

**Zeitschrift:** Bulletin technique de la Suisse romande  
**Band:** 72 (1946)  
**Heft:** 21

**Artikel:** Le calcul d'un tube cylindrique de révolution à épaisseur de paroi variable  
**Autor:** Tâche, J.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-54636>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 29.03.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# BULLETIN TECHNIQUE

## DE LA SUISSE ROMANDE

Paraissant tous les 15 jours

## ABONNEMENTS :

Suisse : 1 an, 17 francs  
Etranger : 20 francs

## Pour sociétaires :

Suisse : 1 an, 14 francs  
Etranger : 17 francsPrix du numéro :  
75 centimesPour les abonnements  
s'adresser à la librairie  
F. Rouge & C<sup>ie</sup>, à Lausanne.

Organe de la Société suisse des ingénieurs et des architectes, des Sociétés vaudoise et genevoise des ingénieurs et des architectes, de l'Association des anciens élèves de l'Ecole polytechnique de l'Université de Lausanne et des Groupes romands des anciens élèves de l'Ecole polytechnique fédérale.

COMITÉ DE PATRONAGE. — Président : R. NEESER, ingénieur, à Genève ; Vice-président : G. EPITAUX, architecte, à Lausanne ; secrétaire : J. CALAME, ingénieur, à Genève. Membres : *Fribourg* : MM. L. HERTLING, architecte ; P. JOYE, professeur ; *Vaud* : MM. F. CHENAU, ingénieur ; E. ELSKES, ingénieur ; E. D'OKOLSKI, architecte ; A. PARIS, ingénieur ; CH. THÉVENAZ, architecte ; *Genève* : MM. L. ARCHINARD, ingénieur ; E. MARTIN, architecte ; E. ODIER, architecte ; *Neuchâtel* : MM. J. BÉGUIN, architecte ; G. FURTER, ingénieur ; R. GUYE, ingénieur ; *Valais* : M. J. DUBUIS, ingénieur ; A. DE KALBERMATTEN, architecte.

RÉDACTION : D. BONNARD, ingénieur, Case postale Chauderon 475, LAUSANNE.

## Publicité :

## TARIF DES ANNONCES

Le millimètre  
(larg. 47 mm.) 20 cts.  
Tarif spécial pour fractions  
de pages.

En plus 20 % de majoration de guerre

Rabais pour annonces  
répétées.

ANNONCES-SUISSES S.A.

5, rue Centrale  
LAUSANNE  
& Succursales.

## CONSEIL D'ADMINISTRATION DE LA SOCIÉTÉ ANONYME DU BULLETIN TECHNIQUE

A. STUCKY, ingénieur, président ; M. BRIDEL ; G. EPITAUX, architecte ; R. NEESER, ingénieur.

SOMMAIRE : *Le calcul d'un tube cylindrique de révolution à épaisseur de paroi variable*, par J. TACHE, ingénieur E. I. L. — LES CONGRÈS : *Association suisse pour l'aménagement des eaux* ; *Assemblées générales de l'Association suisse des électriciens et de l'Union des centrales suisses d'électricité*, à Soleure ; *Assemblée générale de l'Association des anciens élèves de l'Ecole polytechnique fédérale*. — DIVERS : *Plan d'aménagement des forces hydrauliques suisses*. — BIBLIOGRAPHIE. — SERVICE DE PLACEMENT.

## Le calcul d'un tube cylindrique de révolution à épaisseur de paroi variable

par J. TÂCHE, ingénieur E. I. L.

## Introduction.

La ligne élastique d'un tube cylindrique de révolution à épaisseur variable est exprimée par une équation différentielle très difficile à résoudre. Les solutions numériques proposées par plusieurs auteurs<sup>1</sup> sont ardues et exigent des connaissances spéciales.

Pour mettre ce problème à la portée d'un plus grand nombre de constructeurs, nous l'avons résolu algébriquement. La solution que nous proposons n'exige qu'un minimum de connaissances mathématiques : savoir appliquer des formules algébriques, connaître l'emploi de la règle à calcul, savoir résoudre un système d'équations linéaires.

## Notations.

- $b$  Rayon moyen du tube avant déformation.  
 $h$  Epaisseur variable de la paroi du tube.  
 $M$  Valeur algébrique par unité d'angle du moment fléchissant agissant sur la section droite du tube.

<sup>1</sup> Cette question a déjà fait l'objet récemment de deux remarquables études publiées par M. le professeur A. Dumas et M. J. Paschoud, ingénieur, dans nos numéros 15 et 16 de juillet 1945. Ces auteurs avaient montré l'intérêt que présente ce problème non seulement pour l'ingénieur mécanicien, mais également pour l'ingénieur civil et toute personne se préoccupant, à un titre quelconque, de résistance des matériaux ; ils ont proposé deux solutions qui furent très remarquées. Nous avons jugé opportun de poursuivre dans nos colonnes l'étude de cette question en publiant aujourd'hui le mémoire de M. J. Tâche, ingénieur ; sa méthode de calcul diffère sensiblement de celles des exposés précédents, elle se donne pour être plus simple et plus accessible à l'ingénieur praticien. A ce titre seul elle méritait d'être connue. (Réd.)

$T$  Valeur algébrique par unité d'angle<sup>1</sup> de l'effort tranchant agissant sur la section droite du tube.

$L$  Valeur algébrique par unité d'angle de la force axiale.

$p_i$  Pression par unité de surface agissant à l'intérieur du tube.

$p_e$  Pression par unité de surface agissant à l'extérieur du tube.

$n = \frac{1}{m}$  L'inverse du coefficient de Poisson.

$E$  Module d'élasticité.

Les expressions ci-dessus sont considérées comme positives lorsque leur action se fait dans le sens des flèches de la figure 1.

Cette étude est intimement liée à notre étude « Déformation circulaire d'un tube cylindrique de révolution » publiée dans le *Bulletin technique des Ateliers de Constructions Mécaniques de Vevey S. A.*, années 1944 et suivantes. Ces bulletins seront désignés par B. V. et les numéros des formules et des figures parues dans ces bulletins seront surmontés d'un astérisque.

Pour toutes les autres notations, nos lecteurs voudront bien se reporter à celles des B. V.

