

**Zeitschrift:** Bulletin technique de la Suisse romande  
**Band:** 67 (1941)  
**Heft:** 19

**Artikel:** Théorie de l'équilibre des corps élasto-plastiques  
**Autor:** Colonnetti, Gustave  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-51345>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 15.03.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# BULLETIN TECHNIQUE

## DE LA SUISSE ROMANDE

Paraissant tous les 15 jours

### ABONNEMENTS :

Suisse : 1 an, 13.50 francs

Etranger : 16 francs

Pour sociétaires :

Suisse : 1 an, 11 francs

Etranger : 13.50 francs

Prix du numéro :

75 centimes.

Pour les abonnements  
s'adresser à la librairie  
F. Rouge & C<sup>ie</sup>, à Lausanne.

Organe de la Société suisse des ingénieurs et des architectes, des Sociétés vaudoise et genevoise des ingénieurs et des architectes, de l'Association des anciens élèves de l'Ecole d'ingénieurs de l'Université de Lausanne et des Groupes romands des anciens élèves de l'Ecole polytechnique fédérale. —

COMITÉ DE PATRONAGE. — Président: R. NEESER, ingénieur, à Genève; Vice-président: M. IMER, à Genève; secrétaire: J. CALAME, ingénieur, à Genève. Membres: *Fribourg*: MM. L. HERTLING, architecte; A. ROSSIER, ingénieur; *Vaud*: MM. F. CHENAUX, ingénieur; E. ELSKES, ingénieur; EPITAUX, architecte; E. JOST, architecte; A. PARIS, ingénieur; CH. THÉVENAZ, architecte; *Genève*: MM. L. ARCHINARD, ingénieur; E. ODIER, architecte; CH. WEIBEL, architecte; *Neuchâtel*: MM. J. BÉGUIN, architecte; R. GUYE, ingénieur; A. MÉAN, ingénieur; *Valais*: M. J. DUBUIS, ingénieur; A. DE KALBERMATTEN, architecte.

RÉDACTION: D. BONNARD, ingénieur, Case postale Chauderon 475, LAUSANNE.

### Publicité : TARIF DES ANNONCES

Le millimètre  
(larg. 47 mm.) 20 cts.  
Tarif spécial pour fractions  
de pages.

Rabais pour annonces  
répétées.



ANNONCES-SUISSES s.a.

5, Rue Centrale,  
LAUSANNE  
& Succursales.

CONSEIL D'ADMINISTRATION DE LA SOCIÉTÉ ANONYME DU BULLETIN TECHNIQUE  
A. STUCKY, ingénieur, président; M. BRIDEL; G. EPITAUX, architecte; M. IMER.

SOMMAIRE : *Théorie de l'équilibre des corps élasto-plastiques*, (suite), par M. GUSTAVE COLONNETTI, membre de l'Académie Pontificale des Sciences, professeur à l'Ecole Polytechnique de Turin. — *Divers*: *Le tartre, sa destruction et les moyens de prévenir sa formation dans les chaudières industrielles et les installations de chauffage central*. — *Nécrologie*: *Alfred Michaud, ingénieur*.  
SERVICE DE PLACEMENT.

## Théorie de l'équilibre des corps élasto-plastiques

par M. GUSTAVE COLONNETTI,

Membre de l'Académie Pontificale des Sciences,  
Professeur à l'Ecole Polytechnique de Turin.

(Suite.)<sup>1</sup>

### III. Le problème de Barré de Saint-Venant.

Considérons un corps cylindrique — ou prismatique — engendré par une aire plane A de forme quelconque, qui se déplace dans l'espace; chacun des points de A décrit une droite normale à son plan.

La longueur du cylindre est, en tout cas, supposée grande par rapport à ses dimensions transversales.

On suppose en outre que toutes les forces de volume sont nulles, et que la surface latérale du cylindre, libre de toute liaison, n'est soumise à aucune force.

Le cylindre ne sera donc soumis qu'à des liaisons et des forces agissant sur ses deux bases.

On doit à Barré de Saint-Venant la solution rigoureuse du problème de l'équilibre élastique d'un tel cylindre dans un certain nombre de cas particuliers, choisis de manière à permettre d'en déduire les solutions rigoureuses ou approchées de tous les autres cas, même les plus compliqués.

Les cas particuliers, pour lesquels la solution de de Saint-Venant est rigoureuse, sont précisément ceux où tout élat-

ment de surface tracé à l'intérieur du corps, parallèlement à l'axe du cylindre, n'est soumis qu'à une tension tangentielle dans la direction de cet axe.

Nous supposons le système rapporté à un trièdre trirectangle ayant son origine au centre de gravité de l'une des bases. Les axes des  $x$  et des  $y$  seront les axes principaux d'inertie de cette base, et l'axe des  $z$  coïncidera avec l'axe géométrique du cylindre. Sur ce dernier axe, on prendra comme direction positive celle qui se dirige vers l'intérieur du corps.

Dans ces hypothèses, on devra avoir en tout point du corps

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 0 \\ \sigma_y &= 0 \\ \tau_{xy} &= 0 \end{aligned} \right\} (1)$$

Or, si le corps est isotrope, l'énergie potentielle élastique élémentaire peut s'écrire sous la forme

$$\varphi = \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \frac{1}{mE} (\sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x + \sigma_x \sigma_y) + \frac{1}{2G} (\tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{xy}^2)$$

où  $E$  est le module d'élasticité normale du matériau, et  $m$  son coefficient de contraction latérale; tandis que  $G$ , qui est lié à  $m$  et à  $E$  par la relation

$$G = \frac{1}{2} \frac{mE}{m+1}$$

prend, comme on sait, le nom de module d'élasticité tangentielle.

Par dérivation, on en déduit les expressions des composantes de déformation en fonction de celles des composantes spéciales de tension qui ne sont pas nulles

<sup>1</sup> Seconde des conférences données à Lausanne par M. le professeur Colonnetti, les 9 et 10 mai 1941, et organisées par l'Ecole d'ingénieurs de l'Université, avec le concours de l'Association des anciens élèves de l'E. I. L., de la Société vaudoise des ingénieurs et des architectes et du groupe des Ponts et Charpentes de la Société suisse des ingénieurs et des architectes. La première conférence a été publiée au *Bulletin technique* du 28 juin 1941, p. 145. (Rééd.)

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= -\frac{1}{mE} \sigma_z & \gamma_{yz} &= \frac{1}{G} \tau_{yz} \\ \epsilon_y &= -\frac{1}{mE} \sigma_z & \gamma_{zx} &= \frac{1}{G} \tau_{zx} \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E} \sigma_z & \gamma_{xy} &= 0 \end{aligned} \right\} (2)$$

Réciproquement on exprimera celles des composantes spéciales de tension qui ne sont pas nulles, en fonction des composantes de déformation, sous la forme

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= E \epsilon_z & \tau_{yz} &= G \gamma_{yz} \\ & & \tau_{zx} &= G \gamma_{zx} \end{aligned} \right\} (3)$$

Or, nous venons de dire que les solutions des problèmes de l'équilibre élasto-plastique peuvent être déduites des solutions des problèmes analogues de la théorie classique de l'élasticité, en y remplaçant tout simplement les six composantes de la déformation élastique par les six composantes de la déformation totale.

