

**Zeitschrift:** Bulletin technique de la Suisse romande

**Band:** 69 (1943)

**Heft:** 16

**Artikel:** Contribution à l'étude des courants liquides à surface libre: l'énoncé de Bélanger-Böss généralisé

**Autor:** Jaeger, Charles

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-52522>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 14.03.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# BULLETIN TECHNIQUE

## DE LA SUISSE ROMANDE

Paraissant tous les 15 jours

## ABONNEMENTS :

Suisse : 1 an, 13.50 francs

Etranger : 16 francs

Pour sociétaires :

Suisse : 1 an, 11 francs

Etranger : 13.50 francs

Prix du numéro :

75 centimes.

Pour les abonnements  
s'adresser à la librairie  
F. Rouge & C<sup>ie</sup>, à Lausanne.

Organe de la Société suisse des ingénieurs et des architectes, des Sociétés vaudoise et genevoise des ingénieurs et des architectes, de l'Association des anciens élèves de l'Ecole d'ingénieurs de l'Université de Lausanne et des Groupes romands des anciens élèves de l'Ecole polytechnique fédérale.

COMITÉ DE PATRONAGE. — Président : R. NEESER, ingénieur, à Genève ; Vice-président : M. IMER, à Genève ; secrétaire : J. CALAME, ingénieur, à Genève. Membres : *Fribourg* : MM. L. HERTLING, architecte ; P. JOYE, professeur ; *Vaud* : MM. F. CHENAUX, ingénieur ; E. ELSKES, ingénieur ; EPITAUX, architecte ; E. JOST, architecte ; A. PARIS, ingénieur ; Ch. THÉVENAZ, architecte ; *Genève* : MM. L. ARCHINARD, ingénieur ; E. MARTIN, architecte ; E. ODIER, architecte ; *Neuchâtel* : MM. J. BÉGUIN, architecte ; R. GUYE, ingénieur ; A. MÉAN, ingénieur ; *Valais* : M. J. DUBUIS, ingénieur ; A. DE KALBERMATTEN, architecte.

RÉDACTION : D. BONNARD, ingénieur, Case postale Chauderon 475, LAUSANNE.

Publicité :

TARIF DES ANNONCES

Le millimètre

(larg. 47 mm.) 20 cts.

Tarif spécial pour fractions de pages.

En plus 20 % de majoration de guerre.

Rabais pour annonces répétées.



ANNONCES-SUISSES S.A.

5, Rue Centrale,  
LAUSANNE  
& Succursales.

CONSEIL D'ADMINISTRATION DE LA SOCIÉTÉ ANONYME DU BULLETIN TECHNIQUE

A. STUCKY, ingénieur, président ; M. BRIDEL ; G. EPITAUX, architecte ; M. IMER.

SOMMAIRE : *Contribution à l'étude des courants liquides à surface libre. L'énoncé de Bélanger-Böss généralisé*, par CHARLES JÆGER, Dr ès sc. techn., privat-docent à l'Ecole polytechnique fédérale. — *Ecole d'ingénieurs de l'Université de Lausanne : Doctorat ès sciences techniques.* — *Société suisse des ingénieurs et des architectes : Extrait du procès-verbal de la 5<sup>me</sup> séance du Comité central.* — NÉCROLOGIE : *Georges Guillemin, ingénieur.* — BIBLIOGRAPHIE. — SERVICE DE PLACEMENT.

## Contribution à l'étude des courants liquides à surface libre.

### L'énoncé de Bélanger-Böss généralisé,

par CHARLES JÆGER, Dr ès sc. techn.,

Privat-docent à l'Ecole polytechnique fédérale,

Collaborateur du Laboratoire de recherches hydrauliques E.P.F.  
à Zurich.

*Note de la Rédaction.* — Cet article est le second chapitre d'un travail d'ensemble sur les courants à surface libre qui nous fut remis par l'auteur. Ce dernier a bien voulu nous autoriser à renoncer à la publication intégrale de la première partie qu'il a résumée à l'introduction du texte donné ici.

M. Jæger introduit dans l'expression de Bernoulli deux coefficients par lesquels il est tenu compte de l'inégale répartition des vitesses et de la courbure des filets liquides, et parvient à étendre la représentation graphique des courants précédemment donnée par Böss pour les écoulements à filets sensiblement rectilignes et parallèles, aux écoulements permanents d'un type quelconque, potentiel ou turbulent, avec ou sans débit solide.

L'intérêt d'une telle représentation, beaucoup plus générale que celle utilisée habituellement, est ici clairement démontré. L'auteur se réserve d'en faire apparaître les avantages pratiques par des publications ultérieures.

### Introduction.

Dans son *Essai sur la théorie des eaux courantes* Boussinesq<sup>1</sup> mentionne à plusieurs reprises un « principe de la stabilité en hydraulique », principe auquel il attache visiblement la plus grande importance, sans être arrivé cependant à le formuler. Il ressort clairement que, d'après Boussinesq, ce principe devrait comporter deux aspects principaux : l'un donnerait une explication plausible des circonstances qui engendrent un mouvement permanent ou au contraire le détruisent ; l'autre devrait être une généralisation du principe de Bélanger<sup>2</sup> du débit maximum. Boussinesq a lui-même, dans une étude ultérieure<sup>3</sup> sur les déversoirs en mince paroi, appliqué le principe de Bélanger aux mouvements à filets curvilignes. Cette extrapolation du principe qui trouvait cependant sa justification dans la concordance des résultats avec les mesures de Bazin fut l'objet de très vives critiques.

C'est à l'étude de certaines questions soulevées par le principe de stabilité de Boussinesq que nous consacrons l'exposé qui va suivre. On pourrait intituler « problème de Boussinesq » l'ensemble des recherches relatives à l'énoncé du « principe de stabilité », principe qui reste encore à trouver, et « énoncé de Bélanger-Böss généralisé »<sup>4</sup>

<sup>1</sup> J. V. BOUSSINESQ : *Essai sur la théorie des eaux courantes*. Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences ; Paris 1877, p. 120, 142 et 573.

<sup>2</sup> J. B. BÉLANGER : *Notes sur le cours d'hydraulique*. Ecole nationale des Ponts et Chaussées ; Paris 1849-50, p. 32-33.

<sup>3</sup> J. V. BOUSSINESQ : *Théorie approchée de l'écoulement sur un déversoir en mince paroi et sans contraction latérale* ; Paris 1907.

<sup>4</sup> P. BÖSS : *Berechnung der Wasserspiegellage beim Wechsel des Fließzustandes*. Berlin. Springer 1919, p. 20 et 52.

le théorème particulier que nous apportons ici et qui ne constitue peut-être qu'une partie du « problème de Boussinesq ».

La démonstration de l'énoncé de Bélanger-Böss généralisé exige que l'on étende au préalable le théorème de Bernoulli, au cas d'un écoulement à filets incurvés considéré dans son ensemble.

