

Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande
Band: 73 (1947)
Heft: 10

Artikel: Courbes de raccordement
Autor: Vuagnat, L.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-55133>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 30.03.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

temps correspond au produit par le facteur e^{-pt_0} de la fonction opérateur. Ces retards peuvent être dus à une certaine insensibilité des organes de réglage. Ils se répartissent sur tout le circuit de réglage, mais pour le calcul, nous admettons un régulateur et une transmission infiniment rapide et tout le retard provoqué uniquement par l'action du servomoteur, ainsi à la courbe de réponse $\Phi_{\rho\mu}$ représentée par la courbe 2 de la figure 4

$$\Phi_{\rho\mu} = 1 - e^{-\frac{(t-t_0)}{T_s}} \Big|_{t \geq t_0}$$

correspond la fonction de transfert suivante sous forme opérationnelle

$$\Phi_{\rho\mu} = \frac{e^{-pt_0}}{1 + pT_s}$$

et la courbe d'allure suivante représentée par la courbe 2 de la figure 5

$$J_{\rho\mu} = \frac{e^{-i3t_0}}{1 + j\zeta T_s}$$

Les courbes 3 des figures 16 et 17 donnent une représentation vectorielle et cartésienne de la courbe d'allure du réglage ouvert

$$J_{vv} = \frac{1}{\delta} \cdot \frac{e^{-i3t_0}}{1 + j\zeta T_s} \cdot \frac{1}{jT_a}$$

et prouve que pour

$$\left. \begin{array}{l} \delta = 5 \%, \quad T_a = 5 \text{ sec}, \quad T_s = 1 \text{ sec}, \\ t_0 = 1 \text{ sec}, \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{le réglage est} \\ \text{instable.} \end{array} \quad (A \text{ suivre.})$$

Courbes de raccordement

par L. VUAGNAT, ingénieur
au 1^{er} arrondissement des Chemins de fer fédéraux.

CD 625.113

Au début de l'ère des chemins de fer, dès que la vitesse s'éleva tant soit peu, il ne fut plus possible de maintenir les courbes dans le même plan que les alignements.

Les constructeurs furent amenés pour équilibrer la force centrifuge à donner du dévers à la voie en élevant la file de rail extérieure. Pour rattraper la différence de niveau, ils insérèrent une « rampe de surhaussement » entre l'alignement et la courbe. Primitivement cette rampe fut entièrement placée dans l'alignement, puis moitié dans l'alignement et moitié dans la courbe. Puis la voie fut ripée légèrement vers le centre de la courbe de chaque côté du point de tangence, sur quelques longueurs de rail, ce qui correspondait vaguement à une courbe de raccordement. Le succès de l'opération dépendait de l'habileté et du coup d'œil du chef d'équipe.

Ce furent Chavès et Nördling, ingénieurs à la Compagnie du Nord, qui, en 1865 et 1867, firent connaître l'emploi de la parabole cubique

$$y = Bx^3$$

comme courbe de raccordement, en démontrant que la rampe de surhaussement rectiligne exige une courbe de raccordement dont la courbure croisse proportionnelle-

ment à la longueur de l'arc et que la parabole cubique répondait à peu près à cette condition. Nördling donna en même temps une méthode de piquetage pratique et simple qui fut employée jusqu'à ces dernières années.

C'est donc de l'étude de la rampe de surhaussement et de l'adaptation de la courbure de la voie au dévers qu'est née la courbe de raccordement.

Dans les lignes qui vont suivre, nous allons refaire rapidement cette étude en donnant les formules exactes, d'abord en prenant une droite comme rampe de surhaussement, puis une courbe analytique pour généraliser le problème et arriver à une solution plus satisfaisante, tant au point de vue dynamique qu'au point de vue géométrique, pour l'établissement de la voie même.

Rappelons tout d'abord la formule du dévers.

