Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande
Band: 72 (1946)
Heft: 16

Artikel: Le calcul des régimes quasi-stationnaires
Autor: Blanc, Charles
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-54632

72e année — 3 août 1946 — N° 16

BULLETIN TECHNIQUE
DE LA SUISSE ROMANDE

Paraissant tous les 15 jours

ABONNEMENTS :
Suisse : 1 an, 17 francs
Etranger : 20 francs
Pour sociétaires :
Suisse : 1 an, 14 francs
Etranger : 17 francs
Prix du numéro :
75 centimes
Pour les abonnements s'adresser à la librairie F. Rouge & Cie, à Lausanne.

Organe de la Société suisse des ingénieurs et des architectes, des Sociétés vaudoise et genevoise des ingénieurs et des architectes, de l'Association des anciens élèves de l'Ecole polytechnique de l'Université de Lausanne et des Groupes romands des anciens élèves de l'Ecole polytechnique fédérale.

Le calcul des régimes quasi-stationnaires

par CHARLES BLANC, professeur à l'Ecole polytechnique de l'Université de Lausanne [1].

1. Les régimes stationnaires sont ceux qui peuvent apparaître dans un système amorti soumis à des actions extérieures (forces mécaniques ou électromotrices, par exemple) qui sont des fonctions sinusoïdales du temps. Le caractère sinusoïdal du phénomène lui-même résulte de certaines propriétés des équations différentielles linéaires à coefficients constants. Si ces actions extérieures ne sont pas de nature sinusoïdale, l'étude du phénomène devient plus compliquée ; on peut, par exemple, chercher à décomposer ces actions en une superposition de fonctions sinusoïdales : c'est ainsi que l'on arrive à certains développements en série de fonctions trigonométriques (dont les séries de Fourier sont un cas particulier) ou encore à l'intégrale de Fourier. Les conditions de validité de ces méthodes sont en général trop restrictives pour qu'on puisse les utiliser pratiquement d'une façon correcte.

On se propose de donner ici une expression d'une solution qui ne fera pas appel à une décomposition spectrale des actions extérieures, mais considérera leur valeur instantanée.

[1] Exposé fait à l'Ecole polytechnique de Lausanne à l'occasion des conférences « Fréquences acoustiques », organisées les 25, 26 et 27 avril 1946, par le Laboratoire d'électricité.

On rappellera au numéro 2 les faits essentiels relatifs à l'intégration des équations différentielles linéaires à coefficients constants ; puis, au numéro 3, on définira ce que l'on entend par régime quasi-stationnaire, tout en établissant une formule qui donne, par une quadrature, une intégrale particulière de l'équation ; au numéro 4, cette formule est appliquée au cas particulier où le second membre est une exponentielle. Au numéro 5 enfin, on arrive à la formule fondamentale (16), qui donne sans signe de quadrature l'intégrale en régime quasi-stationnaire ; on en donne ensuite, au numéro 6, les conditions de validité. Puis trois exemples sont développés : au numéro 7, le cas déjà considéré du régime sinusoïdal, au numéro 8, la modulation de fréquence, au numéro 9, le cas d'un régime quasi-stationnaire dans un système à constantes réparties, ici un barreau homogène. On termine ensuite sur quelques remarques.

2. Considérons une équation différentielle linéaire à coefficients constants

$$Du \equiv \frac{d^n u}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} u}{dt^{n-1}} + \cdots \qquad + a_n u = F(t)\ ; \qquad (1)$$

on en obtient l'intégrale générale en faisant la somme d'une intégrale particulière quelconque et de l'intégrale générale de l'équation sans second membre

$$Du \equiv \frac{d^n u}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} u}{dt^{n-1}} + \cdots \qquad + a_n u = 0\ ; \qquad (2)$$

on sait que si toutes les racines de l'équation caractéristique

$$Z(r) \equiv r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots \qquad + a_n = 0 \tag{3}$$

ont leur partie réelle négative, l'intégrale générale de (2) tend vers zéro pour $t \to +\infty$. On peut donc, si l'on veut étudier le régime *permanent*, se contenter de calculer une intégrale particulière de (1).