Au cours de l'exposé qui va suivre, nous adopterons les notations suivantes (fig. 1) :

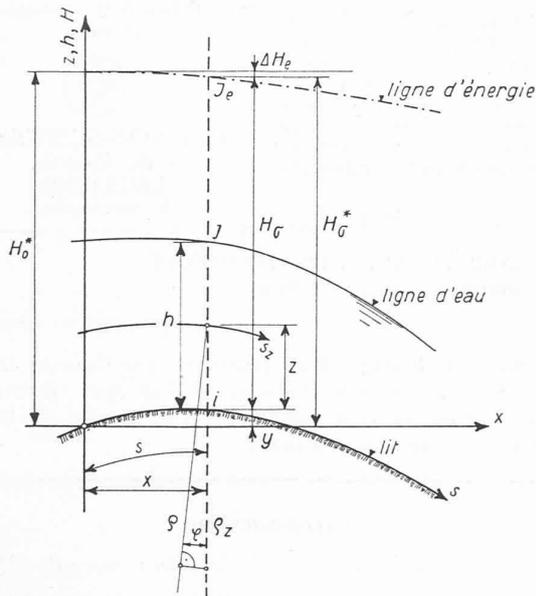


Fig. 1.

- $\gamma$  = poids spécifique de l'eau.
- $s$  = abscisse curviligne du centre de gravité des sections transversales.
- $s_z$  = abscisse curviligne d'un filet liquide.
- $x$  = abscisse linéaire le long d'un axe horizontal.
- $\sigma$  = surface d'une section supposée tracée normalement aux filets liquides.
- $B$  = largeur d'une section (rectangulaire).
- $h$  = hauteur de l'eau dans la section, mesurée verticalement à partir du point le plus bas de la section.
- $h_n$  = valeur de  $h$  en cas d'écoulement uniforme ou normal (hauteur normale).
- $h_c$  = hauteur critique.
- $z$  = ordonnée d'un point, mesurée à partir du point le plus bas de la section.
- $y = f(x)$  équation du fond du lit (lieu des points les plus bas).
- $Q$  = débit total de la section.
- $q$  = débit linéaire par unité de largeur ( $B = 1$ ).
- $H_\sigma$  = hauteur de la ligne d'énergie moyenne mesurée à partir du point le plus bas d'une section  $\sigma$ .
- $H_\sigma^* = H_\sigma + y$ ;  $H_o = H_{\sigma_{x=0}}$  au point origine  $x = 0$ , où  $y = 0$ .
- $H_z$  = hauteur de la ligne d'énergie pour un filet liquide isolé;  $i H_z^* = H_z + y$ .
- $i$  =  $dy/dx$  = pente du fond du lit.
- $j$  = pente de la ligne d'eau.

$J_e$  = pente de la ligne d'énergie moyenne.

$v$  = vitesse en un point.

$v_m = \frac{Q}{\sigma} =$  vitesse moyenne dans la section transversale.

$p$  = pression en un point.

$t$  = temps.

Nous allons, de façon très succincte, montrer comment le théorème de Bernoulli est susceptible d'être généralisé et comment on peut définir  $H_\sigma$ , hauteur de la ligne d'énergie moyenne relative à toute la section  $\sigma$ , dans le cas d'un écoulement à filets incurvés<sup>1</sup>.

Soient  $s$  et  $z$  les coordonnées d'un point quelconque, pris dans la masse du liquide en mouvement. Ecrivons pour un filet liquide de section  $d\sigma$  et de courbure quelconque l'équation de Bernoulli (fig. 2) :

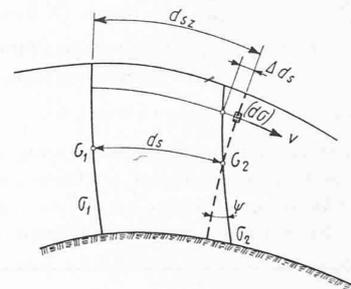


Fig. 2.

$$(a) \quad \frac{\partial}{\partial s_z} \left( \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z + y \right) = -J_p$$

où  $J_p$  est la résultante, dans le sens des  $s_z$  positifs, des forces de résistance. On peut montrer que, quoique  $\partial s_z \neq \partial s$ ,

$$(b) \quad \iint_{\sigma} \frac{\partial}{\partial s_z} \left( \frac{v^2}{2g} \right) v d\sigma = \frac{\partial}{\partial s} \iint_{\sigma} \frac{v^3}{2g} d\sigma$$

dans tous les cas où l'on peut passer de la surface  $\sigma$  à la surface voisine en effectuant une translation et une rotation de la surface  $\sigma$ , mais que l'expression (b) n'est plus rigoureuse, si la surface  $\sigma$  subit, en outre, une déformation complémentaire.

Définissons :

$$v_m = \frac{Q}{\sigma} = \frac{1}{\sigma} \iint_{\sigma} v d\sigma$$

$$(c) \quad \alpha = \frac{1}{Q v_m^2} \iint_{\sigma} v^3 d\sigma = \frac{1}{\sigma v_m^3} \iint_{\sigma} v^3 d\sigma$$

$$(d) \quad \beta = \frac{1}{Q h} \iint_{\sigma} \left( \frac{p}{\gamma} + z \right) v d\sigma$$

$$J_e = \frac{1}{Q} \iint_{\sigma} J_p d\sigma$$

$$(e) \quad H_z^* = \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z + y, \quad H_z^* = H_z + y$$

<sup>1</sup> Nous espérons pouvoir publier prochainement dans la *Revue générale de l'Hydraulique* cette première partie de notre travail en donnant à la généralisation du théorème de Bernoulli tous les développements qu'elle comporte.

$$(f) \quad H_{\sigma} = \frac{1}{Q} \iint_{\sigma} \left( \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z \right) v d\sigma = \alpha \frac{v_m^2}{2g} + \beta h$$

$$\text{et} \quad H_{\sigma}^* = H_{\sigma} + y.$$

En faisant usage de ces notations, on a successivement, en partant de l'équation (a) dont on multiplie les termes par le débit constant  $v d\sigma$  et en l'intégrant sur toute la section  $\sigma$  :

$$\frac{1}{Q} \frac{\partial}{\partial s} \iint_{\sigma} \frac{v^3}{2g} d\sigma + \frac{1}{Q} \frac{\partial}{\partial s} \iint_{\sigma} \left( \frac{p}{\gamma} + z + y \right) v d\sigma = - \frac{1}{Q} \iint_{\sigma} J_p v d\sigma$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( \alpha \frac{v_m^2}{2g} \right) + \frac{\partial}{\partial s} (\beta h + y) = -J_e$$

et enfin

$$(g) \quad \frac{\partial H_{\sigma}^*}{\partial s} = -J_e \quad \text{ou} \quad \frac{\partial H_{\sigma}^*}{\partial x} = -J_e.$$

L'expression (g) est précisément la forme généralisée du théorème de Bernoulli que nous cherchions. Le coefficient  $\alpha$  tient compte de l'inégale répartition des vitesses alors que le coefficient  $\beta$  dépend de la courbure des filets liquides.