Pour une courbe de rayon fixe R et pour une vitesse de translation V , le dévers est donné par la formule connue

$$h = d_{max} = \frac{kV^2}{R} \quad (1)$$

où k est un coefficient qui varie suivant que V est donné en m/sec ou en km/h. Il varie également si l'on veut avoir le dévers théorique, c'est-à-dire qui équilibre complètement la force centrifuge, ou pratique, c'est-à-dire si l'on admet qu'une fraction de la force centrifuge ne soit pas compensée. (Pour ne pas alourdir cet exposé, nous ne démontrerons pas cette formule.)

Pour une courbe de rayon variable ρ nous aurons

$$d = \frac{kV^2}{\rho} \quad (2)$$

Pour simplifier, nous supposons que le dévers s'obtient en élevant la file extérieure de rail et non pas comme le prescrit le règlement C. F. F., moitié en abaissant la file intérieure, moitié en élevant la file extérieure.

1. Courbe de raccordement avec rampe de surhaussement rectiligne.

Nous avons

$$\frac{1}{m} = \frac{h}{L} \quad (3) \quad d = \frac{1}{m} s = \frac{kV^2}{\rho} = \frac{h}{L} s \quad (4) \quad / h = \frac{kV^2}{R} \quad (5)$$

d'où nous tirons

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{RL} s = sc \quad (6)$$

si nous faisons

$$c = \frac{1}{RL} \quad (7)$$

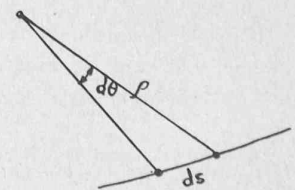
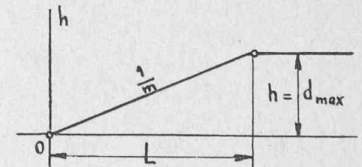
Soit $d\theta$ l'angle compris entre deux rayons de courbure infiniment voisins :

$$\rho d\theta = ds = \frac{d\theta}{cs} \quad (8)$$

$$d\theta = cs ds \quad (9)$$

En intégrant il vient

$$\theta = \frac{c}{2} s^2 \quad (10)$$



Mais nous avons en coordonnées rectangulaires

$$dx = \cos \theta ds \quad (11) \quad dx = \cos \frac{c}{2} s^2 ds \quad (13)$$

d'où

$$dy = \sin \theta ds \quad (12) \quad dy = \sin \frac{c}{2} s^2 ds \quad (14)$$

et en intégrant

$$x = \int_0^s \cos \frac{c}{2} s^2 ds \quad (15) \quad y = \int_0^s \sin \frac{c}{2} s^2 ds \quad (16)$$

Pour calculer ces intégrales, développons en série sin et cos. Nous en avons le droit, car pour les valeurs de s que nous utilisons, ces séries sont très rapidement convergentes.

$$\sin \frac{c}{2} s^2 = \frac{c}{2} s^2 - \left| \frac{c}{2} \right|^3 \frac{s^6}{3!} + \left| \frac{c}{2} \right|^5 \frac{s^{10}}{5!} \dots \quad (17)$$

$$\cos \frac{c}{2} s^2 = 1 - \left| \frac{c}{2} \right|^2 \frac{s^4}{2!} + \left| \frac{c}{2} \right|^4 \frac{s^8}{4!} \dots \quad (18)$$

d'où, en intégrant ces deux séries :

$$x = \left[s - \left| \frac{c}{2} \right|^2 \frac{s^5}{10} + \left| \frac{c}{2} \right|^4 \frac{s^9}{216} \dots \right]_0^s \quad (19)$$

$$y = \left[\frac{c}{2} \frac{s^3}{3} - \left| \frac{c}{2} \right|^2 \frac{s^7}{42} + \left| \frac{c}{2} \right|^5 \frac{s^{11}}{1320} \dots \right]_0^s \quad (20)$$

et en donnant à c sa valeur tirée de (7)

$$x = \left[s - \frac{s^5}{40R^2L^2} + \frac{s^9}{3456R^4L^4} \dots \right]_0^s \quad (21)$$

$$y = \left[\frac{s^3}{6RL} - \frac{s^7}{336R^3L^3} + \frac{s^{11}}{42240R^5L^5} \dots \right]_0^s \quad (22)$$

Nous voyons immédiatement que si nous prenons le premier terme de chaque série, nous retrouvons l'équation

$$y = Bx^3 \quad \text{où} \quad B = \frac{1}{6RL}$$

Nous pouvons faire, étant donné que s varie de 0 à L

$$s = nL$$

où n varie de 0 à 1.