Si le second membre $F(t)$ de (1) est une exponentielle : $F(t) = e^{\lambda t}$, et si λ n'est pas une racine de (3), il existe une intégrale particulière de (1) de la même forme ; il s'agit de la fonction

$$u(t) = \frac{e^{\lambda t}}{Z(\lambda)}. \tag{4}$$

Si, d'une façon générale, $F(t)$ est une combinaison linéaire de telles fonctions

$$F(t) = \sum_1^p \gamma_k e^{\lambda_k t}, \tag{5}$$

on a une intégrale particulière

$$u(t) = \sum_1^p \frac{\gamma_k}{Z(\lambda_k)} e^{\lambda_k t}, \tag{6}$$

sous la condition que les λ_k ne sont pas racines de (3). On a enfin des résultats analogues si on remplace cette combinaison linéaire par une série ou une intégrale : si

$$F(t) = \sum_1^\infty \gamma_k e^{\lambda_k t}, \tag{7}$$

on a

$$u(t) = \sum_1^\infty \frac{\gamma_k}{Z(\lambda_k)} e^{\lambda_k t} \tag{8}$$

et si

$$F(t) = \int_a^b \gamma(\alpha) e^{\lambda(\alpha) t} d\alpha, \tag{9}$$

on a

$$u(t) = \int_a^b \frac{\gamma(\alpha)}{Z[\nu(\alpha)]} e^{\lambda(\alpha) t} d\alpha ; \tag{10}$$

toutefois, les relations (8) et (10) ne sont valables que sous des conditions assez restrictives, qui ne seront pas précisées ici, de même qu'on laissera de côté l'étude de la possibilité de représenter une fonction donnée $F(t)$ par une expression de la forme (7) ou (9).

3. Si toutes les racines de (3) ont leur partie réelle négative, le système est *amorti* ; son état, à un instant donné t, dépend de la valeur de $F(t)$ à cet instant et des valeurs prises aux instants immédiatement précédents. On peut donc présumer qu'il existe une intégrale particulière de (1) qui s'exprime, sans signe de quadrature, au moyen de $F(t)$ et de ses dérivées. Nous allons établir cette intégrale, qui constitue le *régime quasi-stationnaire.* Cette expression se trouve employée dans un travail de *J. R. Carson* et *T. C. Fry* [1] ; ce travail donne, du reste, sans conditions de validité, la formule fondamentale (16).

[1] J. R. Carson et T. C. Fry, Variable frequency electric circuit theory with application to the theory of frequency-modulation. Bell System Technical Journal *16* (1937), p. 513-540.

On établit tout d'abord un lemme :

Soit $X(t)$ l'intégrale de l'équation

$$DX \equiv \frac{d^n X}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} X}{dt^{n-1}} + \cdots \qquad + a_n X = 1 \tag{11}$$

satisfaisant aux conditions initiales

$$X(0) = X'(0) = \cdots = X^{(n-1)}(0) = 0 ; \; X^{(n)}(0) = 1 ;$$

alors la fonction

$$u(t) = \int_0^\infty F(t-\tau)\, X'(\tau)\, d\tau \tag{12}$$

est une intégrale particulière de (1).

Pour le montrer, faisons tout d'abord le changement de variable $t - \tau = z$, soit $\tau = t - z$; il vient

$$u(t) = \int_{-\infty}^t F(z)\, X'(t-z)\, dz ;$$

par l'hypothèse faite sur les racines de (3), cette intégrale converge uniformément et peut être dérivée n fois par rapport à la variable t selon la règle de dérivation d'une intégrale par rapport à un paramètre. On a ainsi

$$u'(t) = \int_{-\infty}^t F(z)\, X''(t-z)\, dz,$$

puis

$$u''(t) = \int_{-\infty}^t F(z)\, X'''(t-z)\, dz,$$

$$u^{(n)}(t) = \int_{-\infty}^t F(z)\, X^{(n+1)}(t-z)\, dz + F(t),$$

d'où

$$Du(t) = \int_{-\infty}^t F(z)\, DX'(t-z)\, dz + F(t) ;$$

or $DX' = 0$, donc $Du = F(t)$. La formule (12) est ainsi établie.