$H_{\sigma}$  est bien l'expression générale de la hauteur de la ligne d'énergie moyenne de la section  $\sigma$ , compte tenu de l'inégale répartition des vitesses et de la courbure.

### Conception actuelle du problème de Boussinesq.

Lorsque Böss publia ses considérations sur la ligne d'énergie<sup>1</sup>, il fit faire un pas décisif au problème posé par Boussinesq. Böss remarqua que la courbe

$$H = h + \frac{q^2}{2gh^2}, \text{ qui donne la hauteur de la ligne d'énergie } H$$

en fonction de la hauteur d'eau  $h$ , dans un canal rectiligne de section rectangulaire, possède un minimum pour  $h = \frac{2}{3} H = h_c$  (hauteur (critique) et que ce minimum

sépare le régime tranquille du régime torrentiel. Quoique Böss ne le mentionne pas explicitement dans sa publication, le point pour lequel  $\frac{\partial H}{\partial h} = 0$ , dans un écoulement à filets parallèles, est aussi le point qui annule la

dérivée partielle  $\frac{\partial Q}{\partial h}$ . L'énoncé de Böss, plus important peut-être que celui de Bélanger, n'est donc qu'un autre aspect d'un même principe. Böss lui-même suggérait d'envisager le principe du minimum de la ligne d'énergie comme une conséquence du principe de la moindre contrainte de Gauss<sup>2</sup>.

Deux voies s'ouvrent à qui veut étudier plus avant le problème complexe soulevé par Boussinesq :

On peut, en précisant l'idée de Böss, rechercher en mécanique ou en hydrodynamique — peut-être en hydrodynamique statistique — quelle est l'origine du théorème du minimum de la ligne d'énergie.

On peut aussi, restant plus proche du domaine plus restreint que se réserve l'hydraulique, se demander si l'énoncé de Bélanger-Böss, valable dans le cas de filets rectilignes parallèles, peut être étendu au cas d'écoulements à forte courbure ou à turbulence accentuée. Des trois conséquences de l'énoncé de Bélanger-Böss : minimum de la ligne d'énergie, maximum du débit et limite de séparation entre les régimes tranquille et torrentiel, laquelle est la plus générale ? Böss estimait que c'est la notion de minimum de la ligne d'énergie ; Boussinesq traitant du déversoir en mince paroi et ignorant encore tout le parti que l'on peut tirer de la notion de hauteur d'énergie, n'invoquait que la seconde particularité, en écrivant :  $\frac{\partial Q}{\partial h} = 0$ . Quant à la troisième conséquence de

l'énoncé, la plupart des auteurs admettaient sans autre — et cela, malgré la présence de forts tourbillons — l'existence d'une certaine hauteur critique  $h_c$  séparant, dans le cas du ressaut hydraulique sur radier plan, l'écoulement torrentiel amont de l'écoulement tranquille aval. D'après la conception généralement admise, la hauteur critique  $h_c$  est, en pareil cas, une valeur particulière de  $h$  qui rend infini le coefficient angulaire  $dh/ds$  de la tangente à la ligne d'eau, dans l'équation de Bresse<sup>1</sup> ( $h_n$  hauteur normale) :

$$\frac{dh}{ds} = i \frac{h - h_n}{h - h_c}.$$

Or, l'équation de Bresse n'est précisément plus valable aux environs de ce point, et l'on n'observe nulle part de tangente infinie le long de la ligne d'eau, en sorte que la définition de  $h_c$  gardait un caractère quelque peu arbitraire. Cette extrapolation de la notion de hauteur critique, issue de l'étude des courants à filets sensiblement parallèles, à un écoulement turbulent, aurait dû paraître d'autant plus hasardeuse qu'à la même époque on hésitait à étendre la même notion au cas de nappes déversantes à filets courbes, où le passage d'un régime à l'autre, sans aucune turbulence, cependant, est non moins évident que pour le ressaut hydraulique.

Il faut aussi remarquer que la « hauteur critique » introduite par Escande<sup>2</sup> dans l'étude du ressaut hydraulique sur radier avec décrochement est une « hauteur limite », située quelque part en aval du ressaut et non point une hauteur critique au sens des idées de Boussinesq et de Böss. Et cependant, il existe en ce cas également une hauteur critique, au sens général du terme.

Ce bref aperçu prouve, du moins, que les idées admises variaient considérablement d'un auteur à l'autre et selon le problème particulier qu'il envisageait.

Nous ne nous occuperons point de la première des questions soulevées : La recherche de l'origine de l'énoncé de Bélanger-Böss nous paraît être un problème de mécanique générale ou de physique statistique trop ardu

<sup>1</sup> J. J. CH. BRESSE : *Cours de mécanique appliquée*, 2<sup>e</sup> partie : Hydraulique. Paris 1860, p. 221.

<sup>2</sup> L. ESCANDE : *Recherches théoriques et expérimentales sur l'écoulement par vanne de fond*, 2<sup>e</sup> partie. Revue générale de l'Hydraulique, n<sup>o</sup> 25, janvier-février 1939, p. 21.

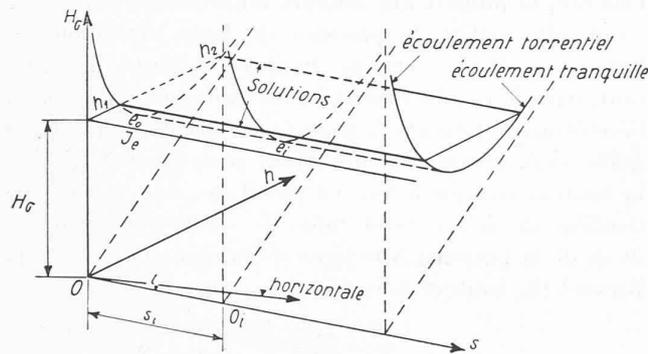
<sup>1</sup> Böss : *Berechnung der Wasserspiegellage...* Berlin 1919.

<sup>2</sup> Böss : *op. cit.*, p. 52.

pour pouvoir, en ce moment, être abordé avec quelque utilité. Plus simplement, nous chercherons — en restant dans le domaine de l'hydraulique — une généralisation de l'énoncé de Bélanger-Böss.

C'est à Böss lui-même que nous emprunterons l'idée directrice de notre étude. Cet auteur avait illustré son énoncé du théorème du minimum de la ligne d'énergie par un diagramme très suggestif et qui, depuis lors, est devenu d'un emploi courant. Nous allons chercher, tout d'abord, de deux manières différentes, à généraliser la représentation plane de Böss, pour le cas de filets liquides rectilignes, en la transposant dans des espaces à trois dimensions.