<sup>1</sup> Nous attirons l'attention sur le fait que  $M$  et  $T$  expriment le moment fléchissant et l'effort tranchant par unité d'angle et non pas par unité de longueur mesurée sur la circonférence de rayon  $b$ , selon la notation classique admise par la majorité des auteurs.

Cette nouvelle notation présente le même avantage que la notation classique : celui de faire disparaître le nombre  $\pi$  de toutes les formules. Par contre, avec cette nouvelle notation, le moment fléchissant reste homogène à un couple (force  $\times$  longueur) et l'effort tranchant, à une force ; tandis qu'avec la notation classique, le moment fléchissant devient homogène à une force et l'effort tranchant à une force divisée par une longueur.

En outre, avec la nouvelle notation, les valeurs de  $M$  et  $T$  sont indépendantes du rayon de la circonférence sur laquelle ils agissent.

**Exposé de la méthode.**

Considérons le tronçon du tube de la figure 1 compris entre deux perturbations consécutives caractérisées par les efforts tranchants  $T_0$  et  $T_1$  et les moments fléchissants  $M_0$  et  $M_1$ . Ce tube de rayon moyen constant  $b$  a une épaisseur de paroi  $h$  que nous supposons être une fonction de la variable indépendante  $x$ . On admet en outre que ce tube est soumis à une traction longitudinale  $L$ , à une pression intérieure  $p_i$  et à une pression extérieure  $p_e$ . Si l'on se reporte à l'étude parue dans le B. V. 1944-1, il est facile de se rendre compte que les équations fondamentales établies pour un tube à paroi d'épaisseur constante sont encore valables pour le tube à paroi d'épaisseur variable.

Ces équations sont les suivantes :

$$(41^*) \quad y = y_c + \frac{b}{hE} \frac{dT}{dx}$$

$$(46^*) \quad T = \frac{dM}{dx}$$

$$(89^*) \quad \frac{d^2y}{dx^2} = - \frac{(1 - n^2) 12M}{bh^3 E} \theta.$$

Remarquons que la relation (41\*) n'est pas rigoureusement exacte. Elle est entachée d'une petite erreur provenant du fait que les pressions  $p_i$  et  $p_e$  n'agissent plus sur des surfaces cylindriques. Nous avons négligé intentionnellement l'influence de la composante axiale de  $p_i$  et  $p_e$  afin de ne pas compliquer outre mesure le problème qui malgré cette simplification est déjà très ardu.

L'équation (89\*) peut s'écrire

$$(1) \quad \frac{(1 - n^2) 12 \theta M}{bE} = - h^3 \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Dérivons deux fois de suite cette équation par rapport à  $x$ , on obtient

$$(2) \quad \frac{(1 - n^2) 12 \theta}{bE} \frac{d^2M}{dx^2} = \begin{cases} -h^3 \frac{d^4y}{dx^4} - 6h^2 \frac{dh}{dx} \frac{d^3y}{dx^3} \\ - \left[ 6h \left( \frac{dh}{dx} \right)^2 + 3h^2 \frac{d^2h}{dx^2} \right] \frac{d^2y}{dx^2}. \end{cases}$$

En dérivant l'équation (46\*) on a

$$(3) \quad \frac{dT}{dx} = \frac{d^2M}{dx^2}.$$

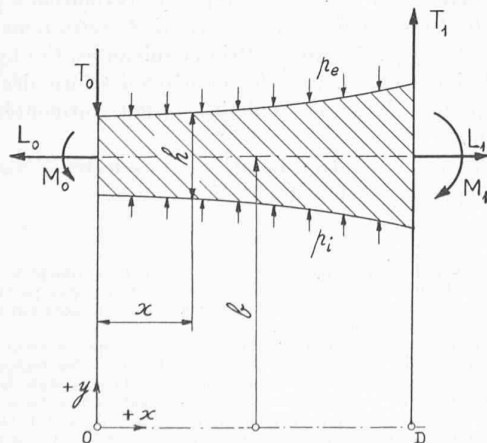


Fig. 1.

En éliminant  $\frac{dT}{dx}$  et  $\frac{d^2M}{dx^2}$  entre les équations (2), (3) et (41\*), cette dernière peut s'écrire

$$(4) \quad \left. \begin{aligned} &\frac{d^4y}{dx^4} + \frac{6}{h} \frac{dh}{dx} \frac{d^3y}{dx^3} \\ &+ \left[ \frac{6}{h^2} \left( \frac{dh}{dx} \right)^2 + \frac{3}{h} \frac{d^2h}{dx^2} \right] \frac{d^2y}{dx^2} \\ &+ \frac{12(1 - n^2)\theta}{b^2 h^2} y \end{aligned} \right\} = \frac{12(1 - n^2)\theta}{b^2 h^2} y_c.$$

Telle est l'équation différentielle de la ligne élastique d'un tube à épaisseur de paroi variable soumis aux forces extérieures représentées sur la figure 1.

La valeur de  $y_c$  est donnée par l'équation

$$(42^*) \quad y_c = \frac{b}{hE} \left( -n \frac{L}{b} + a \varphi_i p_i - c \varphi_e p_e \right).$$

Pour plus de généralité, on peut envisager que  $L$ ,  $p_i$  et  $p_e$  sont des fonctions continues de la seule variable  $x$ . Ainsi, par exemple,  $L$  peut varier avec  $x$  sous l'influence du poids propre du tube ou de la force centrifuge. La seule condition qu'on impose à ces valeurs est d'être uniformément réparties sur toute la circonférence du tube.

Désignons par  $F(x)$  la solution particulière de l'équation différentielle (4) avec second membre.

D'autre part on peut se représenter que la solution générale de l'équation différentielle sans second membre sera de la forme

$$(5) \quad y = C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) + C_3 f_3(x) + C_4 f_4(x).$$

Dans cette équation,  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  et  $C_4$  sont des constantes d'intégration qui seront déterminées par exemple par les perturbations agissant aux deux extrémités du tube. Si ces perturbations n'existent pas, la ligne élastique (5) n'existe pas non plus.

Si donc  $L$ ,  $p_i$  et  $p_e$  agissent seuls, la ligne élastique du tube sera

$$(6) \quad y = F(x).$$

Si  $T_0$ ,  $M_0$ ,  $T_1$  et  $M_1$  agissent seuls, la ligne élastique sera donnée par la relation (5).