4. *Cas particulier.* Si $F(t) = e^{st}$, la formule (12) donne

$$u(t) = \int_0^\infty e^{s(t-\tau)}\, X'(\tau)\, d\tau = e^{st} \int_0^\infty X'(\tau)\, e^{-s\tau}\, d\tau ;$$

posons alors

$$Y(s) = \int_0^\infty X'(\tau)\, e^{-s\tau}\, d\tau ; \tag{13}$$

si $\Re s > \rho$, ρ étant la plus grande des parties réelles des racines de (3), cette intégrale converge uniformément en s. Par une intégration par parties, on a ainsi

$$Y(s) = \frac{1}{s} \int_0^\infty X''(\tau)\, e^{-s\tau}\, d\tau.$$

d'où

$$\int_0^\infty X''(\tau)\, e^{-s\tau}\, d\tau = s \cdot Y(s) ;$$

on obtient ensuite, d'une façon analogue,

$$\int_0^\infty X'''(\tau)\, e^{-s\tau}\, d\tau = s^2 \cdot Y(s),$$

$$\int_0^\infty X^{(n)}(\tau)\, e^{-s\tau}\, d\tau = s^{n-1} \cdot Y(s),$$

$$\int_0^\infty X^{(n+1)}(\tau)\, e^{-s\tau}\, d\tau = s^n \cdot Y(s) - 1 ;$$

on en tire

$$\int_0^\infty DX'(\tau)\cdot e^{-s\tau}\,d\tau = Z(s)\cdot Y(s) - 1\,;$$

et, puisque $DX' = 0$, il reste $Z(s).\ Y(s) = 1$, donc

$$Y(s) = \frac{1}{Z(s)}\,; \tag{14}$$

il vient ainsi, par (12), si $F(t) = e^{st}$,

$$u(t) = \frac{e^{st}}{Z(s)}\,;$$

cette relation (12) généralise donc la formule (4) vue plus haut.

5. *Transformation de la relation* (12). Posons, dans (12),

$$F(t-\tau)\,e^{st} = W(t,\tau,s),$$

la quantité s étant laissée pour l'instant arbitraire, avec la seule condition $\Re s > -\rho$. On a alors, par (12),

$$u(t) = \int_0^\infty W(t,\tau,s)\,e^{-s\tau}\cdot X'(\tau)\,d\tau\,;$$

dans cette intégrale, t et s sont des paramètres ; écrivons donc simplement $G(\tau)$ à la place de $W(t,\tau,s)$:

$$u(t) = \int_0^\infty G(\tau)\,e^{-s\tau}X'(\tau)\,d\tau. \tag{15}$$

Supposons maintenant que l'on peut développer cette fonction $G(\tau)$ en série entière :

$$G(\tau) = G(0) + \frac{\tau}{1\,!}\,G'(0) + \cdots + \frac{\tau^r}{r\,!}\,G^{(r)}(0) + \cdots\,;$$

on a dans ce cas

$$u(t) = \int_0^\infty \sum_0^\infty \frac{G^{(r)}(0)}{r\,!}\,\tau^r e^{-s\tau}X'(\tau)\,d\tau,$$

et si l'on a le droit de permuter les signes Σ et $\int$,

$$u(t) = \sum_0^\infty \frac{G^{(r)}(0)}{r\,!}\int_0^\infty \tau^r e^{-s\tau}X'(\tau)\,d\tau.$$

Or on a

$$Y(s) = \int_0^\infty e^{-s\tau}X'(\tau)\,d\tau\,,$$

d'où, en dérivant r fois par rapport à s,

$$Y^{(r)}(s) = (-1)^r\int_0^\infty \tau^r e^{-s\tau}X'(\tau)\,d\tau\,,$$

et par conséquent, à la place de (13),

$$\boxed{u(t) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^r}{r\,!}\,G^{(r)}(0)\,Y^{(r)}(s)} \tag{16}$$

6. *Points de rigueur.* Pour établir en toute rigueur le développement (16), on commence par écrire un *développement limité* de $G(\tau)$; on peut intégrer terme à terme ; il suffit ensuite de démontrer que le reste tend vers zéro. On trouve ainsi la condition de validité de (16) :

Si l'on a $F(t) = e^{st}\cdot K(t)$, si $K(t)$ est indéfiniment dérivable pour t réel, et si l'on a toujours

$$|\,K^{(r)}(t)\,| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\,A^r$$

avec $A < \Re s + \rho$, alors la série (16) converge, et sa somme est une intégrale particulière de (1) [1].