Nous aborderons donc le problème d'une façon indirecte, en nous servant des expressions que de Saint-Venant a obtenues pour les composantes

$$\epsilon_z \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx}$$

de la déformation élastique et en les attribuant aux composantes correspondantes de la déformation totale

$$\epsilon_z + \bar{\epsilon}_z \quad \gamma_{yz} + \bar{\gamma}_{yz} \quad \gamma_{zx} + \bar{\gamma}_{zx}$$

La sollicitation, qui devrait logiquement être une des données du problème, se trouvera ainsi implicitement déterminée. A l'aide des formules (3) nous pourrions en effet calculer les six caractéristiques de la sollicitation relative à une section quelconque de cote  $z$

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{N} &= \int_A \sigma_z dA \\ \mathcal{N} &= \int_A \sigma_z y dA & \mathcal{N}' &= \int_A \sigma_z x dA \\ \mathcal{Q} &= \int_A (\tau_{yz} x - \tau_{zx} y) dA \\ \mathcal{T} &= \int_A \tau_{yz} dA & \mathcal{T}' &= \int_A \tau_{zx} dA \end{aligned} \right\} (4)$$

Les sollicitations sur les bases du cylindre, c'est-à-dire sur les sections de cote  $z=0$  et  $z=l$  s'obtiendront comme des cas particuliers.

A ce propos, il faut bien remarquer que, en absence de forces de volume et d'actions s'exerçant sur la surface latérale du cylindre, les caractéristiques  $\mathcal{N}$ ,  $\mathcal{Q}$ ,  $\mathcal{T}$ ,  $\mathcal{T}'$  doivent être indépendantes de  $z$ , tandis que  $\mathcal{N}$ ,  $\mathcal{N}'$  devront être des fonctions linéaires de  $z$ , telles que

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathcal{N}}{dz} &= \mathcal{T} & \frac{d\mathcal{N}'}{dz} &= \mathcal{T}' \end{aligned} \right\} (5)$$

Et à présent voilà les quatre cas particuliers, dont la combinaison linéaire permet de remonter à la solution directe et générale du problème, c'est-à-dire à l'identification de l'état de déformation déterminé par une sollicitation extérieure tout à fait arbitraire.

*Premier cas particulier.*

Désignons par  $\lambda$  une constante très petite, et posons

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_z + \bar{\epsilon}_z &= \lambda \\ \gamma_{yz} - \bar{\gamma}_{yz} &= 0 \\ \gamma_{zx} - \bar{\gamma}_{zx} &= 0 \end{aligned} \right\} (6)$$

Des six caractéristiques de la sollicitation relative à une section quelconque de cote  $z$ , les trois dernières sont identiquement nulles. La deuxième et la troisième s'annulent également si les déformations plastiques sont telles que

$$\int_A \bar{\epsilon}_z x dA = \int_A \bar{\epsilon}_z y dA = 0$$

Il ne reste donc que la sollicitation à extension simple, définie par un effort normal  $\mathcal{N}$  en fonction duquel on peut exprimer la constante

$$\lambda = \frac{\mathcal{N} + E \int_A \bar{\epsilon}_z dA}{EA} \quad (7)$$

En substituant cette valeur de la constante dans la première des (6) on a

$$\epsilon_z + \bar{\epsilon}_z = \frac{\mathcal{N} + E \int_A \bar{\epsilon}_z dA}{EA}$$

et donc

$$\sigma_z = E \epsilon_z = \frac{\mathcal{N} + E \int_A \bar{\epsilon}_z dA}{A} - E \bar{\epsilon}_z \quad (8)$$

*Deuxième cas particulier.*

Désignons par  $\mu$  une constante très petite, et posons

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_z + \bar{\epsilon}_z &= \mu y \\ \gamma_{yz} - \bar{\gamma}_{yz} &= 0 \\ \gamma_{zx} - \bar{\gamma}_{zx} &= 0 \end{aligned} \right\} (9)$$

Cette fois encore, des six caractéristiques de la sollicitation, les trois dernières sont identiquement nulles. La première et la troisième s'annulent également si les déformations plastiques sont telles que

$$\int_A \bar{\epsilon}_z dA = \int_A \bar{\epsilon}_z x dA = 0$$

Il ne reste alors qu'une sollicitation à flexion simple, due au moment de flexion  $\mathcal{N}$  et en fonction duquel on peut exprimer la constante

$$\mu = \frac{\mathcal{N} + E \int_A \bar{\epsilon}_z y dA}{EJ} \quad (10)$$

En substituant cette valeur de la constante dans la première des (9) on a

$$\epsilon_z + \bar{\epsilon}_z = \frac{\mathcal{N} + E \int_A \bar{\epsilon}_z y dA}{EJ}$$

et donc

$$\sigma_z = E\epsilon_z = \frac{\mathfrak{N} + E \int_A \bar{\epsilon}_z y \, dA}{J} - E\bar{\epsilon}_z \quad (11)$$

Troisième cas particulier.

Soit  $\omega$  une constante très petite, et  $\psi$  une fonction harmonique (finie, continue, bien déterminée en tous les points de l'aire  $A$  et telle que sur le contour de cette aire sa dérivée, prise normalement à ce même contour, prenne des valeurs données). Posons

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_z + \bar{\epsilon}_z &= 0 \\ \tau_{yz} + \bar{\tau}_{yz} &= -\omega \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} - x \right) \\ \tau_{zx} + \bar{\tau}_{zx} &= -\omega \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} + y \right) \end{aligned} \right\} (12)$$

Admettons encore que, sur le contour, on ait

$$\bar{\tau}_{zx} \cos(nx) + \bar{\tau}_{yz} \cos(ny) = 0$$

Cette fois, des six caractéristiques de la sollicitation, les trois premières sont identiquement nulles. Les deux dernières s'annulent également si les déformations plastiques sont telles que

$$\int_A \bar{\tau}_{yz} \, dA = \int_A \bar{\tau}_{zx} \, dA = 0$$

Reste alors seulement la sollicitation à simple torsion, pour laquelle, en désignant comme d'habitude par  $J_0$  le moment d'inertie polaire par rapport au centre de gravité de la section, et en posant

$$q = \frac{J_0}{J_0 - \int_A \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} x - \frac{\partial \psi}{\partial x} y \right) \, dA}$$

on a

$$\omega = q \frac{Q + G \int_A (\bar{\tau}_{yz} x - \bar{\tau}_{zx} y) \, dA}{G J_0} \quad (13)$$