Lorsque toutes les forces extérieures représentées sur la figure 1 agissent simultanément, la ligne élastique sera

$$(7) \quad y = C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) + C_3 f_3(x) + C_4 f_4(x) + F(x).$$

C'est la solution générale de l'équation différentielle (4) avec second membre.

La grande difficulté est de résoudre cette équation.

Certains auteurs ont étudié partiellement ce problème en négligeant le second membre.

Dans sa remarquable étude citée au début de cet article, M. J. Paschoud a montré que l'équation différentielle sans second membre peut être résolue lorsque l'épaisseur du tube varie suivant la fonction  $(a + bx)^2$ , où  $a$  et  $b$  sont des constantes quelconques.

Cependant nous n'avons nullement l'intention d'inviter nos lecteurs à suivre les traces de M. Paschoud et de les conduire jusqu'aux sommets des hautes mathématiques.

Notre but est d'obtenir des formules algébriques aussi simples que possible, pouvant être appliquées par tout technicien sachant se servir d'une règle à calcul.

Mais que faire en face de cette équation superbe qui garde

si jalousement son secret ? La mutiler par des hypothèses plus ou moins heureuses ou l'abandonner ? Nous choisirons la seconde solution et tâcherons d'arriver au but par un autre chemin.

Faut-il commencer par étudier le tube très long ou le tube très court ?

Le tube très long peut paraître à première vue plus simple, car en principe le nombre des constantes d'intégration est réduit de moitié : deux au lieu de quatre.

Mais on se heurte toujours à la difficulté fondamentale : résoudre l'équation différentielle (4).

Par contre, si l'on commence par étudier le tube court, tout se simplifie. En effet, si le tube est court on est en droit d'admettre comme première approximation que sa ligne élastique est une droite.

Nous poserons donc

$$(8) \quad y = A_0 + A_1x$$

et appliquerons la méthode des intégrations successives dont le principe a été exposé à la page 38 du B. V. 1945-1.

Partant de l'équation (41\*), dans laquelle on admet que  $y$  est une fonction linéaire, on obtient  $T$  par une première intégration ; l'intégration de (46\*) nous donne la valeur de  $M$  et la double intégration de (89\*) fournit une seconde valeur de  $y$  plus précise que celle primitivement admise. On peut alors recommencer un second cycle d'intégrations (41\*)-(46\*)-(89\*) puis un troisième cycle, et ainsi de suite. A chaque cycle les valeurs qu'on se propose de calculer s'enrichissent d'un nouveau terme qui les rend de plus en plus précises. Ainsi la ligne élastique, admise au début une droite, devient une courbe qui se rapproche de plus en plus de la ligne élastique réelle. Les formules augmentant de précision peuvent alors être appliquées à des tubes de plus en plus longs. Cette méthode qui a donné d'excellents résultats pour des tubes à paroi d'épaisseur constante conduit également à des équations élémentaires faciles à intégrer lorsqu'elle est appliquée à des tubes à paroi d'épaisseur linéairement variable.

Toutefois dès le second cycle d'intégrations, les formules algébriques deviennent de plus en plus longues et d'une application si laborieuse qu'il est nécessaire d'avoir recours à une méthode auxiliaire.

Celle-ci est basée sur le principe suivant : pour construire un tube, c'est-à-dire pour en vérifier les dimensions d'après les efforts auxquels il est soumis, il n'est pas indispensable d'établir dans chaque cas particulier l'équation de la ligne élastique.

Cette remarque de la plus haute importance va nous permettre de simplifier d'une façon notable les calculs.

Pour mieux faire comprendre le principe de cette méthode auxiliaire, prenons l'exemple d'une poutre rectiligne de section constante à deux appuis simples, soumise à une force concentrée agissant en un endroit quelconque de cette poutre. Tout technicien connaît les formules pour calculer le moment fléchissant maximum et la flèche au droit de la force. Ayant calculé ces valeurs il est en possession de toutes les données pour dimensionner judicieusement la poutre soit au point de vue de sa résistance mécanique, soit au point de vue de son élasticité, et pourtant il n'a pas eu à établir la ligne élastique de la poutre. Bien entendu, la formule dont il s'est servi pour calculer la flèche a été établie sur la base de la ligne élastique, mais le praticien n'a plus à s'inquiéter de cette dernière, étant en possession d'une formule algébrique qui lui donne directement la flèche.

Il en va de même pour le calcul d'un tube.

La méthode auxiliaire à laquelle nous venons de faire allusion est basée sur l'emploi des coefficients de déformation  $k$  qui permettent d'établir des relations linéaires très simples entre les moments fléchissants, les efforts tranchants, les flèches et les tangentes à la ligne élastique qui existent aux deux extrémités du tube.

Aux pages 48 et suivantes du numéro 1 de 1945 du B. V., nous avons exposé les principales propriétés des coefficients  $k$ , pour un tube à paroi d'épaisseur constante.

Nous avons pu établir des relations analogues pour un tube à paroi d'épaisseur linéairement variable. Celles-ci nous permettent de calculer les flèches et les moments fléchissants aux deux extrémités du tube, valeurs nécessaires et suffisantes pour déterminer les tensions tangentielles et longitudinales en ces deux endroits. En pratique et dans la majorité des cas, la connaissance de ces tensions sera suffisante pour juger si le tube est bien dimensionné. S'il y a doute, on aura la faculté de calculer d'autres points, soit graphiquement, soit algébriquement, en se basant sur les propriétés des coefficients  $k$ , mais sans avoir à établir l'équation de la ligne élastique, laquelle, nous le savons, est beaucoup trop compliquée pour être exprimée algébriquement.

Les coefficients  $k$  permettent donc d'aller droit au but sans passer par la ligne élastique.

En résumé, notre solution s'écarte résolument des chemins battus. Au lieu d'intégrer l'équation générale, synthèse des équations fondamentales, et d'établir ainsi l'équation de la ligne élastique pour un tube long, nous laissons de côté l'équation générale et intégrons successivement les équations fondamentales en les appliquant à un tube court. Nous obtenons ainsi des formules algébriques qui permettent au constructeur de dimensionner son tube sans être obligé d'établir l'équation de la ligne élastique.