On voit que cette condition exprime que ρ doit être assez grand, donc que le système doit être suffisamment amorti, ou encore que, le système étant donné, la fonction $K(t)$ ne doit pas varier trop rapidement.

7. *Première application : régime stationnaire sinusoïdal.* La relation (16) contient comme cas particulier la formule qui lie, en régime permanent sinusoïdal, l'impédance d'un réseau au courant qui le traverse. Soit en effet $F(t) = e^{j\omega t}$; en posant dans (16) $s = j\omega$, il vient $K(t) = 1$, $K'(t) = K''(t) = \cdots = 0$; d'autre part $\Re s = \Re(j\omega) = 0$, et comme $A = 0$, la condition de validité est simplement $\rho > 0$: *le système doit être amorti.* Alors on a

$$G(\tau) = e^{j\omega(t-\tau)}\cdot e^{j\omega\tau} = e^{j\omega t},$$

d'où

$$G'(\tau) = G''(\tau) = \cdots = 0,$$

et

$$u(t) = Y(j\omega)\cdot e^{j\omega t}, \tag{17}$$

avec

$$Y(j\omega) = \frac{1}{Z(j\omega)}\,;$$

le coefficient $Y(j\omega)$, inverse de $Z(j\omega)$, est l'admittance.

8. *Deuxième application : modulation de fréquence.* Prenons maintenant le cas d'un réseau linéaire soumis à une tension modulée en fréquence. Il s'agit d'une tension de la forme $E.\sin\varphi(t)$, $\varphi(t)$ étant une fonction dont la dérivée varie relativement peu, et très lentement, autour d'une valeur moyenne. Pour mettre en évidence ces caractères de $\varphi(t)$, on écrit

$$\varphi(t) = \Omega t + \int_0^t \omega(\tau)\,d\tau, \tag{18}$$

et l'on a

$$\max|\,\omega'\,| << \max\omega^2 << \Omega^2.$$

Comme le réseau est supposé linéaire, on peut remplacer $E\sin\varphi(t)$ par une partie imaginaire, donc en fin de compte prendre un second membre de la forme

$$F(t) = e^{j\varphi(t)} = e^{j[\Omega t + \int_0^t \omega(\tau)\,d\tau]}$$

On a ainsi, s étant laissé provisoirement arbitraire,

$$G(\tau) = e^{j\varphi(t-\tau)+s\tau};$$

[1] Pour la démonstration de ce fait, ainsi que pour diverses extensions à des fonctions discontinues, voir : Ch. Blanc, Sur les équations différentielles linéaires non homogènes, à coefficients constants. Comment. Mathem. Helvet. 19 (1946).

les dérivées de $G(\tau)$ se calculent par une formule de réduction. Si nous écrivons

$$G^{(r)}(\tau) = \gamma_r(\tau)\, G(\tau),$$

alors

$$G^{(r+1)}(\tau) = G(\tau)\,[\gamma_1(\tau)\cdot\gamma_r(\tau) + \gamma'_r(\tau)]\,;$$

or

$$G'(\tau) = G(\tau)\,[-j\,\varphi'(t-\tau) + s],$$

donc

$$\gamma_1(\tau) = -j\,\varphi'(t-\tau) + s,$$

et pour $\tau = 0$,

$$\gamma_r(0) = [s - j\,\varphi'(t)]\cdot\gamma_{r-1}(0) + \gamma'_{r-1}(0).$$

Ainsi,

$$\gamma_2(0) = [s - j\,\varphi'(t)]^2 + j\,\varphi''(t),$$
$$\gamma_3(0) = [s - j\,\varphi'(t)]^3 + 3\,j\,[s - j\,\varphi'(t)]\,\varphi''(t) - j\,\varphi'''(t),$$
etc.

Comme on a

$$\varphi(t) = \Omega t + \int_0^t \omega(\tau)\, d\tau,$$

il vient

$$\varphi'(t) = \Omega + \omega(t),$$
$$\varphi''(t) = \omega'(t), \quad \text{etc.}$$

Deux choix particuliers de s conduisent à des simplifications notables.

