  donnés en fonction de la charge et du niveau amont.

## II. Détermination du coefficient de contraction par la méthode hydrodynamique.

### 1. Généralités.

On sait que les équations de l'hydrodynamique ne peuvent être intégrées que moyennant un certain nombre d'hypothèses.

Nous avons vu qu'en régime dénoyé le mouvement d'une veine à son passage sous une vanne pouvait être considéré comme irrotationnel. D'autre part le champ d'attraction terrestre n'intervient guère ici et cela d'autant moins que la retenue causée par la vanne est plus élevée. Nous négligerons son effet, ce qui revient à admettre la vitesse constante sur la nappe libre.

La théorie hydrodynamique des jets plans peut donc s'appliquer. Elle considère la surface de la nappe à l'aval de la vanne comme surface de discontinuité entre deux milieux, sur laquelle la vitesse est constante. Cette hypothèse ne conduit à des résultats vérifiés par l'expérience que si la ligne de discontinuité sépare deux fluides très différents, par exemple un liquide et un gaz, ce qui est le cas en régime dénoyé. Au contraire, lorsque le jet s'écoule dans le même fluide, il se forme un sillage avec absorption d'énergie.

Considérons une veine contractée par une vanne, le régime à l'aval étant torrentiel (fig. 6).

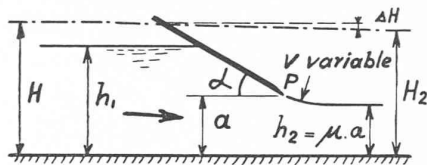


Fig. 6a. — Phénomène tel qu'il se produit en réalité.

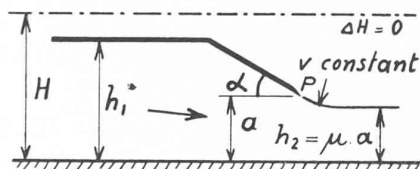


Fig. 6b. — Figure précédente schématisée et simplifiée en vue du calcul.

L'expérience fait ressortir que si la retenue est élevée, la nappe amont est parfaitement horizontale. En revanche, si la retenue est peu élevée, c'est-à-dire lorsque la vitesse d'approche est grande, la nappe se relève légèrement à proximité de la vanne. Au contact de la vanne, la vitesse n'est pas nulle. Il s'ensuit des pertes de charge, d'ailleurs peu importantes, que nous pouvons négliger. Nous assimilons ainsi le mouvement à celui d'un jet plan irrotationnel.

### 2. Etablissement de la forme générale de la fonction d'écoulement.

Lorsque le mouvement d'un fluide est plan et irrotationnel, c'est-à-dire lorsque sa vitesse ne dépend que de

deux variables  $x, y$  et que le rotationnel de la vitesse (vecteur tourbillon) est nul en tout point, on peut représenter le mouvement comme suit :

On considère le plan  $(x, y)$  comme plan de la variable complexe  $z = x + i \cdot y$ . Le mouvement du fluide est alors entièrement défini par une fonction

$$f(z) = f(x + i \cdot y) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$$

que l'on ne connaît en général pas *a priori*, mais qui se trouve déterminée par les conditions imposées au fluide (points où la vitesse est connue par son intensité, points où elle est connue par sa direction, etc.).

La fonction  $\varphi(x, y)$  s'appelle *potentiel des vitesses* et la fonction  $\psi(x, y)$ , *fonction de courant*. Les courbes  $\varphi = C$  sont les lignes équipotentielle et les courbes  $\psi = C$  les lignes de courant.

Les composantes  $u$  et  $v$  de la vitesse  $V$  sont données en un point  $(x, y)$  par les relations :

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{array} \right.$$

$\varphi$  et  $\psi$  satisfont ainsi à l'équation de Laplace :  $\Delta \varphi = 0$ ,  $\Delta \psi = 0$ ; ce sont des fonctions harmoniques.

Il résulte des relations précédentes que les vecteurs vitesses sont tangents aux lignes de courant et normaux aux lignes équipotentielles. Par conséquent les deux fonctions  $\varphi = C$  et  $\psi = C$  représentent deux familles de courbes orthogonales.

Le débit  $q$  passant entre deux lignes de courant  $\psi_1$  et  $\psi_2$  est

$$q = \int_1^2 V dn = \int_1^2 (u dy - v dx) = \int_1^2 \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} dy + \frac{\partial \psi}{\partial x} dx \right) = \psi_2 - \psi_1.$$

où  $V$  est l'intensité du vecteur vitesse et  $dn$  un élément de ligne équipotentielle.