En substituant, la seconde et la troisième des (12) deviennent respectivement

$$\left. \begin{aligned} \tau_{yz} + \bar{\tau}_{yz} &= -q \frac{Q + G \int_A (\bar{\tau}_{yz} x - \bar{\tau}_{zx} y) \, dA}{G J_0} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} - x \right) \\ \tau_{zx} + \bar{\tau}_{zx} &= -q \frac{Q + G \int_A (\bar{\tau}_{yz} x - \bar{\tau}_{zx} y) \, dA}{G J_0} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} + y \right) \end{aligned} \right\}$$

Donc on a

$$\left. \begin{aligned} \tau_{yz} &= G \bar{\tau}_{yz} = \\ &= -q \frac{Q + G \int_A (\bar{\tau}_{yz} x - \bar{\tau}_{zx} y) \, dA}{J_0} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} - x \right) - G \bar{\tau}_{yz} \\ \tau_{zx} &= G \bar{\tau}_{zx} = \\ &= -q \frac{Q + G \int_A (\bar{\tau}_{yz} x - \bar{\tau}_{zx} y) \, dA}{J_0} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} + y \right) - G \bar{\tau}_{zx} \end{aligned} \right\} (14)$$

Quatrième cas particulier.

Soient  $\mu$  et  $\gamma$ , deux constantes très petites, et  $\psi$  une fonction harmonique (finie, continue, bien déterminée en tous les points de l'aire  $A$ , et telle que, sur le contour de cette aire, sa dérivée, prise normalement à ce même contour, prenne des valeurs données). Posons

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_z + \bar{\epsilon}_z &= (\mu + \gamma z) y \\ \tau_{yz} + \bar{\tau}_{yz} &= \gamma \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{2m-1}{2m} x^2 - \frac{1}{2m} y^2 \right) \\ \tau_{zx} + \bar{\tau}_{zx} &= \gamma \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{2m+1}{m} xy \right) \end{aligned} \right\} (15)$$

Admettons encore que, sur le contour, on ait

$$\bar{\tau}_{zx} \cos(nx) + \bar{\tau}_{yz} \cos(ny) = 0$$

Si l'on suppose que la section soit symétrique par rapport à celui des deux axes principaux d'inertie qui est dirigé suivant  $y$ , et si l'on admet que les déformations plastiques soient telles que

$$\int_A \bar{\tau}_{zx} \, dA = \int_A (\bar{\tau}_{yz} x - \bar{\tau}_{zx} y) \, dA = 0$$

les quatre composantes  $\mathfrak{N}, \mathfrak{N}', \mathfrak{Q}, \mathfrak{T}'$  de la sollicitation s'annulent; il ne reste qu'une sollicitation à flexion composée définie par les deux caractéristiques

$$\mathfrak{N} = E(\mu + \gamma z) J - E \int_A \bar{\epsilon}_z y \, dA$$

$$\mathfrak{T} = E \gamma J - G \int_A \bar{\tau}_{yz} \, dA$$

qui sont notoirement liées par la relation (5)

$$\frac{d\mathfrak{N}}{dz} = \mathfrak{T}$$

Cette relation exige que les déformations plastiques satisfassent encore à la condition

$$G \int_A \bar{\tau}_{yz} \, dA = \frac{d}{dz} [E \int_A \bar{\epsilon}_z y \, dA]$$

Pendant, de l'expression de  $\mathfrak{N}$ , on tire

$$\mu + \gamma z = \frac{\mathfrak{N} + E \int_A \bar{\epsilon}_z y \, dA}{E J}$$

donc

$$\epsilon_z + \bar{\epsilon}_z = \frac{\mathfrak{N} + E \int_A \bar{\epsilon}_z y \, dA}{E J} y$$

et l'on retrouve la (11)

$$\sigma_z = E\epsilon_z = \frac{\mathfrak{N} + E \int_A \bar{\epsilon}_z y \, dA}{J} y - E\bar{\epsilon}_z$$

D'une manière analogue, de l'expression de  $\bar{\tau}$  on tire

$$\bar{\tau} = \frac{\bar{\tau} + G \int_A \bar{\gamma}_{yz} dA}{E J} \quad \left. \right\} (16)$$

et en substituant

$$\bar{\gamma}_{yz} + \bar{\gamma}_{yz} = \frac{\bar{\tau} + G \int_A \bar{\gamma}_{yz} dA}{E J} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{2m-1}{2m} x^2 - \frac{1}{2m} y^2 \right)$$

$$\bar{\gamma}_{zx} + \bar{\gamma}_{zx} = \frac{\bar{\tau} + G \int_A \bar{\gamma}_{zx} dA}{E J} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{2m+1}{m} xy \right)$$

donc

$$\left. \begin{aligned} \tau_{yz} &= G \bar{\gamma}_{yz} = \\ &= \frac{\bar{\tau} + G \int_A \bar{\gamma}_{yz} dA}{2(m+1)J} \left[ m \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{2m-1}{2} x^2 - \frac{1}{2} y^2 \right] - G \bar{\gamma}_{yz} \\ \tau_{zx} &= G \bar{\gamma}_{zx} = \\ &= \frac{\bar{\tau} + G \int_A \bar{\gamma}_{zx} dA}{2(m+1)J} \left[ m \frac{\partial \psi}{\partial x} - (2m+1)xy \right] - G \bar{\gamma}_{zx} \end{aligned} \right\} (17)$$

Comme conséquence immédiate de ces calculs, on peut considérer comme acquis un double résultat de portée absolument générale; résultat qui concerne la manière suivant laquelle le phénomène de la plasticité influence d'une part l'état de déformation du corps, d'autre part son état de tension (c'est-à-dire la loi de distribution des tensions intérieures).

En fait, si l'on considère les déformations — et je parle, bien entendu, des déformations totales, somme des déformations élastiques et des déformations plastiques — on constate que le dépassement de la limite d'élasticité, et l'intervention correspondante des déformations plastiques, n'altèrent pas le phénomène du point de vue qualitatif, mais seulement du point de vue quantitatif.

Plus précisément, on constate que les choses se passent comme si :

à l'effort normal effectivement appliqué  $\mathcal{N}$  venait se substituer un effort normal fictif

$$\mathcal{N} + E \int_A \bar{\epsilon}_z dA$$

au moment de flexion effectivement appliqué  $\mathcal{M}$  venait se substituer un moment de flexion fictif

$$\mathcal{M} + E \int_A \bar{\epsilon}_z y dA$$

au moment de torsion effectivement appliqué  $\mathcal{Q}$  venait se substituer un moment de torsion fictif

$$\mathcal{Q} + G \int_A (\bar{\gamma}_{yz} x - \bar{\gamma}_{zx} y) dA$$

à l'effort tranchant effectivement appliqué  $\bar{\tau}$  venait se substituer un effort tranchant fictif

$$\bar{\tau} + G \int_A \bar{\gamma}_{yz} dA$$

Ceci explique deux faits nouveaux qui caractérisent la manière de se déformer d'un corps en équilibre élasto-plastique. A savoir que :

1. les déformations ne sont plus des fonctions linéaires des forces extérieures appliquées, mais croissent plus rapidement qu'elles ;

2. une fraction de ces déformations a un caractère permanent, c'est-à-dire subsiste même quand les forces extérieures ont cessé d'agir.