Premier choix : soit $s = j\,\Omega$; alors

$$\gamma_1(0) = s - j\,\varphi'(t) = -j\,\omega(t)$$
$$\gamma_2(0) = -\omega^2(t) + j\,\omega'(t)$$
$$\gamma_3(0) = j\,\omega^3(t) + 3\,\omega(t)\,\omega'(t) - j\,\omega''(t), \quad \text{etc.}$$

et par conséquent

$$u(t) = e^{j\varphi(t)} \left[\begin{array}{l} Y(j\Omega) + j\omega\, Y'(j\Omega) + \dfrac{1}{2}(-\omega^2 + j\omega')\, Y''(j\Omega) \\ - \dfrac{1}{3!}(j\omega^3 + 3\omega\omega' - j\omega'')\, Y'''(j\Omega) + \dots \end{array} \right] \tag{19}$$

Les accents pour Y représentent des dérivations par rapport à s, que l'on remplace ensuite par $j\Omega$; on a ainsi

$$Y'(j\Omega) = \left(\frac{dY(s)}{ds}\right)_{s=j\Omega} = -j\,\frac{dY}{d\Omega}; \dots$$

et enfin

$$u(t) = e^{j\varphi(t)} \left[\begin{array}{l} Y(j\Omega) + \omega\,\dfrac{dY(j\Omega)}{d\Omega} + \dfrac{1}{2!}(\omega^2 - j\omega')\,\dfrac{d^2Y(j\Omega)}{d\Omega^2} \\ + \dfrac{1}{3!}(\omega^3 - 3j\omega\omega' + \omega'')\,\dfrac{d^3Y(j\Omega)}{d\Omega^3} + \dots \end{array} \right] \tag{20}$$

Cette relation donne donc la solution en régime quasi-stationnaire au moyen de l'admittance correspondant à la pulsation Ω de la porteuse ; si $\omega(t) = 0$, il n'y a pas de modulation, et on retrouve la relation (17).

Cherchons encore la condition de validité de (20). On a, en reprenant la notation du numéro 6,

$$K(t) = e^{j\int_0^t \omega(\tau)\,d\tau}$$

et, en tenant compte du fait que $\omega(t)$ varie lentement,

$$K^{(r)}(t) \cong j^r\, K(t)\cdot\omega^r,$$

d'où

$$|\,K^{(r)}(t)\,| \cong \omega^r\,;$$

donc la série (20) converge, et sa somme est une intégrale de (1), si $\omega < \rho$. Ainsi, *pour qu'il y ait régime quasi-stationnaire, il suffit que* ρ, *donc l'inverse de la constante de temps du système, soit supérieur à l'amplitude maximum de la modulation de la pulsation* (ces deux grandeurs sont l'une et l'autre homogènes à l'inverse d'un temps).

Second choix de s : posons maintenant $s = j.\varphi'(t)$. Alors

$$\gamma_1(0) = 0,$$
$$\gamma_2(0) = j\,\omega'(t),$$
$$\gamma_3(0) = -j\,\omega''(t), \quad \text{etc.}$$

d'où

$$u(t) = e^{j\varphi(t)}\left[Y(j\varphi') + \frac{1}{2!}j\omega'\, Y''(j\varphi') + \frac{1}{3!}j\omega''\, Y'''(j\varphi') + \dots \right] \tag{21}$$

Ici, la solution est donnée en fonction de l'admittance correspondant à une pulsation $\varphi'(t)$, que l'on peut appeler *pulsation instantanée*. La dérivée première de Y a disparu, mais la valeur de Y varie maintenant avec t, puisque φ est fonction de t, alors que dans (20), seuls les ω varient.

La relation (21) démontre le fait suivant, que l'on pouvait prévoir : l'admittance instantanée $u(t) : e^{j\varphi(t)}$ n'est en général pas égale à la valeur de la fonction Y correspondant à la pulsation instantanée. Ces deux grandeurs ne coïncident que si $\omega(t)$ est constante, donc s'il n'y a pas modulation de fréquence.