Supposons maintenant que l'on effectue une transformation du plan  $z$  dans le plan  $z_1$ ,  $\varphi_1$  et  $\psi_1$  étant aussi harmoniques.

$$z = f_1(z_1) = \varphi_1(x_1, y_1) + i\psi_1(x_1, y_1).$$

On démontre alors que la fonction  $f(z)$  en devenant  $F(z_1) = f[f_1(z_1)]$  jouit encore des mêmes propriétés dans le plan  $z_1$  que  $f(z)$  dans le plan  $z$ .

Ainsi les deux familles de courbes  $\varphi = C$  et  $\psi = C$  se transforment en deux familles orthogonales  $\Phi = C$  et  $\Psi = C$  de façon qu'à une courbe du plan  $z$  corresponde une courbe bien déterminée du plan  $z_1$  et réciproquement. Une telle transformation est dite *conforme* (conserve les angles). Elle permet souvent de ramener un écoulement compliqué à une figure d'écoulement plus simple et qui fait mieux ressortir les données du problème. Ce sont ces propriétés que nous utiliserons par la suite.

Faisant abstraction de la pesanteur, nous considérons le fond du chenal comme étant l'axe d'un jet symétrique du plan  $z = x + i \cdot y$  (fig. 7).

La fonction

$$f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y) \quad (4)$$

définit l'écoulement dont nous connaissons déjà les trois lignes de courant suivantes :

- $\psi = 0$  Parois inférieures et limite inférieure du jet.
- $\psi = q/2$  Axe de symétrie si  $q$  est le débit total passant entre les deux parois.
- $\psi = q$  Parois supérieures et bord supérieur du jet.

Nous admettons qu'aux points de détachement  $P_1$  et  $P_2$  le potentiel est nul.

Au lieu de représenter la fonction  $f(z)$  dans le plan  $z = x + i \cdot y$ , nous pouvons représenter la fonction  $z(f)$  dans le plan  $f = \varphi + i\psi$  (fig. 7).

D'autre part on peut toujours choisir la constante de Bernoulli de façon que la vitesse  $V$  soit égale à l'unité sur la ligne du jet. La continuité s'exprime alors par

$$\frac{q}{2} = h_1 \cdot V_\infty = h_2 \cdot 1 = h_2.$$

On sait en outre que

$$w = u - i \cdot v \text{ (conjugué de la vitesse) est égal à } \frac{df}{dz}.$$

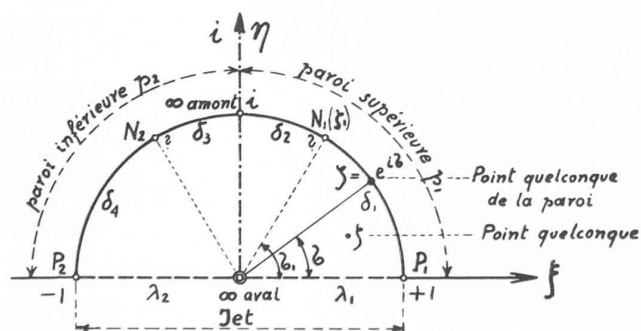
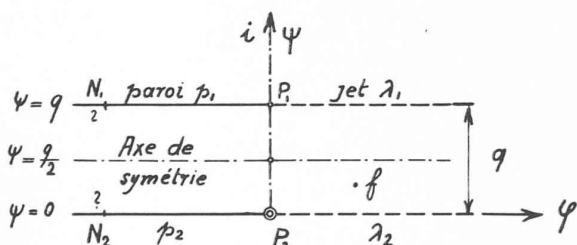
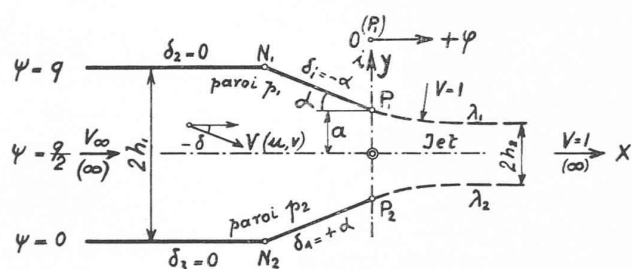


Fig. 7.

Plan  $z = x + iy$ ; plan  $f = \varphi + i\psi$  et plan  $\zeta = \xi + i\eta$ .

Cette forme ne fait pas ressortir explicitement ce que nous connaissons de la vitesse le long des parois, savoir sa direction, ni le long de la ligne de jet, savoir son intensité.