Considérons (fig. 3) un canal cylindrique de pente constante  $i$  et de grande longueur. Négligeons ce qui peut



Surface  $f_{norm}(s, h, H_G) = 0$

Fig. 3.

se passer aux extrémités du canal, pour ne considérer que la partie du canal où l'écoulement est normal ( $i = j = J_e$ ). Considérons le long de l'axe  $s$ , légèrement incliné, une succession de profils en travers verticaux

$$s_1, s_2, \dots, s_i \dots s_n.$$

En chacun de ces profils nous pouvons dessiner, dans un plan  $hO_iH_G$ , vertical, une courbe  $H_G = H_G(h)$ , identique à celle de Böss. A elles toutes ensemble elles forment une surface cylindrique, correspondant à un débit donné  $Q = const.$  Une solution réelle est donnée par l'intersection de cette surface, que nous appelons  $f_{norm}(s, h, H_G) = 0$ , avec un plan de bout, d'inclinaison  $J_e = i$ . Cette surface, qui a la forme d'une vallée, ne nous apprend d'ailleurs rien de plus que la courbe classique de Böss  $H_G = H_G(h)$ .

Plusieurs auteurs<sup>1</sup> tracent, non point une courbe  $H_G = H_G(h)$  pour un débit donné, mais une famille de courbes, en prenant le débit  $Q$  comme paramètre. Ils comparent cette famille de courbes  $H_G = H_G(h)$  à la famille de courbes  $Q = Q(h)$ , obtenues en prenant  $H_G$  comme paramètre. (Ce sont des paraboles de degré 3/2). Mais on pourrait tout aussi bien considérer dans l'espace  $Q, h, H_G$  une surface  $F_{norm}(Q, h, H_G) = 0$ , dont les intersections avec des plans  $Q = const.$  et  $H_G = const.$  donneraient à nouveau les familles de courbes mentionnées.

<sup>1</sup> G. DE MARCHI, tome I, 2<sup>e</sup> partie, p. 180, fig. 130.

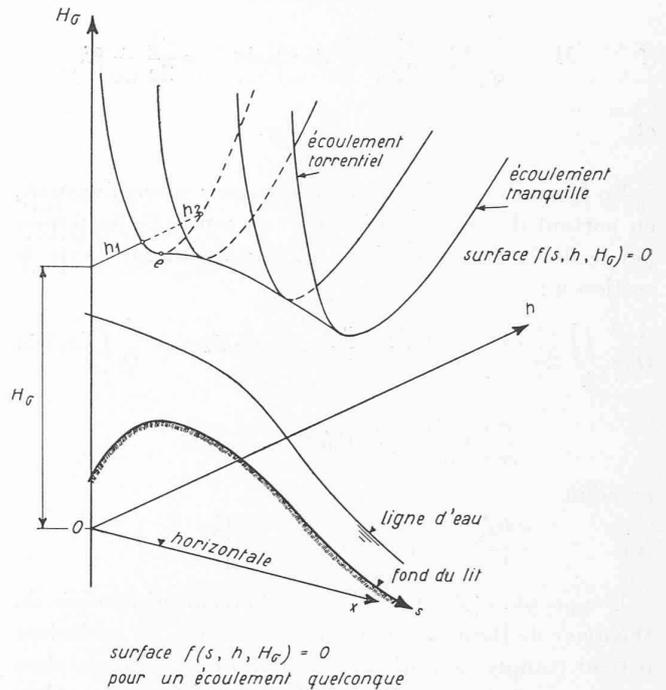


Fig. 4.

Cette surface a plus ou moins la forme d'un cornet qui s'entr'ouvre, la pointe du cornet étant placée à l'origine des axes (Fig. 5).

Les deux surfaces  $f_{norm} = 0$  et  $F_{norm} = 0$  ne sont qu'une expression différente du diagramme initial de Böss, pour le cas de l'écoulement normal. Nous allons maintenant chercher à extrapoler les notions acquises au cas d'un écoulement quelconque.

Considérons (Fig. 4), pour un débit constant  $Q_0$ , un

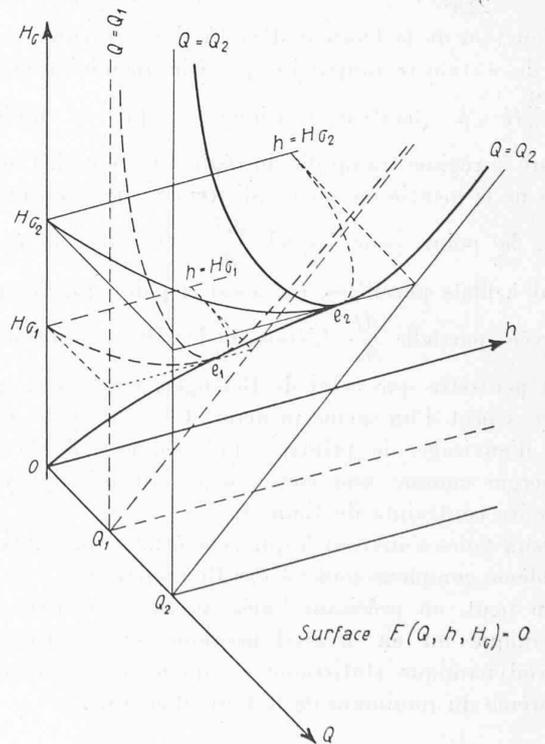


Fig. 5.

canal de forme quelconque<sup>1</sup>, dans lequel l'écoulement est permanent mais non plus nécessairement normal. Mesurons, dans des sections  $s_1, s_2, s_3 \dots s_i \dots s_n$ , prises le long de l'axe curviligne  $s$ , des paires de valeurs  $(h_1, H_{\sigma_1}), (h_2, H_{\sigma_2}) \dots (h_i, H_{\sigma_i}) \dots (h_n, H_{\sigma_n})$  et représentons-les, dans un système d'axes à trois dimensions  $(Os, h, H_{\sigma})$ , l'axe des  $s$  étant curviligne, par des points de coordonnées  $s_i, h_i, H_{\sigma_i}$ ; à chaque mesure faite correspond un point de l'espace et, pour un même écoulement à débit constant, tous ces points forment une courbe qui sera, dans le langage que nous allons adopter, la « solution » du problème, pour un débit donné et des conditions aux limites données également. Faisons varier les conditions à l'une des limites, en prenant soin de ne rien changer d'autre. Modifions par exemple  $h$  de  $dh$ , ce qui entraîne une variation  $dH_{\sigma}$  de  $H_{\sigma}$  à l'infini aval, le débit restant constant. Nous obtiendrons dans l'espace  $(Os, h, H_{\sigma})$  une nouvelle courbe, correspondant à une nouvelle solution, voisine de la précédente. En procédant ainsi de proche en proche, toutes les courbes solutions décrivent une surface à double courbure  $f(s, h, H_{\sigma}) = 0$  pour  $Q = \text{const.}$ , qui par sa forme en auge ou vallée rappelle quelque peu la surface cylindrique  $f_{norm} = 0$ , correspondant à l'écoulement normal. Aux points où le courant tendra à devenir normal dans le canal de forme quelconque que nous envisageons, la surface à double courbure  $f = 0$  tendra à reprendre la forme cylindrique de la surface  $f_{norm} = 0$ . Cette surface  $f = 0$  est une *surface représentative des écoulements à débit constant* et chaque solution réelle est, par définition, représentée par une courbe de cette surface. Si nous coupons cette surface par un plan d'abscisse  $s_i$ , parallèle au plan  $(Oh, H_{\sigma})$ , nous obtenons comme intersection la courbe (voir Fig. 4) :