Il vient

$$x = nL - n^5 \frac{L^3}{40R^2} + \frac{n^9 L^5}{3456R^4} \quad (23)$$

$$y = \frac{n^3 L^3}{6R} - \frac{n^7 L^4}{336R^3} + \frac{n^{11} L^6}{42240R^5} \quad (24)$$

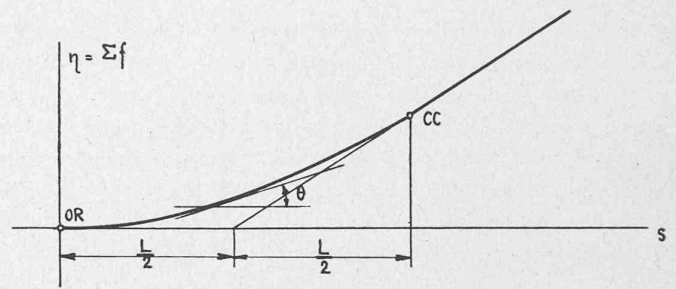
et en prenant les deux premiers termes

$$x = nL \left[1 - \frac{n^4 L^2}{40R^2} \right] \quad (25)$$

$$y = \frac{n^3 L^2}{6R} \left[1 - \frac{n^4 L^2}{56R^2} \right] \quad (26)$$

Dans le cas de l'étude de la courbe de raccordement par la méthode du diagramme des angles¹, nous avons la construction suivante :

¹ Bulletin technique de la Suisse romande, numéros des 17 et 31 août 1946 : E. Décombaz, ingénieur : « Exposé succinct de la méthode de rectification des courbes de chemins de fer d'après la mesure des flèches ».



où $\text{tg } \theta = \frac{1}{\rho} = ks \quad K = \frac{1}{R} \quad (27)$

$$\frac{d\eta}{ds} = ks \quad d\eta = ks ds \quad (28)$$

En intégrant nous avons

$$\eta = \Sigma f = \frac{k}{2} s^2 \quad (29)$$

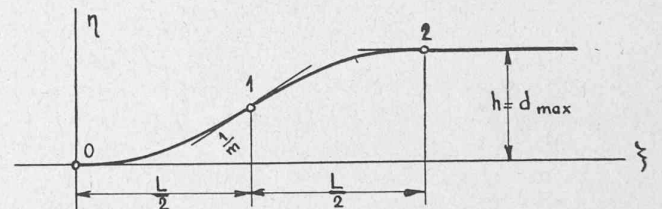
$$\eta = \frac{L^2}{2R} n^2 \quad (30) \quad \text{avec} \quad n = \frac{S}{L}$$

En pratique, l'unité de mesure étant ΔL , le second membre de l'équation (30) devra être multiplié par ΔL .

2. Courbe de raccordement avec rampe de surhaussement en doucine.

Au lieu de donner au dévers un accroissement constant nous pouvons lui donner un accroissement variable.

Astreignons la rampe de surhaussement qui sera la courbe de représentation du dévers aux conditions suivantes :



être tangente au point 0 à l'axe des ξ et au point 2 à une // à l'axe des ξ . Les points 0, 1 et 2 seront des points d'inflexion.

Nous avons affaire à une fonction $\eta = \varphi(\xi)$.

Cette fonction possède trois racines

$$\xi, \left(\xi - \frac{L}{2} \right), (\xi - L)$$

de plus $\varphi'(\xi) = 0$ pour $\xi = 0$ et $\xi = L$.