Nous pouvons introduire une nouvelle variable  $\omega$  telle que sa partie réelle  $\delta$  représente la direction et sa partie imaginaire  $\tau$  la grandeur de la vitesse ou une fonction de cette intensité :

$$\omega = \delta + i\tau \quad (5)$$

Exprimons encore la vitesse  $w$  à l'aide de sa grandeur  $V$  et de son argument  $-\delta$ .

$$w = V \cdot e^{-i\delta}.$$

Cherchons à donner à cette fonction la forme de l'équation (5) :

$$i \cdot \lg w = \delta + i \cdot \lg V.$$

Nous voyons qu'en posant

$$\omega = i \cdot \lg w$$

la variable  $\omega$  existe telle que nous l'avons définie, et nous avons :

$$\tau = \lg V.$$

Si l'on connaît la fonction  $\omega(z)$  ou  $\omega(f)$ , on peut par les transformations suivantes remonter aux fonctions  $z(f)$  ou  $f(z)$ .

$$\omega = e^{-i\omega(f)} = \frac{df}{dz}$$

$$z - z_0 = \int_{f_0}^f \frac{df}{w(f)} = \int_{f_0}^f e^{i\omega(f)} df. \quad (6)$$

En vertu de cette dernière équation, le problème sera résolu, car elle établit la relation entre  $z$  et  $f$ .

Tout revient maintenant à déterminer la fonction  $\omega$ , dont nous connaissons certaines valeurs et certaines propriétés sur les bords et sur l'axe de symétrie de l'écoulement.

Nous pourrions l'étudier dans le plan  $z$  ou dans le plan  $f$ , mais ceci n'est pas possible car :

- 1° Dans le plan  $z$ , on ne connaît pas *a priori* la forme du jet.
- 2° Dans le plan  $f$  n'apparaît pas l'inclinaison des parois (fig. 7).

Nous recourrons à une transformation des plans  $f$  ou  $z$ , telle que les lignes de jet soient isolées des parois, ce qui nous permettra de faire ressortir indépendamment la grandeur de la vitesse sur les lignes du jet et la direction de la vitesse sur les parois.

Introduisons la variable

$$\zeta = \xi + i\eta \quad (7)$$

telle que le champ de l'écoulement du plan  $z$  corresponde à un demi-cercle de rayon unité du plan  $\zeta$ , ces domaines se correspondant comme suit :

Les parois deviennent la demi-circonférence, et les lignes de jet le diamètre (fig. 7). On démontre que le passage d'un domaine dans l'autre est parfaitement défini si l'on se donne sur le contour 3 paires de points correspondants, soit, pour les plans  $z$  et  $\zeta$  :

$P_1$	$P_2$	$\infty$ aval
$\zeta = 1$	$\zeta = -1$	$\zeta = 0$

Le passage du plan  $f$  au plan  $\zeta$  se fait par la transformation suivante :

$$f = \varphi + i\psi = \frac{q}{\pi} \lg \left[ -\frac{1}{2} \left( \zeta + \frac{1}{\zeta} \right) \right] \quad (8)$$

la définition du  $\lg$  est telle qu'il lui correspond  $\psi = 0$  sur la paroi  $p_2$ .

Il est facile de vérifier la correspondance des contours des domaines entre ces deux plans.

Par exemple, pour  $P_1$ , c'est-à-dire  $\zeta = 1$

$$f = \frac{q}{\pi} \lg \left[ -\frac{1}{2} (1 + 1) \right] = \frac{q}{\pi} \lg (-1) = \frac{q}{\pi} [\lg 1 + i\pi] = iq$$

$$\varphi = 0 \qquad \psi = q.$$

Il s'agit maintenant de déterminer la fonction  $\omega(\zeta)$  par les propriétés que nous connaissons, savoir :

La fonction  $\omega(\zeta)$  est réelle sur le diamètre, régulière aux points intérieurs. Sur des arcs de la demi-circonférence, de longueurs encore indéterminées, la partie réelle de  $\omega$  prend des valeurs données (inclinaison des parois) ; elle est une fonction finie et continue, à l'exclusion d'un nombre limité de points, correspondant aux coudes des parois et aux points à l'infini. Aux points  $i$  et  $0$  elle doit satisfaire à :

$$\omega(i) = i \lg V$$

$$\omega(0) = 0.$$

Prolongeons la fonction  $\omega$  définie dans le demi-cercle supérieur  $C_1$  dans le demi-cercle inférieur  $C_2$ . Comme les deux domaines  $C_1$  et  $C_2$  sont symétriques par rapport à un axe ( $\xi$ ) et que  $\omega$  est réel sur cet axe,  $\omega$  en des points symétriques à cet axe, a des parties réelles identiques et des parties imaginaires opposées (fig. 8). La fonction  $\omega$  est donc continue dans tout le cercle et sur toute la circonférence, à l'exception d'un nombre fini de points. Sur la circonférence, la partie réelle de  $\omega$  sera donc identique en des points symétriques par rapport à l'axe  $\xi$ .