9. *Troisième application : système à constantes réparties.* La formule (16) est encore valable pour un système à constantes réparties, c'est-à-dire, mathématiquement parlant, lors de l'intégration d'une équation aux dérivées partielles. On aura un régime quasi-stationnaire lorsque les deux conditions suivantes sont réalisées simultanément :

1° le système est soumis à une action extérieure de la nature qui a été envisagée plus haut, cette action pouvant être répartie sur toute l'étendue du système (et alors son expression figure dans l'équation elle-même), ou à une extrémité seulement (donc aux conditions aux limites) ;

2° le système est amorti, soit dans toute son étendue, soit aux limites.

La question devient, il est vrai, plus délicate à traiter d'une façon complète ; les conditions de validité sont cependant très larges. On se contentera de traiter ici un problème particulier :

Etudier les vibrations longitudinales d'un barreau homogène, dont une extrémité est animée d'un mouvement donné, l'autre extrémité étant encastrée dans un milieu visqueux.

Si l'on appelle $u(x, t)$ le déplacement, à l'instant t, de la tranche dont l'abscisse au repos est x, on a, en négligeant les frottements dans le barreau,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \tag{22}$$

et les conditions aux limites, valables pour tout t,

$$\text{pour } x = 0, \qquad u = F(t), \tag{23}$$

$$\text{pour } x = l, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial u}{\partial t} = 0. \tag{24}$$

Considérons encore la fonction $X(x, t)$ qui satisfait aux équations (22) à (24) pour $F(t) = 1$, avec de plus

$$X(x, 0) = \frac{\partial X(x, 0)}{\partial t} = 0\,;$$

on a, par un calcul identique à celui qui a été fait plus haut (la variable x n'y joue en effet qu'un rôle de paramètre),

$$u(x, t) = \int_0^\infty X'(x, \tau)\, F(t - \tau)\, d\tau, \tag{25}$$

où on a posé $X' = \dfrac{\partial X}{\partial \tau}$. Cette relation est donc la même que (12), à cela près que X dépend également de l'abscisse x. On pose encore

$$Y(s, x) = \int_0^\infty e^{-s\tau} X'(x, \tau)\, d\tau, \tag{26}$$

et on a, si $G(\tau) = e^{s\tau} F(t - \tau)$,

$$u(x, t) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^r}{r\,!} G^{(r)}(0)\, Y^{(r)}(s, x)\,. \tag{27}$$

Dans le cas particulier où $F(t) = e^{st}$, on a

$$G(\tau) = e^{st}, \qquad G'(\tau) = 0$$

et

$$u(x, t) = e^{st} \cdot Y(s, x). \tag{28}$$

Cette relation permet de calculer $Y(s, x)$. Si nous introduisons dans les équations (22) à (24) la fonction

$$u(x, t) = e^{st} \cdot \nu(x),$$

il vient pour $\nu(x)$ les équations

$$\nu'' - \frac{s^2}{a^2}\nu = 0,$$

$$\nu(0) = 1,$$

$$\nu'(l) + \lambda s \nu(l) = 0,$$

d'où l'on tire, en intégrant la première et en déterminant les constantes au moyen des deux autres,

$$Y(s, x) = \nu(x) = \frac{ch \dfrac{s(l - x)}{a} + a\lambda\, sh \dfrac{s(l - x)}{a}}{ch \dfrac{sl}{a} + a\lambda\, sh \dfrac{sl}{a}} \tag{29}$$

En introduisant dans (27) cette fonction Y ainsi que ses dérivées par rapport à s, on obtient, sous forme d'une série, la fonction $u(x, t)$.

Si, en particulier, la viscosité a une valeur telle que $a\lambda = 1$, il reste simplement

$$Y(s, x) = e^{-\frac{sx}{a}},$$

d'où

$$Y^{(r)}(s, x) = (-1)^r \left(\frac{x}{a}\right)^r e^{-\frac{sx}{a}}$$

et

$$u(x, t) = e^{-\frac{sx}{a}} \sum \frac{G^{(r)}(0)}{r!} \left(\frac{x}{a}\right)^r = e^{-\frac{sx}{a}}\, G\left(\frac{x}{a}\right)$$

donc

$$u(x, t) = F\left(t - \frac{x}{a}\right) \tag{30}$$

ainsi, dans ce cas, le mouvement se transmet sans déformation, avec la célérité a. Si par contre $a\lambda \neq 1$, il y a déformation.

10. On pourrait, pour établir la relation (12), utiliser la transformation de Laplace ; les calculs sont alors un peu plus simples. Cette remarque vaut également pour la relation (25).