Notre étude s'adressant tout spécialement aux praticiens, nous donnerons d'abord les formules générales pour le calcul d'un tube à paroi d'épaisseur linéairement variable, puis nous indiquerons la façon de les employer avec exemples à l'appui.

A remarquer que la détermination des coefficients  $k$  nécessite des calculs, sinon difficiles, tout au moins très ardu. Ceci n'a toutefois pas grande importance pratique, car ces calculs sont faits une fois pour toutes et conduisent à des expressions algébriques d'une application simple et rapide.

#### Formules générales.

Les formules suivantes se rapportent à la figure 2.

$$(9) \quad h_m = \frac{h_0 + h_1}{2}$$

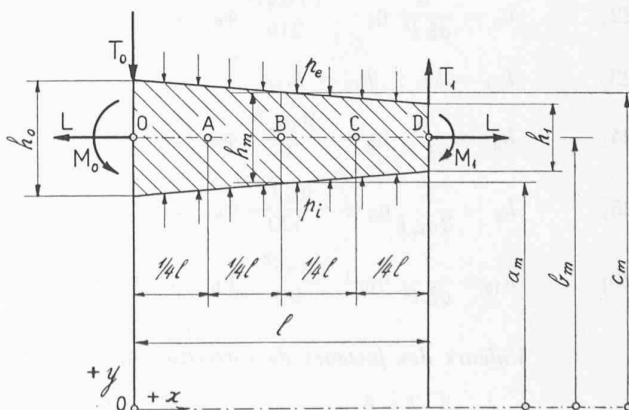


Fig. 2.

$$(10) \quad \alpha_m = \frac{\sqrt[4]{3(1-n^2)}}{\sqrt{bh_m}} = \frac{1,285}{\sqrt{bh_m}}$$

$$(11) \quad |\beta| = \frac{\text{différence entre l'épaisseur max. et l'épaisseur min.}}{\text{somme de ces deux épaisseurs}}$$

$$|\beta| = \frac{h_0 - h_1}{h_0 + h_1}$$

Flèche en O.

$$(12) \quad y_0 = \frac{2\alpha_m b}{h_m E} (-T_0 k_{1n} - \alpha_m M_0 k_{3n} - T_1 k_{5p} + \alpha_m M_1 k_{7p} + N k_{9n}).$$

Tangente en O.

$$(13) \quad \omega_0 = \frac{2\alpha_m^2 b}{h_m E} (T_0 k_{2n} + \alpha_m M_0 k_{4n} + T_1 k_{6p} - \alpha_m M_1 k_{8p} - N k_{10n}).$$

Flèche en D.

$$(14) \quad y_1 = \frac{2\alpha_m b}{h_m E} (T_0 k_{5n} + \alpha_m M_0 k_{7n} + T_1 k_{1p} - \alpha_m M_1 k_{3p} + N k_{9p}).$$

Tangente en D.

$$(15) \quad \omega_1 = \frac{2\alpha_m^2 b}{h_m E} (T_0 k_{6n} + \alpha_m M_0 k_{8n} + T_1 k_{2p} - \alpha_m M_1 k_{4p} + N k_{10p}).$$

Valeur de N.

$$(16) \quad N = -nL \frac{l}{b} + a_m l p_i - c_m l p_e$$

$a_m$  = rayon intérieur au milieu du tube

$c_m$  = » extérieur » »

Valeurs des coefficients k.

$$(17) \quad k_1 = \frac{2}{\alpha_m l} \eta_1 + \frac{2 \alpha_m^3 l^3}{105} \Phi_1 \dots$$

$$(18) \quad k_2 = \frac{3}{\alpha_m^2 l^2} \eta_2 + \frac{11 \alpha_m^2 l^2}{105} \Phi_2 \dots$$

$$(19) \quad k_3 = k_2.$$

$$(20) \quad k_4 = \frac{6}{\alpha_m^3 l^3} \eta_4 + \frac{26 \alpha_m l}{35} \Phi_4 \dots$$

$$(21) \quad k_5 = \frac{1}{\alpha_m l} \eta_5 - \frac{\alpha_m^3 l^3}{70} \Phi_5 \dots$$

$$(22) \quad k_6 = \frac{3}{\alpha_m^2 l^2} \eta_6 - \frac{13 \alpha_m^2 l^2}{210} \Phi_6 \dots$$

$$(23) \quad k_{7p} = k_{6n}; \quad k_{7n} = k_{6p}.$$

$$(24) \quad k_8 = \frac{6}{\alpha_m^3 l^3} \eta_8 - \frac{9 \alpha_m l}{35} \Phi_8 \dots$$

$$(25) \quad k_9 = \frac{1}{2\alpha_m l} \eta_9 + \frac{\alpha_m^3 l^3}{420} \Phi_9 \dots$$

$$(26) \quad k_{10} = \frac{1}{\alpha_m^2 l^2} \eta_{10} + \frac{\alpha_m l^2}{90} \Phi_{10} \dots$$

Valeurs des facteurs de correction  $\eta$ .

$$(27) \quad \eta_1 = \frac{3}{2} \frac{2+\beta}{3-\beta^2}$$

$$(28) \quad \eta_2 = \frac{3+\beta}{3-\beta^2}$$

$$(29) \quad \eta_4 = \frac{3}{3-\beta^2}$$

$$(30) \quad \eta_5 = \eta_4.$$

$$(31) \quad \eta_6 = \eta_2.$$

$$(32) \quad \eta_8 = \eta_4.$$

$$(33) \quad \eta_9 = \frac{3(1+\beta)}{3-\beta^2}$$

$$(34) \quad \eta_{10} = \frac{3\beta}{3-\beta^2}$$

Valeur des facteurs de correction  $\Phi$ .