Il vient donc

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = A \cdot \xi \cdot \left(\xi - \frac{L}{2} \right) \cdot (\xi - L) = A \left(\xi^3 - \frac{3L}{2} \xi^2 + \frac{L^2}{2} \xi \right) \quad (31)$$

$$\frac{d\eta}{d\xi} = A \cdot \left(\frac{\xi^4}{4} - \frac{L\xi^3}{2} + \frac{L^2\xi^2}{4} \right) \quad (32)$$

$$\eta = A \cdot \left(\frac{\xi^5}{4 \cdot 5} - \frac{L\xi^4}{8} + \frac{L^2\xi^3}{12} \right) \quad (33)$$

Déterminons le coefficient A.

Pour $\xi = L$ nous avons $\eta = h$.

$$h = A \left(\frac{L^5}{20} - \frac{L^5}{8} + \frac{L^5}{12} \right) = A \frac{L^5}{120} \quad (34)$$

$$A = \frac{120h}{L^5} \quad \text{tg } \alpha^1 = \frac{15h}{8L} \quad (35)$$

$$\eta = \frac{30h}{L^5} \cdot \frac{\xi^5}{5} - \frac{L\xi^4}{2} + \frac{L^2\xi^3}{3} \quad (36)$$

Si nous faisons $\xi = s$ et $\eta = d$ il vient en remplaçant h et d par leurs valeurs tirées de (1) et de (2)

$$kV^2 \frac{1}{\rho} = kV^2 \frac{30}{RL^5} \left(\frac{S^5}{5} - \frac{LS^4}{2} + \frac{L^2S^3}{3} \right) \quad (37)$$

D'autre part, comme nous avons vu $\rho d\theta = ds$

$$\theta = \int_0^s \frac{1}{\rho} ds = \frac{30}{RL^5} \int_0^s \left(\frac{s^5}{5} - \frac{Ls^4}{2} + \frac{L^2s^3}{3} \right) ds$$

$$\theta = \frac{1}{2RL^5} \left(2s^6 - 6Ls^5 + 5L^2s^4 \right) \quad (38)$$

et comme dans le cas précédent

$$dx = \cos \theta ds \quad \cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} \dots$$

$$dy = \sin \theta ds \quad \sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} \dots$$

Ces séries étant très rapidement convergentes pour les valeurs de θ utilisées, nous ne prendrons que les deux premiers termes de chaque série. Il vient, en intégrant

$$x = \int_0^s ds - \int_0^s \frac{1}{(2RL^5)^2} \frac{(2s^6 - 6Ls^5 + 5L^2s^4)^2}{2!} ds \quad (39)$$

$$y = \int_0^s \frac{1}{2RL^5} (2s^6 - 6Ls^5 + 5L^2s^4) ds - \int_0^s \frac{1}{2RL^5} \frac{(2s^6 - 6Ls^5 + 5L^2s^4)^3}{3!} ds \quad (40)$$

$$x = \left(s - \frac{1}{2!} \frac{1}{4R^2L^{10}} \right) \left[\frac{4}{13} s^{13} - 2Ls^{12} + \frac{56}{11} L^2s^{11} - 6L^3s^{10} + \frac{25}{9} L^4s^9 \right] \quad (41)$$

$$y = \frac{1}{2RL^5} \left(\frac{2}{7} s^7 - Ls^6 + L^2s^5 \right) - \frac{1}{3! \frac{8}{R^3} L^{15}}$$

$$\left[\frac{8}{19} s^{19} - \frac{72}{18} Ls^{18} + \frac{276}{17} L^2s^{17} - \frac{576}{16} L^3s^{16} + \frac{690}{15} L^4s^{15} - \frac{450}{14} L^5s^{14} + \frac{125}{13} L^6s^{13} \right] \quad (42)$$

Pour $s = L$ il vient

$$x = L - \frac{L^3}{8R^2} \left[\frac{4}{13} - 2 + \frac{56}{11} - 6 + \frac{25}{9} \right] = L \left[1 - 0,022 \left(\frac{L}{R} \right)^2 \right] \quad (43)$$

$$y = \frac{L^2}{2R^7} - \frac{L^4}{48R^3} \left[\frac{8}{19} - \frac{72}{18} + \frac{276}{17} - \frac{576}{16} + \frac{690}{15} - \frac{450}{14} + \frac{125}{13} \right] = \frac{L^2}{7R} \left[1 - 0,0268 \left(\frac{L}{R} \right)^2 \right] \quad (44)$$