11. La notion même de régime quasi-stationnaire (comme du reste celle de régime stationnaire) suppose toujours que le système qui en est le siège, est *amorti*. Cela apparaît nettement dans la condition de validité de la formule (16). On sait que tout système est en fait amorti, mais on s'autorise fréquemment à négliger les pertes (frottement, résistance ohmique) ; une telle approximation est le plus souvent légitime, et elle peut même être faite dans l'application de (16). En toute rigueur, il faudrait procéder de la façon suivante : considérer (théoriquement tout au moins) le système avec toutes ses pertes, lui appliquer la formule (16), puis remplacer dans le résultat les valeurs exactes de Y et de ses dérivées par les valeurs approchées que l'on obtient en négligeant les pertes. Cela revient, au point de vue du calcul, à procéder ainsi : considérer la série (16) avec les valeurs exactes des coefficients, puis ne retenir de cette série que les termes nécessaires, et enfin modifier ces termes en négligeant les pertes ; cela est parfaitement légitime, et peut donner une description satisfaisante du phénomène même si la série que l'on obtiendrait en négligeant les pertes dans tous les termes, cesse d'être convergente.

Supposons, pour en donner un exemple, que le barreau dont il a été question, au lieu d'être encastré dans un milieu visqueux, porte une certaine masse M, et proposons-nous de chercher son mouvement en régime quasi-stationnaire.

En tenant compte du frottement dans le barreau, l'équation du mouvement est

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \mu \frac{\partial u}{\partial t}, \tag{31}$$

avec les conditions aux limites

$$x = 0 \qquad u = F(t)$$

$$x = l \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = -k \frac{\partial^2 u}{\partial t^2};$$

la fonction $\nu(x) = Y(s, x)$ satisfait alors aux conditions

$$v'' - \left(\frac{s^2}{a^2} + \mu s\right) v = 0,$$

$$v(0) = 1,$$

$$v'(l) + k\frac{s^2}{a^2} v(l) = 0,$$

et si l'on néglige le frottement

$$v'' - \frac{s^2}{a^2} v = 0,$$

d'où

$$Y(s, x) = v(x) = \frac{ch\frac{s(l-x)}{a} + \frac{ks}{a} sh\frac{s(l-x)}{a}}{ch\frac{sl}{a} + \frac{ks}{a} sh\frac{sl}{a}}. \quad (32)$$

La série (27) peut fort bien diverger si on prend pour Y cette fonction ; si le frottement est faible, on peut toutefois remplacer dans les premiers termes la valeur exacte de Y ou de ses dérivées par les valeurs approchées tirées de (32).

SOCIÉTÉ SUISSE DES INGÉNIEURS ET DES ARCHITECTES

Procès-verbal

de l'assemblée des délégués du samedi 13 avril 1946, à 9 h. 15 du matin, à l'Hôtel Schweizerhof, à Berne.

(Suite [1]).

5. Approbation d'une adjonction au tarif d'honoraires pour travaux d'architecture (form. No. 102).

M. *A. Pilet, architecte,* parlant au nom de la section vaudoise, propose quelques améliorations et modifications. L'alinéa 3 de l'article 2 devrait être complété comme suit : « Les honoraires *d'autres spécialistes* doivent être inclus dans le montant servant de base au *calcul* des honoraires de l'architecte ». En outre, à l'alinéa suivant, on ne comprend pas clairement ce qu'on entend par « exploitations particulières ». A l'article 3, le mot « financement » devrait être remplacé par « crédits et subventions ». A l'article 5, le terme « raison technique ou économique » gagnerait à être précisé. La section vaudoise propose la rédaction suivante : « Si, toutefois, il est procédé à une telle répartition, sans *que l'intérêt de l'œuvre l'exige,* l'architecte... »

M. *P. Soutter, ingénieur:* La commission, qui a établi cette adjonction, est toute disposée à considérer les modifications rédactionnelles qui viennent d'être proposées. A l'article 2, alinéa 3, il faut entendre par « exploitations particulières » les bâtiments spéciaux tels qu'hôtels, hôpitaux entrepôts frigorifiques, abattoirs, etc. Il faut chercher une meilleure formule française qui rende le sens plus clair. A l'article 3, il ne faut pas ranger les subventions sous le mot « financement », il s'agit ici du placement des hypothèques et du crédit de construction. On pourra certainement arriver à un meilleur texte dans le sens des suggestions de la section vaudoise. De plus, M. Soutter croit que le Comité central pourrait appuyer la modification proposée à l'article 5 par la section vaudoise.