$$(35) \quad \Phi_1 = \frac{7}{2^6 \beta^6 (1-\beta)(3-\beta^2)^2} \left( F_1 + \frac{15}{2\beta} G_1 \text{Lg} \frac{1+\beta}{1-\beta} \right)$$

$$F_1 = -135 - 225\beta + 75\beta^2 + 165\beta^3 - 77\beta^4 + 5\beta^5 + 177\beta^6 + 47\beta^7 - 32\beta^8$$

$$G_1 = (1+\beta)^3(1-\beta)(9-3\beta-2\beta^2+6\beta^3-3\beta^4+\beta^5).$$

$$(35 \text{ bis}) \quad \Phi_1 = \frac{9}{2(1-\beta)(3-\beta^2)^2} \left( \begin{matrix} 2+\beta-\beta^2-0,40972\beta^3- \\ -0,17508\beta^4-0,16835\beta^5 \dots \end{matrix} \right)$$

$$(36) \quad \Phi_2 = \frac{21}{2^4 11 \beta^6 (1-\beta)(3-\beta^2)^2} \left( F_2 + \frac{15}{2\beta} G_2 \text{Lg} \frac{1+\beta}{1-\beta} \right)$$

$$F_2 = -45 - 15\beta + 135\beta^2 + 25\beta^3 - 139\beta^4 + 7\beta^5 + 129\beta^6 + 15\beta^7 - 32\beta^8.$$

$$G_2 = (1+\beta)^4(1-\beta)^3(3-2\beta+\beta^2).$$

$$(36 \text{ bis}) \quad \Phi_2 = \frac{9}{11(1-\beta)(3-\beta^2)^2} \left( \begin{matrix} 11+6\beta-4\beta^2-1,111\beta^3+ \\ +0,0202\beta^4-0,1414\beta^5 \dots \end{matrix} \right)$$

$$(37) \quad \Phi_4 = \frac{7}{2^4 13 \beta^6 (1-\beta)^2 (3-\beta^2)^2} \left( F_4 + \frac{45}{2\beta} G_4 \text{Lg} \frac{1+\beta}{1-\beta} \right)$$

$$F_4 = -45 + 90\beta + 120\beta^2 - 330\beta^3 - 54\beta^4 + 438\beta^5 + 168\beta^6 - 294\beta^7 - 93\beta^8 + 80\beta^9$$

$$G_4 = (1+\beta)^4(1-\beta)^6.$$

$$(37 \text{ bis}) \quad \Phi_4 = \frac{1}{13(1-\beta)^2(3-\beta^2)^2} \left( \begin{matrix} 117-24\beta-85\beta^2+19\beta^3+ \\ +8,7272\beta^4-1,4545\beta^5 \dots \end{matrix} \right)$$

$$(38) \quad \Phi_5 = \frac{7}{2^4 3 \beta^6 (3-\beta^2)^2} \left( F_5 - \frac{15}{2\beta} G_5 \text{Lg} \frac{1+\beta}{1-\beta} \right)$$

$$F_5 = 135 - 195\beta^2 + 37\beta^4 + 63\beta^6$$

$$G_5 = (1+\beta)^2(1-\beta)^2(9+2\beta^2+\beta^4).$$

$$(38 \text{ bis}) \quad \Phi_5 = \frac{1}{(3-\beta^2)^2} (9-2\beta^2-0,5050\beta^4-0,22843\beta^6 \dots)$$

$$(39) \quad \Phi_6 = \frac{21}{2^3 13 \beta^6 (3-\beta^2)^2} \left( F_6 - \frac{15}{2\beta} G_6 \text{Lg} \frac{1+\beta}{1-\beta} \right)$$

$$F_6 = 45 + 60\beta - 75\beta^2 - 100\beta^3 + 39\beta^4 + 32\beta^5 + 23\beta^6 + 8\beta^7$$

$$G_6 = (1+\beta)^4(1-\beta)^2(3-2\beta+\beta^2).$$

(39 bis)  $\Phi_6 = \frac{3}{13(3-\beta^2)^2} (39 + 3\beta - 8\beta^2 - 1,3333\beta^3 - 1,4545\beta^4 - 0,6060\beta^5 \dots)$

(40)  $\Phi_8 = \frac{7}{2^3 3^2 \beta^6 (3-\beta^2)^2} (F_8 - \frac{45}{2\beta} G_8 \text{Lg} \frac{1+\beta}{1-\beta})$

$F_8 = 45 - 165\beta^2 + 219\beta^4 - 27\beta^6$

$G_8 = (1 + \beta)^4 (1 - \beta)^4 = (1 - \beta^2)^4.$

(40 bis)  $\Phi_8 = \frac{1}{9(3-\beta^2)^2} (81 - 16\beta^2 - 1,4545\beta^4 - 5,5856\beta^6 - 0,11188\beta^8 \dots)$

(41)  $\Phi_9 = \frac{7}{16\beta^5(3-\beta^2)^2} (F_9 - \frac{15}{2\beta} G_9 \text{Lg} \frac{1+\beta}{1-\beta})$

$F_9 = 315 + 465\beta - 210\beta^2 - 430\beta^3 + 3\beta^4 + 33\beta^5 - 48\beta^6$

$G_9 = (1 + \beta)^3 (1 - \beta) (21 - 11\beta + \beta^2 + \beta^3).$

(41 bis)  $\Phi_9 = \frac{\beta^2}{(3-\beta^2)^2} (9 + 7\beta + 4,3333\beta^2 + 3,9090\beta^3 + 2,8125\beta^4 \dots)$

(42)  $\Phi_{10} = \frac{3}{16\beta^5(3-\beta^2)^2} (F_{10} - \frac{15}{2\beta} G_{10} \text{Lg} \frac{1+\beta}{1-\beta})$

$F_{10} = 315 - 1110\beta^2 - 540\beta^3 + 543\beta^4 + 180\beta^5 - 128\beta^6$

$G_{10} = (1 + \beta)^3 (21 - 63\beta + 45\beta^2 - 3\beta^3 - 4\beta^4).$

(42 bis)  $\Phi_{10} = \frac{3\beta^2}{7(3-\beta^2)^2} (21 + 16\beta + 11\beta^2 + 10,9090\beta^3 + 9\beta^4 + 8,7645\beta^5 \dots)$

Les formules *bis* ont été obtenues en développant en série l'expression  $\text{Lg} \frac{1+\beta}{1-\beta}$ ; elles pourront être utilisées lorsque  $\beta$  est voisin de zéro.