$$(f) \quad H_{\sigma} = \beta h + \frac{\alpha Q^2}{2g\sigma^2},$$

dans laquelle non seulement  $H_{\sigma}$  et  $h$ , mais encore  $\alpha$  et  $\beta$  sont des variables. Cette courbe rappelle, par son allure générale, la courbe  $H = h + \frac{q^2}{2gh^2}$  de Böss.  $\alpha$  et  $\beta$  dépendent non seulement de la section choisie  $s_i$ , mais aussi des sections voisines. De quelle manière, nous le montrerons ailleurs, quoique cette dépendance soit déjà bien marquée par la façon dont nous avons obtenu la surface  $f(s, h, H_{\sigma}) = 0$  en traçant les courbes « solutions ».

Précisons, en empiétant sur ce qui sera dit plus tard, que les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  varient entre des limites que l'expérience nous permet d'estimer. Un liquide parfait en écoulement normal dans un canal rectiligne donne  $\alpha = 1$  et  $\beta = 1$ . Un liquide parfait s'écoulant en nappe par-dessus un déversoir (écoulement potentiel également) donnera, par exemple, des valeurs telles que  $\alpha = 1,1$  à  $1,2$  et  $\beta = 0,5$  à  $0,1$ . Un courant légèrement turbulent en écoulement normal fournit des valeurs  $\beta \cong 1$  et  $\alpha = 1,05$  à  $1,1$ . Un écoulement très fortement turbulent sur radier plan donnera  $\beta \cong 1$  et  $\alpha \cong 10$ , par exemple.

<sup>1</sup> Nous avons supposé, pour la commodité du dessin, que l'axe «  $s$  » se trouve dans un plan vertical, mais la démonstration est générale.

Telles sont quelques valeurs expérimentales de  $\alpha$  et  $\beta$ , que nous avons glanées parmi les mesures publiées à ce jour. Retenons simplement l'ordre de grandeur de  $\alpha$  et  $\beta$ . C'est avec raison que nous pouvons alors prétendre que la courbe  $H_{\sigma} = \beta h + \frac{\alpha Q^2}{2g\sigma^2}$  présente quelque analogie avec la courbe de Böss :  $H = h + \frac{q^2}{2gh^2}$ .

L'opération que nous venons d'effectuer, en traçant pour  $Q = \text{const.}$  une surface  $f(s, h, H_{\sigma}) = 0$ , nous pouvons la répéter pour un ensemble de valeurs  $Q$ . Nous obtiendrons soit une famille de surfaces  $f = 0$ , en prenant  $Q$  comme paramètre, ou encore une surface  $\Phi_1(Q, s, h, H_{\sigma}) = 0$  dans un espace à quatre dimensions. En opérant une coupe de cette surface pour une abscisse  $s_i = \text{const.}$ , nous obtenons une surface à trois dimensions  $F(Q, h, H_{\sigma}) = 0$  qui sera, pour notre écoulement quelconque, l'équivalent de la surface  $F_{norm} = 0$  que nous avons obtenue dans le cas d'un écoulement normal. Dans la formation de  $F = 0$  entrent implicitement les valeurs  $\alpha$  et  $\beta$ , fonctions non seulement du choix de l'abscisse, mais aussi, nous l'avons vu, de ce qui se passe dans les sections voisines.

Nous allons d'abord étudier les propriétés des surfaces  $F(Q, h, H_{\sigma}) = 0$ , ( $s = \text{const.}$ ) puis celles des surfaces  $f(s, h, H_{\sigma}) = 0$ , ( $Q = \text{const.}$ ), en tant que surfaces géométriques, sans nous préoccuper, tout d'abord, du tracé des « courbes solutions ». Le problème que pose le tracé de ces courbes sera examiné dans un paragraphe ultérieur.

#### Etude des surfaces

$F(Q, h, H_{\sigma}) = 0$ ,  $s = \text{const.}$ ; (Fig. 5).

#### Théorème du minimum de l'énergie totale dans une section donnée. Hauteur critique.<sup>1-4</sup>

Donnons-nous un canal de forme absolument quelconque. La hauteur  $H_{\sigma}$  est, par définition, fonction de  $h, Q$ , ainsi que de l'abscisse  $s$  du point considéré. Considérons maintenant une section bien déterminée d'abscisse  $s = s_0$ . Nous pouvons écrire, au lieu de l'équation (f), donnant  $H_{\sigma}$  :

$$(1) \quad F(Q, h, H_{\sigma}) = 0.$$

Dans un système de coordonnées cartésiennes  $Q, H_{\sigma}$  et  $h$ , la fonction  $F = 0$  représente une surface (Fig. 5). A chaque section d'abscisse  $s$  du canal correspond une surface  $F = 0$  différente des surfaces appartenant aux sections voisines, puisque les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  varient avec  $s$ . Mais, pour  $s = s_0$ , il n'y a qu'une surface  $F = 0$ , quoiqu'elle puisse avoir plusieurs nappes, ce qui importe peu pour la démonstration. Les divers écoulements possi-

<sup>1</sup> J. BÉLANGER : *Cours d'hydraulique*, p. 32-33.

<sup>2</sup> P. BÖSS : *Berechnung der Wasserspiegellage...*, p. 20.

<sup>3</sup> CH. JÉGER : *Remarques sur quelques écoulements le long de lits à pente variant graduellement*. « Schweizer. Bauzeitung », t. 114, n° 20, 11 novembre 1939, p. 231-234.

<sup>4</sup> CH. JÉGER et ALB. ABECASSIS-MANZANARES : *Comptes rendus de l'Académie des Sciences, Paris*, tome 210, n° 22, du 27 mai 1940.

bles ne peuvent être représentés que par des points ou des lignes se trouvant sur la surface  $F = 0$ .