Comme dans le cas précédent, nous faisons $s = nL$, où $0 > n > 1$

$$x = L \left\{ n - \left(\frac{L}{R} \right)^2 \left[\frac{n^9}{8} \left(\frac{4n^4}{13} - 2n^3 + \frac{\alpha_n}{71} n^2 - 6n + \frac{25}{9} \right) \right] \right\} \quad (45)$$

$$y = \frac{L^2}{R} \left\{ \frac{n^5}{2} \left(\frac{2n^2}{7} - n + 1 \right) - \left(\frac{L}{R} \right)^2 \left[\frac{n^{13}}{48} \frac{8}{9} n^6 - \frac{72}{18} n^5 + \frac{276}{11} n^4 - \frac{\gamma_n}{16} n^3 + \frac{690}{15} n^2 - \frac{450}{14} n + \frac{125}{13} \right] \right\} \quad (46)$$

$$x = L \left[n - \left(\frac{L}{R} \right)^2 \alpha_n \right] \quad (47)$$

$$y = \frac{L^2}{R} \left[\beta_n - \left(\frac{L}{R} \right)^2 \gamma_n \right] \quad (48)$$

TABEAU 1

n	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1
α_n	0,0220	0,011900	0,00567	0,00234	0,00078	0,00020	0,0002	—	—	—
β_n	0,142857	0,097853	0,062727	0,036975	0,019551	0,005351	0,003887	0,000832	0,000130	0,000005
γ_n	0,002685	0,001191	0,000411	0,000154	0,000025	0,000004	—	—	—	—

De la formule (36) nous tirons la valeur du dévers en faisant $\xi = nL$.

Il vient

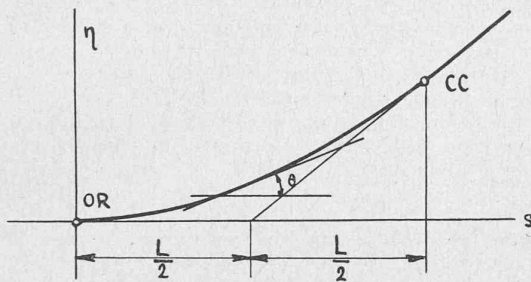
$$d = n \frac{C_1}{5n^3 (2n^2 - 3n + 2)} \quad (49)$$

TABEAU 2

n	1,00	0,95	0,90	0,85	0,80	0,75	0,70	0,65	0,60	0,55	0,50	0,45	0,40	0,35	0,30	0,25	0,20	0,15	0,10	0,05
C_1	1	0,999	0,991	0,972	0,942	0,896	0,837	0,765	0,683	0,593	0,500	0,407	0,317	0,235	0,163	0,104	0,058	0,027	0,009	0,001

Si, comme dans le cas précédent, nous étudions cette nouvelle courbe à l'aide de la méthode du diagramme des angles, nous avons la construction suivante :

$$\text{tg} = \frac{1}{\rho} = \frac{d\eta}{ds} \quad \text{en tirant } \frac{1}{\rho} \text{ de (37).}$$



Il vient

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\eta}{ds} = \frac{30}{RL^5} \left(\frac{s^5}{5} - \frac{Ls^4}{2} + \frac{L^2s^3}{3} \right) \quad (50)$$

$$\int d\eta = \frac{30}{RL^5} \int \left(\frac{s^5}{5} - \frac{Ls^4}{2} + \frac{L^2s^3}{3} \right) ds \quad (51)$$

$$\eta = \frac{30}{RL^5} \left(\frac{s^6}{30} - \frac{Ls^5}{10} + \frac{L^2s^4}{12} \right) \quad (52)$$

Si nous faisons $S = nL$

$$\eta = \frac{L}{2R} \cdot n^4 (2n^2 - 6n + s) \quad (53)$$

En pratique, l'unité de mesure étant Δl , le deuxième membre de l'équation (53) devra être multiplié par Δl .