Pratiquement, pour déterminer la valeur des coefficients  $\varphi$ , on n'utilisera pas les formules ci-dessus, mais on se servira de courbes que chaque constructeur peut établir sur du papier millimétré en utilisant le tableau suivant :

Commentaires.

Dans les quatre formules (12), (13), (14) et (15), les coefficients  $k$  sont affectés d'un second indice  $n$  ou  $p$ .

L'indice  $n$  signifie que le coefficient  $k$  doit être calculé en attribuant à  $\beta$  une valeur *negative*, la valeur absolue de  $\beta$  étant donnée par la formule (41).

L'indice  $p$  signifie que le coefficient  $k$  doit être calculé en attribuant à  $\beta$  une valeur *positive*.

Toutes les autres valeurs figurant dans les formules sont des valeurs algébriques; en particulier  $M_0, T_0, M_1, T_1, L, p_i$  et  $p_e$  seront considérés comme positifs si leur sens est celui donné par les flèches de la figure 2, et comme négatifs dans le cas contraire.

L'extrémité du tube où l'épaisseur de sa paroi est la plus grande sera désignée par *extrémité épaisse*, l'autre par *extrémité mince*.

Les quatre formules (12), (13), (14) et (15) sont valables pour la figure 2, c'est-à-dire lorsque l'extrémité épaisse est à gauche, à l'origine 0 des axes.

On remarque que tous les coefficients qui se rapportent aux perturbations agissant à l'extrémité épaisse sont affectés de l'indice  $n$  et ceux se rapportant aux perturbations agissant à l'extrémité mince, de l'indice  $p$ .

Donc, dans le cas où l'extrémité mince se trouve à gauche, à l'origine 0, les quatre formules sont valables à la condition de permuter les indices  $n$  et  $p$ .

Comparons les coefficients  $k$  avec ceux valables pour un tube d'épaisseur de paroi constante, formules (372 bis\*) et suivantes.

On constate que ces coefficients se composent des mêmes termes mais affectés des facteurs  $\eta$  et  $\varphi$ . Pour cette raison, ceux-ci sont appelés *facteurs de correction*; ce sont eux qui tiennent compte de la variation de l'épaisseur de la paroi. En effet,  $\eta$  et  $\varphi$  sont des facteurs numériques fonction de la seule variable  $\beta$ .

Si l'on suppose que le tube est à épaisseur de paroi constante,  $\beta$  est égal à zéro; tous les facteurs  $\eta$  et  $\varphi$  sont égaux à l'unité, à l'exception de  $\eta_{10}, \varphi_9$  et  $\varphi_{10}$  qui sont nuls. On obtient dans ce cas les formules établies pour le tube à épaisseur de paroi constante.

En pratique, la connaissance des flèches  $y_0$  et  $y_1$  et des tangentes  $\omega_0$  et  $\omega_1$ , aux deux extrémités du tube, est suffisante pour tracer la ligne élastique du tube. Toutefois, si

$\beta$	-1	-0,9	-0,8	-0,7	-0,6	-0,5	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	0
$\Phi_1$	0,2188	0,280	0,338	0,395	0,451	0,515	0,585	0,662	0,755	0,864	1
$\Phi_2 = \Phi_3$	0,2386	0,295	0,348	0,402	0,455	0,515	0,582	0,660	0,750	0,862	1
$\Phi_4$	0,2356	0,281	0,326	0,373	0,422	0,478	0,545	0,625	0,712	0,841	1
$\Phi_5$	1,4583	1,420	1,330	1,250	1,176	1,120	1,075	1,043	1,018	1,005	1
$\Phi_6$	1,6154	1,440	1,310	1,215	1,140	1,088	1,045	1,020	1,003	0,994	1
$\Phi_8$	1,7500	1,548	1,396	1,275	1,195	1,129	1,080	1,044	1,019	1,005	1
$\Phi_9$	0,8750	0,711	0,548	0,440	0,296	0,205	0,133	0,076	0,035	0,009	0
$\Phi_{10}$	0,9375	0,743	0,558	0,422	0,303	0,209	0,134	0,077	0,036	0,009	0
$\beta$	+0,1	+0,2	+0,3	+0,4	+0,5	+0,6	+0,7	+0,8	+0,9	+1	
$\Phi_1$	1,169	1,382	1,670	2,044	2,585	3,388	4,655	6,84	11,96	$\infty$	
$\Phi_2 = \Phi_3$	1,175	1,405	1,712	2,142	2,78	3,79	5,56	9,25	20,8	$\infty$	
$\Phi_4$	1,206	1,510	1,905	2,522	3,52	5,32	9,12	19,5	73,2	$\infty$	
$\Phi_5$	1,005	1,018	1,043	1,075	1,120	1,178	1,250	1,329	1,420	1,4583	
$\Phi_6$	1,012	1,035	1,066	1,110	1,166	1,236	1,325	1,425	1,540	1,6154	
$\Phi_8$	1,005	1,019	1,044	1,080	1,129	1,195	1,275	1,396	1,548	1,7500	
$\Phi_9$	0,011	0,048	0,124	0,254	0,475	0,845	1,485	2,66	5,12	14	
$\Phi_{10}$	0,011	0,048	0,124	0,258	0,485	0,875	1,59	3,05	6,73	$\infty$	

dans certains cas particuliers on désire calculer des points intermédiaires, on pourra avoir recours à la méthode exposée aux pages 49 et 50 du B. V. 1945-1.

La courbe des moments fléchissants sera définie par les deux valeurs  $M_0$  et  $M_1$  et par  $T_0$  et  $T_1$  représentant les tangentes à la courbe des moments fléchissants aux endroits  $O$  et  $D$ .