Nous sommes en mesure de décrire l'une quelconque de ces surfaces.

Admettons tout d'abord, pour fixer les idées, que la surface  $F = 0$  corresponde au cas d'un canal rectangulaire où les filets liquides sont parallèles et la vitesse uniformément répartie, donc  $\alpha = 1$  et  $\beta = 1$ . Coupons cette surface par un plan  $Q = Q_i$ . Soit  $q_i = \frac{Q_i}{B}$  le débit par unité de largeur. L'équation de la courbe d'intersection

$$H_\sigma = h + \frac{q_i^2}{2gh^2}$$

nous renseigne immédiatement sur sa forme : la courbe possède deux branches dont l'une est asymptotique à la bissectrice  $h = H_\sigma$  et l'autre à la droite  $h = 0$ .  $H_\sigma$  étant toujours positif, la courbe passe nécessairement par un minimum lorsque :

$$\frac{\partial H_\sigma}{\partial h} = 1 - \frac{q_i^2}{gh^3} = 0$$

d'où nous tirons la valeur de la « hauteur critique »

$$h_c = \sqrt[3]{\frac{q_i^2}{g}}$$

(Condition de Böss pour le cas de filets parallèles rectilignes). Coupons maintenant la surface  $F = 0$  par un plan  $H_\sigma = H_j$ . La courbe d'intersection aura comme équation :

$$H_j = h + \frac{q^2}{2gh^2}, \quad \text{ou} \quad q = h \sqrt{2g(H_j - h)}.$$

Cette courbe passe par la valeur  $q = 0$  pour  $h = 0$  et pour  $h = H_j$ . Comme elle est continue, elle passe nécessairement par un maximum qui se produit lorsque :

$$h = \frac{2}{3} H_j.$$

(Condition de Bélanger pour le cas de filets parallèles rectilignes). On vérifie que, pour une valeur donnée de  $H_j$ , cette nouvelle valeur de  $h$  est aussi égale à  $h_c$ , en sorte qu'on a toujours simultanément :

$$\frac{\partial H_\sigma}{\partial h} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial Q}{\partial h} = 0.$$

C'est ce que nous désignerons sous le nom d'« Enoncé de Bélanger-Böss »<sup>1</sup>.

Passons maintenant au cas général de filets courbes et de vitesses réparties de façon quelconque dans un canal de section rectangulaire. Les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  sont alors quelconques, mais on peut cependant remarquer qu'ils ne peuvent être infinis et que  $\alpha$  ne peut être nul. Dans ces conditions, la forme générale de la surface  $F = 0$  ne diffère pas essentiellement de celle que nous venons de décrire.

<sup>1</sup> Qui le premier a signalé la simultanéité des deux conditions ? Böss n'en parle point. Par contre, bien antérieurement à Böss, Flamant — qui ignorait cependant la notion de la ligne d'énergie telle qu'elle fut introduite par Böss — la mentionne p. 90-91 de son *Hydraulique* (Paris, Béranger, édit. 1900) dans une note au bas de la page, note remarquable par la portée des remarques qui y sont faites.

Coupons en effet cette nouvelle surface par un plan  $q = q_i$ . La courbe obtenue aura pour équation :

$$(f) \quad H_\sigma = \beta h + \frac{\alpha q_i^2}{2gh^2}.$$

Elle possède également deux asymptotes et,  $H_\sigma$  étant toujours positif, elle passe par un minimum au moins, pour lequel :

$$(2) \quad \frac{\partial H_\sigma}{\partial h} = \beta + h \frac{\partial \beta}{\partial h} - \frac{\alpha q_i^2}{gh^3} + \frac{q_i^2}{2gh^2} \frac{\partial \alpha}{\partial h} = 0$$

dont on peut tirer la hauteur critique  $h = h_c$ .

Traçons, d'autre part, un plan  $H_\sigma = H_{\sigma_j}$ . Il coupe la surface  $F = 0$  selon une courbe dont l'équation est :

$$(3) \quad H_{\sigma_j} = \beta h + \frac{\alpha q^2}{2gh^2}, \quad \text{ou} \quad q = h \sqrt{\frac{2g}{\alpha} (H_{\sigma_j} - \beta h)}.$$

Elle possède au moins un maximum, car, toujours positive, elle s'annule pour  $h = 0$  et pour  $\beta h = H_{\sigma_j}$ . On a alors :

$$(4) \quad \frac{\partial q}{\partial h} = \sqrt{\frac{2g}{\alpha} (H_{\sigma_j} - \beta h)} + \frac{h \frac{\partial}{\partial h} \left[ \frac{2g}{\alpha} (H_{\sigma_j} - \beta h) \right]}{2 \sqrt{\frac{2g}{\alpha} (H_{\sigma_j} - \beta h)}} = 0.$$

En faisant dans les deux expressions (2) et (4)  $\alpha = \beta = 1$  et  $\frac{\partial \alpha}{\partial h} = 0$ , on retrouve à nouveau l'expression bien connue :

$$(5) \quad h_c = \frac{2}{3} H = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}}.$$

On peut, sur les bases de ce que nous venons de dire ici, développer une théorie de la hauteur critique et indiquer, de cas en cas, quelle forme prennent les expressions (2) et (4) et quelle valeur il y a lieu d'attribuer à  $h_c$ . *Ce qu'il nous importe de montrer ici, c'est que les valeurs  $h_c$  que l'on obtient par l'une et l'autre formules sont bien les mêmes.*

Considérons à nouveau, mais de façon tout à fait générale, la fonction implicite :

$$(1) \quad F(Q, h, H_\sigma) = 0, \quad (s = \text{const.}).$$

Nous pouvons écrire successivement :

Pour  $Q = Q_i$  :

$$(16) \quad \frac{\partial F}{\partial h} + \frac{\partial F}{\partial H_\sigma} \frac{\partial H_\sigma}{\partial h} = 0 \quad \text{d'où} : \quad \frac{\partial H_\sigma}{\partial h} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial h}}{\frac{\partial F}{\partial H_\sigma}}$$

Pour  $H_\sigma = H_{\sigma_j}$  :

$$(17) \quad \frac{\partial F}{\partial h} + \frac{\partial F}{\partial Q} \frac{\partial Q}{\partial h} = 0 \quad \text{d'où} : \quad \frac{\partial Q}{\partial h} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial h}}{\frac{\partial F}{\partial Q}}$$

Supposons que nous nous trouvions en un point de la surface où  $\frac{\partial H_\sigma}{\partial h} = 0$  et, par le fait,  $\frac{\partial F}{\partial h} = 0$ . Ni

$\frac{\partial F}{\partial H_\sigma}$ , ni  $\frac{\partial F}{\partial Q}$  ne sont infinis. Il en résulte nécessairement qu'en ce point de la surface  $\frac{\partial Q}{\partial h} = 0$  également.