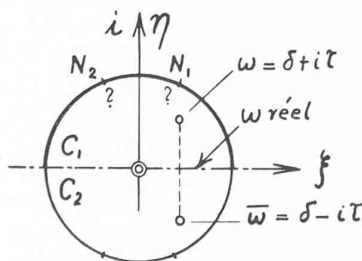


Fig. 8. — Plan  $\zeta = \xi + i\eta$ .

Notre problème se ramène ainsi au suivant, en supposant provisoirement connue la position de  $N_1 - N_2$  sur la circonférence :

Construire une fonction  $\omega$  à l'intérieur d'un cercle dont la partie réelle prend des valeurs données sur la circonférence. Ce problème est bien connu et a été résolu par Schwarz <sup>1</sup>.

U. CISOTTI. « *Idromeccanica piana I* » p. 14.

La position de  $N$  dans le plan  $\zeta$  sera déterminée plus loin en exprimant que dans le plan  $z$ , sa cote est de  $h_1$  au-dessus du radier.

La demi-circonférence  $(1, i, -1)$  du plan  $\zeta$  est décomposée en quatre parties à l'aide des points de division suivants : (fig. 7)

$\zeta_0 = +1$	détachement $P_1$ .	$\sigma_0 = 0$
$\zeta_1 = + e^{i\sigma_1}$	coude $N_1$ de la paroi $p_1$ .	$\sigma_1$
$\zeta_2 = + i$	infini amont.	$\sigma_2 = \frac{\pi}{2}$
$\zeta_3 = + e^{i\sigma_3}$	coude $N_2$ de la paroi $p_2$ .	$\sigma_3 = \pi - \sigma_1$
	$\zeta_3 = -\frac{1}{\zeta_1}$	
$\zeta_4 = -1$	détachement $P_2$ .	$\sigma_4 = \pi$ .

Dans la fonction  $\omega = \delta + i\tau$ ,  $\zeta$  doit prendre des valeurs constantes  $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$  sur les 4 arcs de la demi-circonférence.

$$\delta_1 = -\alpha \qquad \delta_2 = \delta_3 = 0 \qquad \delta_4 = +\alpha.$$

(A suivre.)

## NÉCROLOGIE

**Louis Villard, père.**

1856-1937.

Louis Villard, architecte, allait célébrer son 81<sup>e</sup> anniversaire lorsque la mort le surprit à son domicile de Riant-Coteau, à Clarens, où il s'endormit paisiblement après une courte maladie, le 29 juin dernier.

Il avait débuté comme architecte à l'Exposition nationale suisse de Zurich, pour s'établir ensuite définitivement à Montreux après quelques années d'activité dans le bureau de MM. Chaudet frères.

Actif, entreprenant, aimant l'indépendance, son bureau d'architecture connut la grande vogue du temps de la prospérité montreuusienne. On lui doit un nombre important d'édifices de tous genres et de toutes destinations. Si son architecture n'est pas très originale, elle est du moins très variée et toujours correcte. Si l'on tient compte du goût désordonné pour les fioritures et les surcharges qui sévissait trop généralement vers 1900, on doit reconnaître que L. Villard avait su y résister dans une louable mesure, sans pour autant donner dans l'académisme. A ce point de vue beaucoup des immeubles construits d'après ses plans peuvent être considérés comme très réussis, par la sobriété des lignes et leur parfaite adaptation au milieu ambiant.

Mais c'est surtout par l'excellence de leur construction, l'utilisation toujours rationnelle et pratique de la technique, et l'heureuse distribution des intérieurs que L. Villard a prouvé ses qualités d'architecte.

On peut citer, entre autres : Les hôtels « Suisse », « Excelsior », « Eden », à Montreux, des Avants ; la plupart des gares et bâtiments administratifs du *M. O. B.*, de nombreux immeubles locatifs à Montreux, notamment les 11 bâtiments de la Société immobilière de l'Avenue des Alpes, beaucoup de villas, etc.

L. Villard avait toujours pris une part active aux travaux et manifestations de la *S. I. A.* et de la *S. V. I. A.* et s'était occupé avec entrain de l'organisation des réceptions à Montreux, à l'occasion des assemblées générales de Lausanne.

Il s'était fait de nombreux amis parmi ses collègues architectes et ingénieurs de la *S. I. A.*, qui avaient pu apprécier son caractère ouvert, son entrain, sa vive intelligence et son bon sens.

Né à Lausanne, originaire de Daillens, c'était un Vaudois cent pour cent. Citoyen actif et patriote il avait largement collaboré au développement de sa ville d'élection, Montreux ;