Pour ce qui est par contre de l'état de tension, il s'y manifeste un changement qualitatif qui est de la plus haute importance. On constate en effet qu'en chaque point du corps la distribution des tensions dépend, non seulement de la sollicitation extérieure et de son accroissement apparent dû à l'ensemble des déformations plastiques, mais encore, d'une manière explicite, de la grandeur des déformations plastiques qui se sont produites en ce point.

On devine sans difficulté que cette dépendance entre l'état de tension et la distribution des déformations plastiques peut avoir, en pratique, une grande importance et de très remarquables conséquences.

En effet, non seulement les valeurs des tensions peuvent se trouver changées, mais aussi les positions où ces valeurs deviennent maxima.

On peut même prévoir, d'une manière absolument générale, qu'il y aura une limitation des valeurs des tensions intérieures là où le matériau, suivant les lois de la théorie classique, aurait été soumis à des fatigues dépassant la limite d'élasticité.

De là un soulagement au point où la situation menaçait de devenir dangereuse.

A cette limitation devra naturellement correspondre une augmentation des valeurs des tensions intérieures dans des autres régions du corps, et plus précisément dans les régions qui auraient été soumises à des fatigues inférieures, c'est-à-dire qui n'atteignent pas encore la limite d'élasticité du matériau.

Dans ces régions, le matériau se trouvera ainsi automatiquement appelé à mieux contribuer à la résistance de l'ensemble.

#### IV. Une nouvelle théorie des poutres fléchies.

Ces faits sont susceptibles d'être précisés théoriquement d'une manière fort simple, et d'être contrôlés expérimentalement avec la plus grande exactitude, dans le cas particulièrement intéressant des poutres fléchies.

On peut en effet démontrer que, dans ce cas, lorsqu'on dépasse la valeur du moment de flexion pour laquelle les tensions, calculées d'après la théorie de l'élasticité, atteignent sur les bords de la section la limite d'élasticité du matériau, ces tensions cessent de s'accroître, tandis qu'un accroissement plus rapide se vérifie dans les régions situées à l'intérieur de la section, où les tensions sont moindres et la limite d'élasticité est encore loin d'être atteinte.

Considérons en effet une section droite d'une poutre fléchie (fig. 5).

Pour nous en tenir au cas le plus général, nous imaginerons

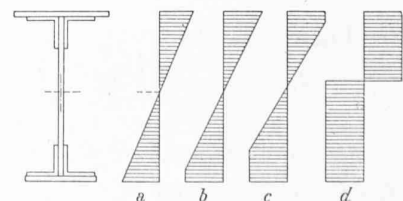


Fig. 5.

que la section soit dissymétrique, excepté par rapport à l'axe de sollicitation — tracé sur le plan de la section du plan qui contient la résultante des forces — plan de sollicitation que nous supposons coïncider avec l'un des axes principaux centraux d'inertie de la section, et que nous choisirons comme axe des  $y$ .

Nous admettrons en plus que les limites d'élasticité du matériau en traction et en compression puissent être différentes; et nous désignerons les valeurs correspondantes des tensions unitaires par  $e$  et par  $e'$ .

Nous représenterons par  $M_e$  la valeur du moment de flexion pour laquelle une de ces deux limites est atteinte pour la première fois sur l'un des bords de la section.

C'est là évidemment la valeur qui marque la fin du régime élastique et l'apparition des premières déformations plastiques.

La distribution des tensions intérieures est, dans ces conditions, celle qui est représentée par le diagramme placé, dans notre figure, immédiatement à droite de la section.

Le dernier diagramme, à l'extrême droite de la figure, se rapporte par contre au cas limite où la section tout entière serait passée à l'état plastique.

En ce cas, on doit avoir en effet une distribution uniforme de tensions d'intensité égale à  $e$  en tous les points de la partie tendue de la section, et une distribution de tensions également uniformes, d'intensité égale à  $e'$ , en tous les points de la partie comprimée.

Ce cas limite a, depuis longtemps, attiré l'attention des savants. A son égard les opinions sont toutefois discordantes.

Il y a des auteurs — tels que Bleich et Zhudin — qui considèrent cet état comme le terme de la phase élasto-plastique de la résistance; d'autres — comme Prager — estiment qu'il pourrait succéder immédiatement à la phase de la parfaite élasticité.

Personnellement, je crois qu'il faut regarder la valeur du moment de flexion qui correspond à cet état, comme une valeur limite vers laquelle le moment tend bien, mais d'une manière asymptotique, et pour des déformations plastiques croissant indéfiniment.

Cela revient à dire qu'en réalité cette valeur ne pourra jamais être atteinte, puisque aucun matériau — quelque grande que soit sa ductilité — ne peut subir des déformations croissant indéfiniment sans se rompre.

Quoi qu'il en soit, nous désignerons par  $M_p$  la valeur limite du moment de flexion ainsi définie.

Il est évident que, pour des valeurs de  $M$  comprises entre  $M_e$  et  $M_p$  deux cas peuvent se présenter.

En effet les déformations plastiques pourront être toutes de même signe, c'est-à-dire être toutes localisées dans une région unique située d'un côté bien déterminé de l'axe neutre et, plus précisément, au voisinage immédiat du bord de la section sur lequel la limite élastique aura d'abord été atteinte.

Ou bien il pourra se faire qu'il y ait des déformations plastiques des deux signes, localisées dans deux régions situées de part et d'autre de l'axe neutre, à la proximité des deux bords opposés de la section.

D'une manière générale, le premier cas se produira pour des valeurs de  $M$  comprises entre  $M_e$  et une valeur intermédiaire  $M_i$  et le second sera réalisé pour des valeurs de  $M$  comprises entre  $M_i$  et  $M_p$ .

Le problème fondamental qu'il s'agit de résoudre est évidemment celui de la détermination de la droite — ou des droites — de séparation de la région en régime élastique, de la région — ou des régions — où ont pris naissance les déformations plastiques, et cela pour chaque valeur de  $M$  comprise entre les limites dont nous venons de parler.

Or nous savons que, dans la région en régime élastique, les tensions doivent toujours être des fonctions linéaires de  $y$ .