La réciproque de ce théorème est vraie.

L'énoncé de Bélanger-Böss, valable pour le cas de filets parallèles rectilignes, reste vrai quelles que soient la courbure des filets liquides, la répartition des vitesses et la nature de l'écoulement, potentiel, turbulent, etc.

Nous avons esquissé à la figure 5 l'une quelconque de ces surfaces  $F = 0$ . A regarder cette surface, la signification géométrique du théorème est évidente : aux points tels que  $e_1, e_2, \dots e_i$ , les courbes d'intersection  $H_\sigma = H_{\sigma_i}$  et  $Q = Q_i$  ont la même tangente, perpendiculaire au plan  $H_\sigma O Q_i$  et possèdent toutes deux un extremum. Tant sous sa forme analytique que sous sa forme géométrique, le théorème énoncé fait usage d'une propriété générale bien connue des surfaces.

Nous appelons *point critique*<sup>1</sup> de  $F = 0$  tout point de la surface  $F = 0$  où le théorème est satisfait.

La signification physique du théorème est non moins évidente : Dans la section  $s = s_0$ , l'énergie totale du courant liquide a pour expression  $E = \gamma H_\sigma Q$  ; d'où, aux points critiques :

$$(18) \quad \frac{1}{\gamma} \frac{\partial E}{\partial h} = Q \frac{\partial H_\sigma}{\partial h} + H_\sigma \frac{\partial Q}{\partial h} = 0.$$

Enonçons maintenant le théorème :

Si en une section d'abscisse  $s = s_0$  d'un écoulement à surface libre quelconque, le débit est maximum, à hauteur  $H_\sigma = \text{const.}$ , la hauteur représentative de l'énergie moyenne  $H_\sigma$  est, en cette même section, minimum, pour  $Q = \text{const.}$  La réciproque du théorème est vraie. Il est valable quelle que soit la nature de l'écoulement : turbulent, potentiel, rectiligne ou incurvé. La hauteur de l'eau en cette section est  $h = h_c$ . C'est la *hauteur critique*, dont nous étudierons les propriétés aux chapitres suivants.

**Etude des surfaces**

$$f(s, h, H_\sigma) \text{ ou } f_1(x, h, H_\sigma^*), (Q = \text{const.})$$

(Fig. 6.)

Nous avons considéré, au précédent paragraphe, les surfaces à trois dimensions :  $F(Q, h, H_\sigma) = 0$ , sections de la surface générale à quatre dimensions  $\Phi_1 = 0$ , et étudié leurs propriétés. Faisons maintenant, dans la fonction  $\Phi_1 = 0$ ,  $Q = \text{const.}$  Nous obtenons alors des surfaces

$$f(s, h, H_\sigma) = 0, \text{ pour } Q = Q_0,$$

ou mieux, en prenant comme variable, au lieu de  $s$ , l'abscisse  $x$  mesurée le long d'un axe horizontal, et en posant  $H_\sigma^* = H_\sigma + y$ , des surfaces :

$$f_1(x, h, H_\sigma^*) = 0, \text{ pour } Q = Q_0,$$

qu'on peut représenter au moyen d'un système de référence cartésien d'axes  $Ox, h, H_\sigma^*$ . (Voir Fig. 6.) La forme de cette surface dépend essentiellement de la forme du canal (puisque  $Q = Q_0$ ). Elle est entièrement connue, dès que l'on sait calculer ou mesurer  $y = y(x)$  et calculer les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  en fonction de  $x, h$  et  $H_\sigma$ . Cette surface est la *surface représentative* de l'énergie contenue dans l'écoulement. A elle seule, elle ne nous donne la

<sup>1</sup> Ce n'est évidemment pas un « point critique » au sens mathématique du mot.

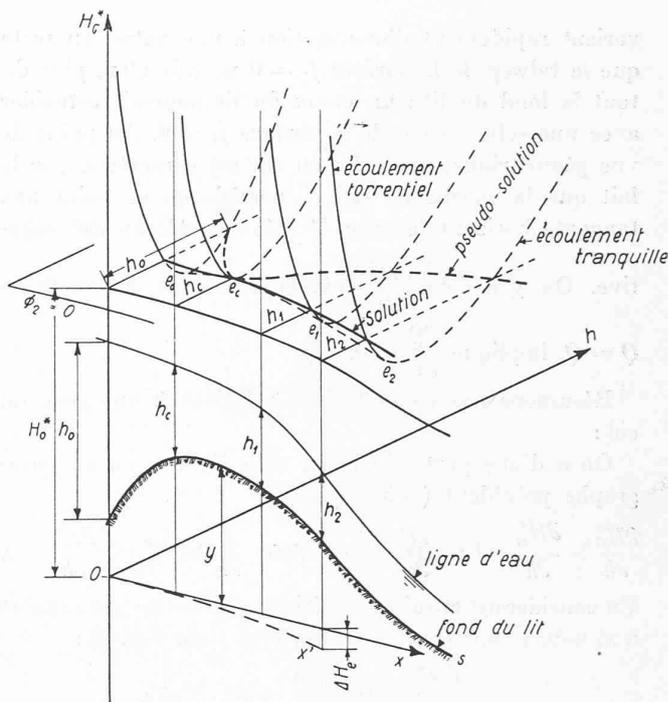


Fig. 6.

solution d'aucun problème, mais nous savons, de façon certaine, que toute solution doit nécessairement se trouver sur la surface  $f_1 = 0$ , pour peu qu'on se rappelle comment nous l'avons obtenue.

Cherchons à nous rendre compte de la forme et des propriétés de cette surface. Si nous la coupons par des plans parallèles<sup>1</sup> au plan  $H_\sigma^* O h$ , en faisant successivement  $x = x_1, x_2, \dots x_i$ , nous voyons réapparaître, comme courbes d'intersections, les courbes  $H_\sigma^* = H_\sigma^*(h)$  ou  $H_\sigma = H_\sigma(h)$ , que nous avons étudiées en détail au paragraphe précédent. Pour autant que nous puissions supposer que la surface  $f_1 = 0$  est continue — et, à vrai dire, il n'y a aucune raison sérieuse d'en douter — on peut affirmer que les courbes  $H_\sigma^* = H_\sigma^*(h)$  possèdent chacune au moins un minimum, peut-être plusieurs. Choisissons, sur chaque courbe, celui d'entre eux qui est situé le plus bas et désignons-le par la lettre  $e_i$ . La surface nous apparaît alors comme une surface à double courbure, formant une sorte de vallée en U, avec — éventuellement — des selles ou cols. En joignant tous les points tels que  $e_1, e_2, \dots e_i$ , nous obtenons une courbe formant un talweg de la vallée. En chacun des points  $e$ , nous avons  $\frac{\partial H_\sigma}{\partial h} = \frac{\partial H_\sigma^*}{\partial h} = 0$ , et, par le fait,  $\frac{\partial Q}{\partial h} = 0$ .