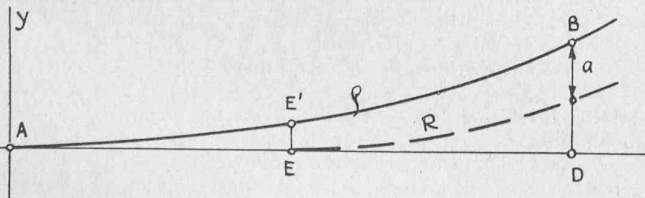
* * *

Nous donnons un tableau qui permet de calculer les coefficients C_2 . (Voir page 128 du présent numéro).

n étant donné avec trois décimales alors que cinq sont nécessaires, les deux dernières peuvent facilement être obtenues par interpolation avec une exactitude suffisante grâce aux différences qui se trouvent en dernière colonne. Cette opération peut se faire à la règle à calcul¹.

Déplacement du cercle tangent.

En prenant le premier terme de (43) et (44) nous avons



$$AB = L \approx AD \quad BD = \frac{L^2}{1R}$$

$$ED \approx \frac{L}{2} \quad CD = \frac{L^2}{8R}$$

$$a = BD - CD = \frac{L^2}{R} \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8} \right) = \frac{L^2}{56R}$$

* * *

Les courbes de raccordement avec rampes de surhaussement en doucine présentent divers avantages tant au point de vue du roulement qu'au point de vue de l'établissement des voies.

Au point de vue du roulement elles évitent les oscillations des véhicules, aussi bien au passage de l'alignement au raccordement qu'au passage du raccordement à la pleine courbe. (Voir G. MARIÉ : *Traité de stabilité du matériel de chemin de fer*, § 207.)

C'est pour éviter ces oscillations que l'on cherche à augmenter la longueur des courbes de raccordement actuelles. Jusqu'à présent, les C. F. F. ont adopté la formule $L = 0,7 V$, où V est donné en km/h et L en m, mais l'on étudie la possibilité de faire $L = V$.

C'est là que la courbe avec rampe de surhaussement en doucine prend tout son avantage.

En effet, le déplacement du cercle tangent est, pour la courbe de raccordement actuelle, de $a = \frac{L^2}{24R}$, alors que pour la seconde courbe nous avons

$$a = \frac{L^2}{56R}$$

Voyons ce que ces deux formules donnent dans un cas concret.

Prenons : $V = 125$ km/h

$R = 830$ m (Règlement circulation des trains, p. 11) ;

$h = 106$ mm (Ordre général de service n° 230, p. 37).

1° Courbe de raccordement avec rampe de surhaussement rectiligne :

$$L = 125 \text{ m} \quad a = \frac{125^2}{24 \cdot 830} = 0,785 \text{ m.}$$

2° Courbe de raccordement avec rampe de surhaussement en doucine :

$$L = \frac{0,24 Vh}{32} = \frac{0,24 \cdot 125 \cdot 106}{32} = 100 \text{ m.}$$

Si nous faisons $L = 110$ m, ce qui sera encore plus favorable, nous aurons

$$a = \frac{110^2}{56 \cdot 830} = 0,260 \text{ m.}$$

Les courbes de raccordement sur nos réseaux ont actuellement comme longueur maximum 70 m.

Dans ce cas, nous avons $a = \frac{70^2}{24 \cdot 830} = 0,243$ m.

Nous voyons que dans le premier cas nous aurons à effectuer un ripage de

$$0,785 - 0,243 = 0,542 \text{ m,}$$

qui est incompatible avec la plupart des installations actuelles, alors que dans le second cas nous aurons

$$0,260 - 0,243 = 0,017 \text{ m.}$$

¹ Si au lieu du diagramme des angles on employait le diagramme des flèches, il faudrait se servir du tableau 2 qui donne le coefficient C_1 et nous aurions :

$$f = f_{\text{max}} \cdot C_1.$$