Nous avons admis, d'autre part, que dans les régions où ont pris naissance des déformations plastiques, les tensions se maintiennent constantes, et égales aux limites d'élasticité respectives.

Grâce à cela, le problème se trouve parfaitement déterminé dans les deux cas, et on arrive à le résoudre avec des procédés graphiques très simples.

Dans le premier cas nous aurons recours à un petit artifice. Nous imaginerons de superposer, à l'état de tension inconnu que nous voulons étudier, une distribution auxiliaire de tensions, uniforme sur toute la section et d'intensité précisément égale à la limite élastique changée de signe (fig. 6).

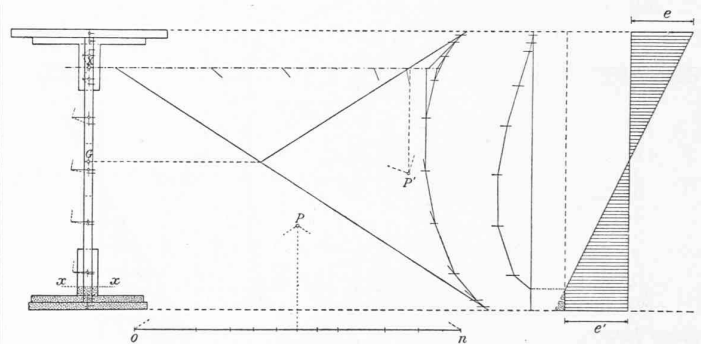


Fig. 6.

La tension résultante devra alors être identiquement nulle dans toute la région où se sont produites des déformations plastiques.

Dans la région en régime élastique, au contraire, on obtiendra une distribution linéaire de tensions dont l'intensité, sur chaque élément d'aire, sera proportionnelle à la distance de l'élément même à l'axe de séparation que nous sommes en train de chercher.

Cette distribution de tensions devra naturellement avoir, pour résultante, la résultante du couple de moment  $M$  initialement appliqué à la section et de la force — appliquée au centre de gravité — qui équivaut à la distribution auxiliaire.

Le point d'application  $X$  de cette résultante — que nous savons donc déterminer immédiatement — devra être le centre des moments statiques, ou si l'on préfère, l'antipode de l'axe de séparation par rapport à l'ellipse centrale d'inertie de cette portion de la section — limitée par ce même axe — qui est restée en régime élastique.

Ce résultat nous permet de déterminer aussitôt l'axe de séparation par des procédés graphiques usuels.

Il suffit de partager l'aire de la section donnée en un nombre suffisant de bandes élémentaires par des cordes normales à l'axe des  $y$ , considérer l'aire de chacune des bandes comme une force parallèle aux cordes, relier ces forces par un polygone funiculaire, et en déduire les moments statiques respectifs par rapport à la normale à l'axe des  $y$  menée par  $X$ .

Ensuite on reliera ces moments statiques — considérés à leur tour comme des forces parallèles aux cordes — par un second polygone funiculaire, en ayant soin de partir, dans sa construction, du bord en régime élastique, et de procéder dans l'ordre vers le bord auprès duquel se sont produites les déformations plastiques.

Le point où ce second polygone funiculaire coupera son premier côté déterminera la position de l'axe de séparation.

Ayant ainsi délimité la région en régime élastique, on pourra facilement calculer la valeur moyenne de la tension sur cette partie de la section.

Si l'on tient compte alors que cette valeur moyenne devra coïncider avec la valeur locale en correspondance du centre de gravité de cette même partie de la section, on pourra aussitôt tracer un diagramme des tensions duquel on déduira facilement la représentation de l'état de tension réel en éliminant la distribution auxiliaire des tensions par une translation convenable de la droite de référence.

Dans le deuxième cas il est, par contre, avantageux de procéder par différence en partant de l'état limite correspondant à l'hypothèse où la plasticité serait étendue à toute la section (fig. 7).

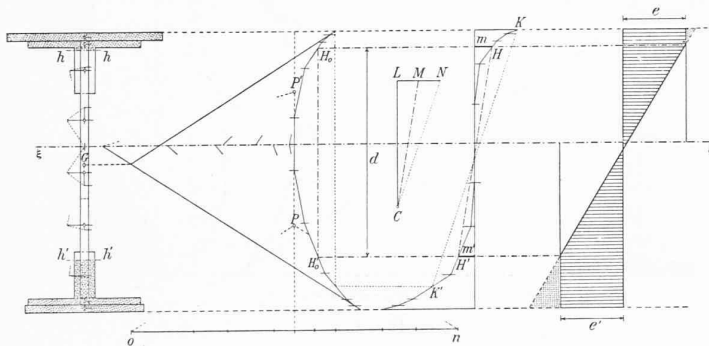


Fig. 7.

Le diagramme des tensions, pour une valeur quelconque  $M$  du moment de flexion, diffère en effet de celui qui correspond au moment limite  $M_p$  par deux distributions linéaires de tensions, représentées graphiquement par deux triangles ayant leurs bases sur la droite  $\xi\xi$  qui, à l'état limite, sépare la partie tendue de la section de la partie comprimée, et leurs sommets sur les droites de séparation cherchées.

Observons, en passant, que la position de cette droite est dans chaque cas particulier parfaitement définie, et peut être facilement précisée puisqu'elle doit partager l'aire de la section en parties inversement proportionnelles aux limites d'élasticité  $e$  et  $e'$ .

Or, puisque la différence entre le couple de moment  $M_p$  et celui de moment  $M$  devra nécessairement être encore un couple, il s'ensuit que les deux distributions triangulaires de tensions dont nous venons de parler, considérées séparément, doivent admettre des résultantes égales et contraires.

Ce qui revient à dire que les moments statiques des aires auxquelles ces distributions se rapportent, pris par rapport aux droites de séparation respectives, doivent être égaux.

Adoptant alors la subdivision habituelle en bandes élémentaires au moyen de cordes normales à l'axe des  $y$ , et reliant les aires des différentes bandes, considérées comme des forces parallèles aux cordes, par un polygone funiculaire, on considérera les deux branches de celui-ci qui sont situées de part et d'autre de la droite  $\xi\xi$  en prenant le côté commun comme droite de référence.

On pourra dès lors affirmer que la condition nécessaire et suffisante pour que deux droites  $hh$  et  $h'h'$ , normales à l'axe des  $y$ , puissent jouer le rôle de droites de séparation pour un

moment  $M$  donné, est que les segments qu'interceptent sur elles les deux branches du polygone soient égaux ; ou, ce qui revient au même, que la droite qui unit les points  $H_0$  et  $H'_0$  où  $hh$  et  $h'h'$  vont couper les deux branches du polygone soit parallèle à la droite de référence.

Reste à calculer la valeur du moment  $M$ .