Le talweg est donc un lieu de points critiques sur la surface  $f_1 = 0$ .

Si, d'une section transversale à l'autre, les valeurs  $\alpha$  et  $\beta$  varient peu, le talweg de la surface  $f_1 = 0$  suivra, en ses grandes lignes, le lit même du courant. Mais on peut aussi imaginer — et nous rencontrerons ce cas dans les écoulements très fortement turbulents — des surfaces  $f_1 = 0$  pour lesquelles les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$

<sup>1</sup> Ces plans sont distincts des surfaces  $\sigma$  qui peuvent être gauches.

varient rapidement d'une section à une autre, en sorte que le talweg de la surface  $f_1 = 0$  ne suit alors plus du tout le fond du lit : un creux du lit pourrait coïncider avec une selle ou col de la surface  $f_1 = 0$ . Au point de vue géométrique, une selle ou col est caractérisé par le fait que la courbe  $e_1, e_2 \dots$  possède en ce point une tangente horizontale avec dérivée seconde en  $dx^2$  négative. On y a donc  $\frac{\partial H_\sigma^*}{\partial x} = 0$ . D'autre part, la condition

$$Q = Q_0 \text{ implique } \frac{\partial Q}{\partial x} = 0.$$

Résumons nos constatations relatives à une selle ou col :

On a d'une part, ainsi que nous l'avons vu au paragraphe précédent (voir Fig. 5)

$$\frac{\partial H_\sigma}{\partial h} = \frac{\partial H_\sigma^*}{\partial h} = 0; \quad \frac{\partial Q}{\partial h} = 0; \quad \text{d'où} \quad \frac{\partial}{\partial h} (\tau Q H_\sigma^*) = \frac{\partial E^*}{\partial h} = 0.$$

En considérant ensuite les dérivées partielles par rapport à  $x$ , nous avons trouvé d'autre part (voir Fig. 6) :

$$\frac{\partial H_\sigma^*}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad \text{d'où :}$$

$$(9) \quad \frac{\partial}{\partial x} (\tau Q H_\sigma^*) = \frac{\partial E^*}{\partial x} = 0.$$

Or  $E^*$  est, par l'intermédiaire de  $Q$  et de  $H_\sigma^*$ , fonction de  $h$  et de  $x$  seuls, en sorte que nous pouvons écrire au sommet d'un col :

$$dE^* = \frac{\partial E^*}{\partial h} dh + \frac{\partial E^*}{\partial x} dx = 0.$$

En résumé : si la surface à double courbure  $f_1(x, h, H_\sigma^*) = 0$  possède une selle ou col, le courant liquide représenté par le point le plus élevé de ce col est caractérisé par les conditions :

$$(10) \quad dE^* = 0, \quad \text{ou encore} \quad \begin{cases} \frac{\partial H_\sigma}{\partial h} = \frac{\partial H_\sigma^*}{\partial h} = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial h} = 0 \\ \frac{\partial H_\sigma^*}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

Nous avons étudié les surfaces  $f_1 = 0$  pour elles-mêmes, sans nous préoccuper de savoir comment on peut représenter géométriquement une solution physique. Cela n'est cependant point difficile, si l'on observe que toute solution, pour un débit constant  $Q = Q_0$ , doit nécessairement se trouver, d'une part sur la surface  $f_1 = 0$ , d'autre part satisfaire à l'équation (g)  $\frac{\partial H_\sigma^*}{\partial x} = -J_e$ .

Nous aurons deux cas à distinguer selon que le liquide est parfait ou, au contraire, l'écoulement turbulent avec pertes de charge. Nous ne nous occuperons pas de l'écoulement laminaire, de peu d'intérêt pour l'étude des courants à surface libre. (A suivre.)

## ÉCOLE D'INGÉNIEURS DE L'UNIVERSITÉ DE LAUSANNE

### Doctorat ès sciences techniques.

Récemment eut lieu à l'École d'ingénieurs de Lausanne une séance publique au cours de laquelle M. G.-J. Vingerhoets, ingénieur E. I. L., défendit avec succès, en vue de l'obtention du titre de docteur ès sciences techniques, sa thèse intitulée : *Sur la transmission des efforts dans un raidissement intercalé entre les ailes d'un profil double T à larges ailes parallèles*. Cette séance fut présidée par M. A. Stucky, directeur ; la commission d'examen était composée de MM. les professeurs A. Dumas, F. Hübner et A. Paris.

Dans la construction métallique soudée, on a tendance à vouloir raidir les longerons ou entretoises, au droit des appuis ou d'une charge isolée, au moyen de diaphragmes en forme de T couché soudés aux deux ailes et à l'âme d'un acier profilé double T à larges ailes parallèles (fig. 1).

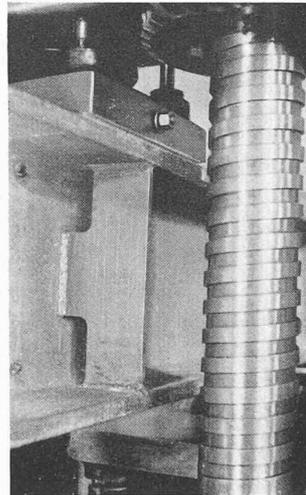


Fig. 1. — Raidissement en forme de T couché intercalé entre les ailes d'un profil en double T. Poutre d'essai sous l'une des presses du Laboratoire d'essai des matériaux de l'École d'ingénieurs de l'Université de Lausanne.

Ces raidissements sont effectués dans l'idée de renforcer la construction. Or, dans certains cas, ils se sont montrés être un affaiblissement et même une cause de rupture de l'assemblage, faits dont les causes découlent de l'étude mathématique et expérimentale faite par l'auteur de la thèse sous la direction de M. le professeur A. Dumas, directeur du Laboratoire d'essai des matériaux de l'École d'ingénieurs.

Ce travail a permis de trouver une méthode de calcul et d'établir une formule générale donnant la force transmise à l'âme par le diaphragme pour n'importe quel cas de charge, n'importe quelle poutrelle double T à larges ailes parallèles et n'importe quelle forme de raidissement.

Pour arriver à ce résultat, M. Vingerhoets établit successivement par voie analytique :

1. la surface élastique de l'aile du profilé
2. la charge prise par une ou plusieurs barres rondes simplement intercalées entre les ailes du profilé
3. la charge prise par un diaphragme rectangulaire simplement intercalé entre les ailes du profilé
4. la charge prise par un diaphragme en forme de T couché soudé à l'aile supérieure chargée et à l'âme du profilé, mais libre à sa partie inférieure
5. enfin la charge prise par un diaphragme en forme de T couché soudé à l'aile supérieure chargée, à l'âme et à l'aile inférieure libre.