[1] Voir *Bulletin technique* des 6 juillet et 20 juillet 1946, p. 185 et p. 203.

M. *H. Châtelain, ingénieur,* combat également la rédaction de l'article 5 au sujet des lots d'entreprises.

M. *Kopp, président:* L'article 5 est conçu seulement pour avertir le maître de l'ouvrage qu'il n'est pas dans son intérêt de répartir le travail en un nombre inutilement grand de lots pour des raisons de commodité ou de politique, et qu'en pareil cas l'architecte est autorisé à demander une augmentation de ses honoraires pour le surcroît de son travail. On doit empêcher dans la mesure du possible qu'un maître de l'ouvrage partage le travail en de trop nombreux lots d'entreprise. L'article 5 offre aussi à l'architecte l'occasion de demander une indemnité équitable, s'il se voit imposer beaucoup de travail d'une manière injustifiable.

M. *A. Mürset, architecte,* exprime, sur mandat de M. R. Steiger, architecte, un vœu pour un complément de l'article 5. Il voudrait une adjonction au sujet du prolongement de la durée des travaux. Ce prolongement cause un préjudice à l'architecte, et ce serait pour le prévenir que l'adjonction serait rédigée comme suit : « Si la durée des travaux se prolonge d'une manière excessive pour des motifs imprévisibles, l'architecte est en droit de porter en compte les frais supplémentaires en résultant ».

M. *M. Kopp, président,* ne croit pas que cette adjonction soit réellement nécessaire et utile. En général la durée des travaux est plutôt trop courte. En outre il sera difficile de définir ce qu'est une durée trop longue des travaux. M. Kopp propose, pour ces motifs, d'écarter la proposition de M. Steiger.

M. *R. Christ, architecte,* soutient la proposition de M. Steiger.

M. *F. Hiller, architecte,* estime que l'adjonction devrait être écartée. Ces retards dans la construction étaient dus à la guerre, durant ces dernières années. Il ne s'agit pas de circonstances normales, et il ne faut pas établir des articles qui ne seraient appliqués que dans les cas exceptionnels.

M. *W. Stäubli, ingénieur,* combat la rédaction de l'article 8. La décision telle qu'elle est prévue par la commission pour le tarif d'honoraires, est une chose impossible. C'est seulement le Tribunal qui peut prononcer une telle décision. M. Stäubli propose la rédaction suivante : « On peut en appeler à la commission du Tarif d'honoraires. »

M. *M. Kopp, président,* fait constater qu'il est prévu que la commission du tarif d'honoraires ne doit être appelée comme instance de décision ou de consultation que si le maître de l'ouvrage est d'accord.

M. *P. Sarasin* propose la rédaction suivante : ... « La S. I. A. peut être appelée, et sa commission du tarif d'honoraires donne l'interprétation exacte. »

M. *R. Christ, architecte,* maintiendrait le mot « décide ». Se référant aux concours d'architecture, il se prononce pour une expression claire, même si elle n'est pas tout à fait juste au point de vue juridique.

M. *A. Zwygart, ingénieur,* appuie la proposition de M. Stäubli et propose la phrase suivante : ... « La commission du tarif d'honoraires de la S. I. A. peut être appelée à titre consultatif. »

M. *J.-P. Vouga, architecte,* soutient la proposition de M. Steiger, architecte. Ce n'est pas toujours la faute de l'architecte, si la durée de construction est prolongée.

M. *H. Daxelhofer,* architecte : La section de Berne a examiné le projet et d'une manière générale lui donne son accord. Cependant il faut dire, à propos du titre, que le terme « Merkblatt » n'a pas assez de vigueur. La section bernoise préférerait voir substituer un autre mot à « Merkblatt », tel que « Beilage », « Erläuterung » ou « Wegleitung ».

M. *M. von Salis, ingénieur* : Si la proposition de MM. R. Steiger, architecte, et M. Mürset est adoptée on devrait