Pour cela nous remarquerons que ce moment peut toujours s'obtenir par différence entre le moment limite  $M_p$  et la somme des moments des deux distributions de tensions définies ci-dessus par rapport à une droite quelconque normale à l'axe des  $y$ , par exemple par rapport à la droite  $\xi\xi$ .

Il s'agit donc simplement de calculer les moments de second ordre des aires élémentaires auxquelles se rapportent ces distributions de tensions, par rapport aux droites de séparation respectives et à la droite fixe  $\xi\xi$ .

On pourra donc se servir du polygone funiculaire déjà tracé pour en déduire les moments statiques des aires élémentaires par rapport à  $\xi\xi$ . Ensuite, les moments statiques ainsi obtenus seront reliés par un second polygone funiculaire dont on considérera encore les deux branches situées de part et d'autre de  $\xi\xi$  et qui sera rapporté au côté commun pris comme droite de référence.

La somme des ordonnées  $m$  et  $m'$  que les deux branches du polygone interceptent sur les droites  $hh$  et  $h'h'$  mesurera le moment  $M_p - M$  dans le rapport

$$\frac{1}{a \cdot b \cdot c} \frac{e + e'}{d}$$

où  $a$  est l'unité de mesure adoptée pour la réduction des aires,

$b$  la distance polaire choisie pour tracer le premier polygone,  $c$  la distance polaire choisie pour tracer le second polygone,  $d$  la distance des deux droites de séparation.

Si donc, à une échelle quelconque des moments, on porte, parallèlement à la droite de référence, un segment  $CL$  égal à

$$a \cdot b \cdot c (e + e')$$

et si l'on mène par  $C$ , parallèlement à  $H'H$ , un rayon  $CM$ , le segment  $LM$  intercepté par un tel rayon sur la normale à l'axe des  $y$  conduite par  $L$  mesurera, à la même échelle, le moment  $M_p - M$ .

Si  $M_p - M$  tend vers zéro, les deux points  $H$  et  $H'$  se rapprochent indéfiniment de la droite  $\xi\xi$  et l'état de tension tend vers l'état limite correspondant à l'hypothèse où la plasticité serait étendue à toute la section.

Par contre, si la différence  $M_p - M$  augmente, les deux points  $H$  et  $H'$  s'éloignent jusqu'à ce que l'un d'eux atteigne en  $K$  le bord de la section. La construction graphique que nous venons de décrire, nous permettra alors de retrouver en  $K'$  la position de l'axe de séparation de la seule région qui reste en régime plastique. En  $LN$  on aura la mesure du moment  $M_p - M_t$ .

Tout ce que nous venons de dire s'applique non seulement au problème classique de la flexion simple, auquel nous nous sommes rapportés, mais aussi au cas, bien plus complexe et bien plus général, d'une flexion accompagnée d'une traction ou bien d'une compression.

Le fait que le moment  $M$  est accompagné d'un effort normal — pourvu que celui-ci ne soit pas d'intensité suffisante pour déterminer à lui seul le dépassement de la limite élastique du matériau en tous les points de la section — n'influe en effet sur les considérations précédemment développées, que parce que la présence de cet effort normal change les valeurs des tensions provoquées par le moment de flexion sur les bords de la section quand sont atteintes les limites élastiques.

Tout se réduit donc à opérer comme dans le cas de la flexion simple, pourvu que l'on prenne ces nouvelles valeurs comme limite d'élasticité du matériau.

Cette analyse du problème de la flexion, que nous venons d'exposer dans ses grandes lignes, conduit à des résultats qui sont particulièrement intéressants au point de vue de la relation qui lie le moment de flexion à la courbure de l'axe de la poutre.

Nous avons déjà dit en effet que, dès que le phénomène cesse d'être élastique, cette relation cesse d'être linéaire.

A la courbure élastique, toujours proportionnelle au moment de flexion, vient s'adjoindre une courbure plastique, fonction croissante elle aussi mais, en général, non linéaire du même moment.

Le diagramme, qui traduit graphiquement la relation entre moments et courbures, fléchit vers l'axe des courbures.

Il s'éloigne de la droite qui représente la loi de Hooke plus ou moins brusquement, selon les cas ; on a en tout cas affaire avec une courbe du genre de celle représentée par une ligne continue dans notre figure 8.

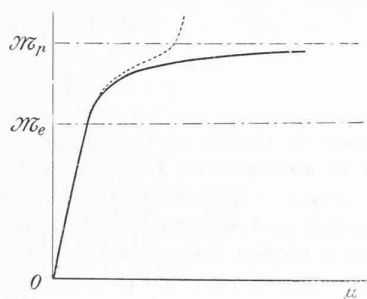


Fig. 8.

Or, l'expérience confirme, jusqu'à un certain point, ces conclusions de la théorie.

Jusqu'à un certain point, parce que, dans la théorie, nous avons délibérément fait abstraction de l'accroissement éventuel de résistance dû à l'écroutissement du matériau.

Or, on a évidemment le droit de procéder ainsi tant qu'on se propose d'étudier les lois de l'équilibre élasto-plastique pour des déformations plastiques assez petites, c'est-à-dire de l'ordre de grandeur des déformations élastiques. C'est le cas de celles qui se produisent dans les constructions, même les mieux calculées.

Mais quand les déformations deviennent plus grandes, et que l'écroutissement se manifeste, il faut bien s'attendre à un accroissement de rigidité de la poutre. On peut même prévoir la disparition de la valeur limite du moment de flexion ; celui-ci va devenir une fonction croissante de la déformation, et il sera limité seulement par le fait que, celle-ci allant en croissant, il arrivera certainement un moment où le matériau se rompra.

Du point de vue expérimental ces prévisions sont d'ailleurs complètement vérifiées.

Il suffit en effet d'essayer de relever la relation qui lie le moment de flexion à la courbure dans une poutre fléchie en fer homogène (ou en acier doux) pour constater :

1. que, lorsqu'on dépasse la valeur du moment de flexion, pour laquelle les tensions, calculées d'après la théorie de l'élasticité, atteignent sur les bords de la section la limite d'élasticité du matériau, le phénomène cesse aussitôt d'être élastique, tandis que la relation qui lie le moment de flexion à la courbure cesse d'être linéaire ;

2. que, dès lors, le diagramme qui traduit graphiquement cette relation s'incurve vers l'axe des déformations, en suivant au début d'assez près l'allure définie par la théorie de l'équilibre élasto-plastique, et en s'en écartant ensuite, plus ou moins brusquement, traduisant une évidente reprise de résistance de la poutre ;

3. que la valeur limite du moment, telle qu'elle est définie par la théorie de l'équilibre élasto-plastique, est atteinte et même dépassée, souvent pour des valeurs encore relativement faibles de la déformation.

On peut donc raisonnablement songer à des théories qui arrivent à interpréter analytiquement le phénomène de la résistance à la flexion en régime élasto-plastique, avec une approximation plus grande, ou, si l'on veut, dans un domaine de valeurs plus étendu.