Pour tracer plus exactement cette courbe, on peut calculer les moments aux endroits  $A$ ,  $B$  et  $C$  en utilisant les formules suivantes :

$$(43) \quad M_A = M_0 \psi_{1/4n} + l T_0 \theta_{1/4n} + M_1 \psi_{3/4p} - l T_1 \theta_{3/4p} - l N \xi_{1/4}$$

$$(44) \quad M_B = M_0 \psi_{1/2n} + l T_0 \theta_{1/2n} + M_1 \psi_{1/2p} - l T_1 \theta_{1/2p} - l N \xi_{1/2}$$

$$(45) \quad M_C = M_0 \psi_{3/4n} + l T_0 \theta_{3/4n} + M_1 \psi_{1/4p} - l T_1 \theta_{1/4p} - l N \xi_{3/4}$$

Dans ces formules,  $\psi$ ,  $\theta$  et  $\xi$  ont les valeurs ci-après :

$$(46) \quad \psi_{1/4} = \frac{324 + 27\beta - 108\beta^2}{128(3 - \beta^2)}$$

$$(47) \quad \psi_{1/2} = \frac{12 + 3\beta - 4\beta^2}{8(3 - \beta^2)}$$

$$(48) \quad \psi_{3/4} = \frac{60 + 27\beta - 20\beta^2}{128(3 - \beta^2)}$$

$$(49) \quad \theta_{1/4} = \frac{108 + 27\beta - 27\beta^2}{256(3 - \beta^2)}$$

$$(50) \quad \theta_{1/2} = \frac{6 + 3 - \beta^2}{16(3 - \beta^2)}$$

$$(51) \quad \theta_{3/4} = \frac{3(12 + 9\beta - \beta^2)}{256(3 - \beta^2)}$$

$$(52) \quad \xi_{1/4} = \frac{9\beta^2}{256(3 - \beta^2)}$$

$$(53) \quad \xi_{1/2} = \frac{\beta^2}{16(3 - \beta^2)}$$

$$(54) \quad \xi_{3/4} = \xi_{1/4}$$

$$\psi_{1/4n} = \psi_{1/4} \quad \text{calculé en considérant } \beta \text{ comme négatif;}$$

$$\psi_{1/4p} = \psi_{1/4} \quad \text{calculé en considérant } \beta \text{ comme positif.}$$

Cette remarque s'applique à tous les autres coefficients munis des indices  $n$  ou  $p$ .

Les coefficients  $\xi$  ne sont pas affectés de ces indices, car pour leur calcul il n'y a pas lieu de faire la distinction entre  $\beta$  positif et  $\beta$  négatif, cette valeur étant au carré dans les formules des  $\xi$ .

#### Domaine de validité des formules.

Les formules ci-dessus ont été établies en supposant que l'épaisseur de la paroi du tube varie *linéairement* et qu'elle est relativement faible par rapport au rayon moyen du tube, de façon que les coefficients  $\theta$ ,  $\varphi_i$  et  $\varphi_e$  figurant dans les équations (89\*) et (42\*) puissent être considérés comme égaux à l'unité.

Le rayon moyen du tube doit être constant.

Les coefficients  $k$  sont exprimés par les deux premiers

termes de séries convergentes; pour que leur valeur soit suffisamment exacte, il faut donc que le troisième terme soit négligeable par rapport aux deux premiers. Pour se faire une idée de l'ordre de grandeur de ces troisièmes termes, il suffit de se reporter aux formules (372 bis\*), page 48 du B. V. 1945-1.

Pratiquement, la longueur du tronçon doit être telle que la valeur  $\alpha_m l$  ne soit pas supérieure à environ 1,5.

Si le tube étudié ne remplit pas cette condition, on le divisera en autant de tronçons dont chacun y satisfera.

Si le tube est pratiquement illimité, ce qui suppose que la conicité de la paroi est faible, il suffira de se rappeler que la partie active du tube, autrement dit sa partie déformable s'étend sur environ une demi-longueur d'onde (voir figure 13\*, page 36 du B. V. 1944). Le tube sera donc divisé en trois tronçons: les deux premiers satisferont à la condition  $\alpha_m l \leq 1,5$  et le dernier sera admis illimité et d'épaisseur constante égale à l'épaisseur de la paroi du tube à l'endroit de la jonction entre les deuxième et troisième tronçons.

#### Calcul des contraintes.

Ce calcul exige la connaissance de la flèche et du moment fléchissant aux endroits où l'on désire déterminer les contraintes.

Nous venons d'expliquer de quelle façon on calcule la flèche et le moment fléchissant.

On sera ainsi en possession de tous les éléments pour calculer les contraintes.

On peut en distinguer deux sortes: les tensions tangentielles et longitudinales de comparaison qui sont égales aux extensions correspondantes multipliées par le module d'élasticité et que nous désignerons par  $\sigma_t$  et  $\sigma_l$ ; les tensions principales tangentielles et longitudinales, qui seront désignées par  $t$  et  $l$ .

Faut-il construire le tube sur la base des tensions de comparaison ou sur celle des tensions principales?

Nous ne voulons pas trancher cette question très controversée, mais simplement nous borner à indiquer de quelle façon ces tensions doivent être calculées.

La tension tangentielle de comparaison se calcule par la formule (113\*):

$$(113^*) \quad \sigma_t = y \frac{E}{b}$$

La tension longitudinale de comparaison est donnée par la formule (120\*):

$$(120^*) \quad \sigma_l = -n \sigma_t + (1 - n^2) \frac{L}{bh} \pm \frac{(1 - n^2) 6M}{bh^2}$$

Dans cette formule, le signe + se rapporte à la tension longitudinale de comparaison qui existe à l'extérieur du tube, le signe - à celle qui existe à l'intérieur du tube.

Si l'on néglige le troisième terme du second membre, on obtient la tension longitudinale de comparaison existant au rayon moyen du tube.

Les tensions de comparaison et les tensions principales sont liées par les relations suivantes:

$$(55) \quad t = \frac{\sigma_t + n \sigma_l}{1 - n^2}$$

$$(56) \quad l = \frac{\sigma_l + n \sigma_t}{1 - n^2}$$

On en déduit

$$(57) \quad t = y \frac{E}{b} + n \frac{L}{bh} \pm n \frac{6M}{bh^2}$$

$$(57 \text{ bis}) \quad t = \sigma_t + nl$$

$$(58) \quad l = \frac{L}{bh} \pm \frac{6M}{bh^2}$$

Dans ces deux dernières formules, le signe + donne les tensions principales agissant à l'extérieur du tube, le signe - à l'intérieur.

Précisons que dans les formules (113\*) et (57), *y* représente la flèche totale du tube, c'est-à-dire celle qui est produite par toutes les forces extérieures représentées sur la figure 2.

Si, dans les formules (57) et (58) on supprime les derniers termes des seconds membres, on obtient les tensions au rayon moyen du tube<sup>1</sup>.