Toutefois on peut bien dire — d'accord avec l'expérience — que la théorie de l'équilibre élasto-plastique, telle que nous sommes en train de l'exposer, représente bien le phénomène réel tant que les déformations satisfont à ces conditions que nous avons énoncées dès le début, et qui se trouvent vérifiées dans la plupart des problèmes techniques que nous nous sommes proposés de résoudre.

Dans ces cas, et dans les limites qu'ils comportent, le diagramme dont nous venons de nous occuper peut en effet être considéré comme la traduction graphique de l'expression (10) de la courbure :

$$\mu = \frac{\mathfrak{M} + E \int_A \bar{\epsilon}_z y dA}{EJ}$$

Cette expression contient deux termes ; le premier

$$\frac{\mathfrak{M}}{EJ}$$

se rapporte évidemment à la phase élastique du phénomène, c'est-à-dire aux déformations qui s'annulent lorsque s'annule la sollicitation extérieure. Il est représenté par les abscisses de la portion rectiligne du diagramme, et de son prolongement.

Le second terme

$$\frac{\int_A \bar{\epsilon}_z y dA}{J}$$

se rapporte au contraire à la phase plastique du phénomène, c'est-à-dire aux déformations qui persistent même après la disparition des forces extérieures. Il est représenté par les abscisses de la courbe, comptées à partir du dit prolongement.

Or, dans tous les cas où les effets de l'effort tranchant peuvent être négligés par rapport aux effets du moment de flexion, le calcul des déformations des poutres fléchies dépend simplement de l'intégration de l'équation différentielle

$$\frac{dy^2}{dz^2} = -\mu$$



où  $\mu$  désigne la courbure.

Il s'ensuit que, en attribuant à  $\mu$  l'expression qui correspond

- à la seule courbure élastique,
- à la seule courbure plastique,
- ou à la courbure totale,

nous obtiendrons respectivement les valeurs

- des seules déformations élastiques,
- des seules déformations plastiques,
- ou des déformations totales.

Et cela sans qu'il y ait aucun changement à apporter aux méthodes connues.

Si, à titre d'exemple, nous choisissons, pour ce calcul, le procédé graphique de Mohr, il suffira de considérer le diagramme des courbures, quel qu'il soit, comme un diagramme idéal de charge et de s'en servir, de la manière habituelle, pour la construction du polygone funiculaire.

\* \* \*

En appliquant une telle méthode, on parvient à des résultats très proches des résultats de l'expérience, et qui se prêtent assez bien à les interpréter.

Un fait en particulier vient ainsi à être mis en évidence; un fait duquel j'ai déjà parlé à maintes reprises, et dont il faut bien reconnaître l'importance fondamentale: à savoir que par l'introduction des déformations plastiques nous renonçons, en même temps et d'une façon définitive, non seulement à la réversibilité du phénomène, mais aussi à sa linéarité.

Ce fait se présente très nettement et avec une grande fréquence dans le cas des constructions en béton armé, où la limite d'élasticité du béton peut être atteinte même pour des valeurs très faibles de la sollicitation.

L'accord entre la théorie et l'expérience devient alors singulièrement frappant.

Prenons par exemple, choisie au hasard, une parmi les nombreuses expériences sur des poutres en béton armé que Bach et Graf ont réalisées, il y a maintenant plus de vingt ans, dans la Materialprüfungsanstalt de la Technische Hochschule de Stuttgart.

Il s'agit d'une poutre simplement fléchie, à section carrée de 30 cm de côté, armée tout le long de la face tendue de six fers ronds équidistants de 17 mm de diamètre.

La partie de l'expérience dont nous voulons nous occuper ici est celle qui se rapporte à la période qui précède l'apparition des premières lésions.

Selon la documentation qui se trouve dans l'Handbuch de von Emperger

pour des moments de flexion de	on a expérimentalement relevé des courbures de
30 000 kg.cm	$0,132 \times 10^{-5} \text{ cm}^{-1}$
60 000 »	0,273
90 000 »	0,423
120 000 »	0,582
150 000 »	0,749
180 000 »	0,980

Bach et Graf ont cherché à mettre ces valeurs expérimentales de la courbure en relation avec celles calculées dans l'hypothèse, que toute la section réagit élastiquement, et ceci en ayant recours à l'artifice habituel de faire varier de manière convenable le rapport des modules d'élasticité des deux matériaux qui composent la poutre.

Mais ils n'obtiennent naturellement qu'un accord apparent, et de toute façon nécessairement limité à des intervalles de valeurs relativement restreints.

La réalité est tout autre; l'expérience montre nettement

que l'allure du phénomène n'est pas linéaire, et la théorie classique de l'élasticité ne peut et ne pourra jamais l'interpréter.

Une interprétation satisfaisante s'obtient par contre si, tout en maintenant au phénomène élastique la caractéristique fondamentale de la linéarité, on introduit la considération des déformations plastiques en admettant, comme d'habitude, qu'elles interviennent et se superposent aux déformations élastiques, là où les limites d'élasticité du matériau sont atteintes.

Pour cela il faut distinguer au préalable les valeurs de la sollicitation pour lesquelles on peut raisonnablement considérer vérifiées les lois de l'élasticité, de celles pour lesquelles il est hors de doute qu'interviennent des déformations plastiques.

Considérons par exemple la première valeur du moment de flexion: 30 000 kg. cm.

Pour cette valeur de la sollicitation, les tensions unitaires maxima, selon la théorie de l'élasticité, prennent respectivement les valeurs de +5 et de -6 kg/cm<sup>2</sup>.

Dans ces conditions, on peut, en toute tranquillité, admettre que le matériau se comporte partout comme parfaitement élastique, et qu'il réalise effectivement la distribution linéaire de tensions intérieures qui, pour cette valeur du moment de flexion, est représentée dans le premier diagramme de la figure 9.

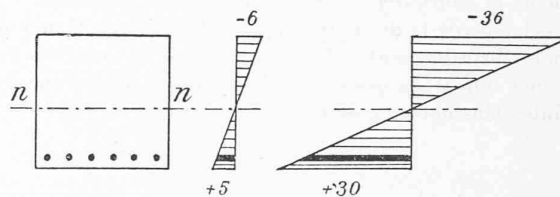


Fig. 9.

L'accord entre la théorie et l'expérience s'obtient tout naturellement en attribuant au béton un module d'élasticité de 280 t/cm<sup>2</sup>, ce qui — étant donné que le module du fer se maintient toujours au voisinage de 2100 t/cm<sup>2</sup> — équivaut à prendre, pour le rapport des modules, la valeur 7,5.

De cette façon on trouve en effet pour la courbure la valeur

$$\frac{\partial \varkappa}{EJ} = 0.132 \times 10^{-5} \text{ cm}^{-1}$$

qui coïncide exactement avec celle qui a été relevée expérimentalement.

Considérons par contre la dernière des valeurs du moment de flexion du tableau, c'est-à-dire 180 000 kg. cm.

D'après la théorie de l'élasticité les tensions maxima sur le contour de la section devraient, en ce cas, atteindre respectivement les valeurs unitaires de +30 et de -36 kg/cm<sup>2</sup>, la distribution des tensions sur la section étant celle qui est représentée dans le second diagramme de la figure 10.

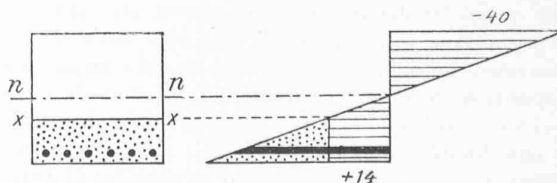


Fig. 10.

Or, la première de ces valeurs est notoirement inadmissible pour un béton ordinaire.

Il faut donc nécessairement admettre que, là où les tensions positives tendent à dépasser une certaine limite, le béton passe du régime des déformations élastiques au régime des déformations plastiques.

L'accord entre la nouvelle expression de la courbure

$$\mu = \frac{\partial \kappa}{EJ} + \bar{\mu}$$

et l'expérience pourra s'obtenir — sans faire varier la valeur attribuée au module — en prenant comme diagramme des déformations plastiques (en fonction des  $y$ ) un diagramme triangulaire du type de celui pointillé dans la figure 10.

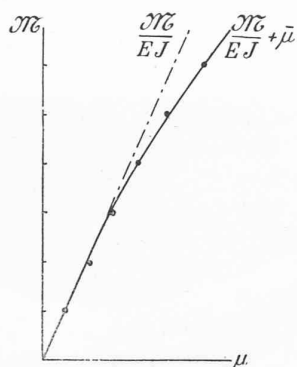


Fig. 11.

Pour une telle distribution de déformations plastiques, on a en effet

$$\bar{\mu} = 0.188 \times 10^{-5} \text{ cm}^{-1}$$

Si l'on tient compte que

$$\frac{\partial \kappa}{EJ} = 0.192 \times 10^{-5} \text{ cm}^{-1}$$

on retrouve la valeur de la courbure relevée expérimentalement

$$\bar{\mu} = 0.980 \times 10^{-5} \text{ cm}^{-1}$$

Le diagramme des tensions intérieures (hâchuré dans la figure) présente, dans toute la région intéressée par les déformations plastiques, une ordonnée constante égale à + 14 kg/cm<sup>2</sup>.

La valeur de la tension maximum négative, correspondant au bord opposé de la section, s'est naturellement accrue en conséquence ; elle est passée de - 36 à - 40 kg/cm<sup>2</sup>.

Dès lors, on peut traiter de la même manière les cas intermédiaires, en admettant que, pour eux aussi, le régime plastique se substitue à celui de la parfaite élasticité partout où les tensions positives dans le béton atteignent la limite de 14 kg/cm<sup>2</sup>.

On obtient ainsi :

pour les moments de flexion de	les valeurs des courbures (en cm <sup>-1</sup> )		
	élastique	plastique	totale
30 000 kg. cm	0,132 × 10 <sup>-5</sup>	0	0,132 × 10 <sup>-5</sup>
60 000 »	0,264	0	0,264
90 000 »	0,396	0,020 × 10 <sup>-5</sup>	0,416
120 000 »	0,528	0,052	0,580
150 000 »	0,660	0,112	0,772
180 000 »	0,792	0,188	0,980

L'accord de ces résultats avec les valeurs de la courbure relevée expérimentalement est vraiment remarquable ; l'écart ne dépasse en aucun cas le 3 %.

Cet accord apparaît clairement dans le diagramme (fig. 11) où les résultats expérimentaux de Bach et Graf ont été portés à l'échelle en présence de la courbe représentative de la loi de variation de la courbure en fonction du moment de flexion, selon la théorie de l'équilibre élasto-plastique.

(A suivre.)

## DIVERS

### Le tartre, sa destruction et les moyens de prévenir sa formation dans les chaudières industrielles et les installations de chauffage central.

#### Formation du tartre.

On trouve généralement en solution dans l'eau, dans des proportions diverses, les produits chimiques tels que : bicarbonates, sulfates, chlorures et nitrates de calcium, de magnésium et de sodium, parfois des sels de fer et d'aluminium. Le résidu sec est généralement de 200-400 mgr/litre.

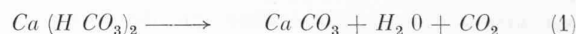
Lorsque l'eau s'évapore, les solutions se concentrent et les différents sels précipitent ; tout d'abord les sulfates et carbonates de calcium et de magnésium, puis, à beaucoup plus forte concentration, les sels de sodium, des chlorures et des nitrates. Seuls les premiers nous intéressent, car ce sont eux qui forment le tartre.

Pour savoir combien une eau contient de carbonates et de sulfates on détermine sa dureté<sup>1</sup> : la dureté totale renseigne sur la quantité totale de tartre qu'une eau peut former, les duretés temporaire et permanente donnent respectivement des indications sur les proportions de calcaire et de gypse.

Un mètre cube d'eau de dureté moyenne (20° F) dépose 200 grammes de tartre. Pour les chaudières des bateaux du Léman, par exemple, qui évaporent jusqu'à 40 tonnes d'eau du lac (13° F) par jour, cela représente 5 à 6 kg de tartre.

Les deux constituants principaux du tartre sont donc : le calcaire et le gypse.

Le calcaire se forme par l'action de la chaleur sur le bicarbonate de calcium suivant la réaction :



Lorsque son degré de saturation est atteint, le carbonate de calcium précipite sous forme de fines particules qui — sous l'action de la chaleur — se soudent pour former le tuf. Suivant les conditions de température ou de pression, le dépôt formé est plus ou moins dur et il est souvent très difficile à enlever mécaniquement.

Le gypse a la curieuse propriété d'être moins soluble à chaud qu'à froid. Si donc l'on concentre une solution de sulfate de calcium, il y aura précipitation sur les parties les plus chaudes, en particulier sur les tubes des chaudières. Ce « tartre gypse » est dangereux. Très dur et adhérent, il forme sur les éléments chauffants une couche peu conductrice de la chaleur et provoque ainsi des pertes considérables au point de vue thermique.

L'analyse de l'eau révélera donc la composition exacte du tartre. Les eaux de notre pays étant essentiellement calcaires, le carbonate de calcium est généralement le principal constituant du tartre. Il est accompagné, en quantités variables, de sulfate de calcium, de silice et de sels de magnésium.

<sup>1</sup> Un degré français de dureté (1° F) correspond à un gramme de calcaire (CaCO<sub>3</sub>) par 100 litres d'eau.