(A suivre.)

## LES CONGRÈS

### Association suisse pour l'aménagement des Eaux.

Assemblée générale du 7 septembre 1946, à Fribourg.

L'Association suisse pour l'aménagement des eaux a tenu, le 7 septembre 1946, à Fribourg, sa 35<sup>e</sup> Assemblée générale sous la présidence de M. Ringwald, ingénieur, remplaçant le président de l'Association, M. Corrodi.

La partie administrative comportant l'approbation des rapports du comité directeur, du secrétariat, des comptes et du budget fut très rapidement terminée. Les membres de l'Association avaient au préalable reçu le rapport annuel, qui, en plus de tous renseignements utiles relatifs à l'administration de l'Association, contient des textes sur l'état général de l'économie de l'énergie en Suisse, la législation y relative, l'économie hydraulique et électrique en temps de guerre, la création de possibilités de travail dans le domaine de l'électricité, la régularisation des lacs, l'électrification des chemins de fer, la navigation, etc.

A l'issue de l'assemblée générale, deux conférences remarquables furent données, la première par M. P. Joye, directeur des Entreprises électriques fribourgeoises, sur « L'utilisation des forces hydrauliques du canton de Fribourg », la seconde, par M. Bruttin, ingénieur, sur « L'Aménagement de Rossens » plus spécialement.

Au cours de l'après-midi, les participants à ce congrès visitèrent le chantier du barrage de Rossens. Le manque de place ne nous permet pas de nous étendre, dans le cadre

<sup>1</sup> Pour bien montrer l'importance du terme *nl* de la formule (57 bis), citons l'exemple suivant, tiré de l'étude de M. R.-V. Baud, docteur ès sciences, publiée dans les *Schweizer Archiv für angewandte Wissenschaft und Technik*, nos 3, 4, 9 et 10 de 1942. Cette étude très remarquable analyse les tensions qui se produisent dans un autoclave. Au point de vue documentaire elle est d'autant plus précieuse qu'elle permet la comparaison des tensions calculées et des tensions déterminées expérimentalement.

Or, on remarque à l'examen du graphique de la figure 9 f, par exemple, que la courbe des tensions calculées s'écarte très sensiblement de celle des tensions déterminées expérimentalement.

Le résultat est surprenant et de nature à réjouir tous ceux qui, ne sachant pas calculer, font fi de toute théorie et n'ont foi qu'en l'expérience.

La théorie est-elle effectivement en défaut ? Heureusement non. La différence provient simplement du fait que l'auteur a négligé le dernier terme du second membre de la formule 57 bis.

de ce bref compte rendu, sur les caractéristiques de cet aménagement et du barrage en construction<sup>1</sup>.

Nous jugeons opportun par contre de reproduire ici un bref extrait du rapport annuel de l'Association, extrait qui donne une idée claire de l'état de notre économie électrique.

#### Extrait du rapport de l'Association.

##### Usines hydroélectriques mises en service en 1945.

Usine et propriétaire	Date de la mise en service	Puissance maximum kW	Production moyenne annuelle 10 <sup>6</sup> kWh		
			Hiver <sup>1)</sup>	Eté	Total
Lucendro, sans accumul. S.A. Aar-Tessin	Févr. 1945	19 000	19,0	18,0	37,0
Albula, transform. Ville de Zurich	Juin 1945	4 600 <sup>2)</sup>	13,0	20,0	33,0 <sup>2)</sup>
Wolfenschiessen Forces Motr. d'Unterwald-le-Bas	Sept. 1945	2 800	5,0	11,0	16,0
Rapperswil-Auenstein CFF et NOK	Oct. 1945	31 155 <sup>3)</sup>	88,0	114,7	202,7 <sup>3)</sup>

<sup>1)</sup> Six mois.

<sup>2)</sup> Sans tenir compte de l'ancienne installation.

<sup>3)</sup> Puissances réduites par suite d'une diminution du remous et de la suppression d'autres usines. Puissance effective 33 700 kW, production moyenne annuelle effective 225.10<sup>6</sup> kWh.

Un assez grand nombre d'usines ont subi des extensions.

##### Grandes usines hydroélectriques en construction ou en transformation à fin 1945.

Usine et propriétaire	Date probable de la mise en exploitation	Puissance maximum kW	Production moyenne annuelle 10 <sup>6</sup> kWh		
			Hiver	Eté	Total
Obersaxen Tavanasa (Tscharbach et Petersbach) S.A. Patvag	1946	3 700	5,0	13,0	18,0
Lucendro, aménagement complet S.A. Aar-Tessin	1947	46 000	78,0 <sup>1)</sup>	—	78,0 <sup>1)</sup>
Julia Ville de Zurich	1947	46 000	40,0	100,0	140,0
Plessur, 3 <sup>e</sup> étape Ville de Coire	1947	8,300	16,0	32,0	48,0
Russein S. A. Patvag	1947	10 000	10,0	30,0	40,0
Letten, transform. Ville de Zurich	1947	2 800	8,0	11,0	19,0
La Dernier, trans. C <sup>1</sup> e F. M. Joux et Orbe	1947	9 500	2,5	2,5	5,0
Rossens, (Sarine) EEF	1948	50 000 <sup>2)</sup>	80,0 <sup>2)</sup>	108,0 <sup>2)</sup>	188,0 <sup>2)</sup>
Lavey (Rhône) Ville de Lausanne	1949	38 500 <sup>3)</sup>	59,6 <sup>3)</sup>	132,0 <sup>3)</sup>	191,6 <sup>3)</sup>

<sup>1)</sup> Sans tenir compte de la production supplémentaire des usines de Piottino et de Biaschina.

<sup>2)</sup> Sans Hauterive, y compris augmentation de la production de l'usine de l'Oelberg.

<sup>3)</sup> Sans Bois-Noir.

La puissance de pointe maximum possible aux bornes des alternateurs de toutes les usines hydroélectriques aménagées en Suisse atteignait :

<sup>1</sup> Nos lecteurs trouveront au numéro de juillet-août 1946, de la revue *Cours d'eau et énergie*, organe de l'Association suisse pour l'aménagement des eaux, de très intéressantes données sur ce sujet (Réd.).