

Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande
Band: 80 (1954)
Heft: 19

Artikel: Note sur le calcul de la précision des cercles divisés
Autor: Ansermet, A.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-60723>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 14.03.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

jette à la figure et qui paraissent s'exclure sont en fait complémentaires et contiennent chacune une part de vrai. A ce propos, il est certain que l'idonéisme apporte une méthode de connaissance et, comme le dit M. Gonsseth, « une doctrine préalable des vérités élémentaires » particulièrement féconde pour arriver à une meilleure connaissance de la réalité.

Pendant, cette connaissance à elle seule ne suffit pas, il faut encore la *volonté* de l'utiliser dans une fin

libératrice, il faut l'*union des efforts* des hommes de bonne volonté dans un esprit de service pour que les ressources techniques que comporte implicitement le progrès technique soient mises effectivement à la disposition de la communauté et qu'ainsi vienne cette ère de l'abondance, où l'homme sera libéré du souci du lendemain et où son esprit deviendra disponible pour la satisfaction des aspirations supérieures sans laquelle nous avons vu que son bonheur ne saurait être complet.

NOTE SUR LE CALCUL DE LA PRÉCISION DES CERCLES DIVISÉS

par A. ANSERMET, ingénieur,
professeur à l'Ecole polytechnique de l'Université de Lausanne

Au cours de ces dernières années, de notables progrès furent réalisés dans la construction des instruments de précision. Le praticien doit toutefois être en mesure de vérifier de tels instruments, surtout en ce qui concerne les cercles divisés. Les erreurs de division, dites régulières, sont développables approximativement sous la forme d'une fonction trigonométrique (somme). A cet effet, on opère des mesures angulaires dont le nombre dépasse sensiblement celui des inconnues ; cette surdétermination, même poussée assez loin, est désirable. Des simplifications sont réalisables en ayant recours à des observations équidistantes contenues dans une seule période.

Formation des équations résiduelles

L'instrument étant placé en *S* on vise deux points P_1 et P_2 , matérialisés à l'aide de voyants ou de mires lumineuses et on mesure n fois l'angle constant $P_1SP_2 = \omega$, ce qui donne lieu à un premier groupe de n équations :

$$(1) \quad L_k + v_k = x + F_k(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_i \dots A_1, A_2 \dots A_i \dots) = x + \sum_k (B_i)$$

où $k = 1, 2, 3 \dots n$ et $i = 1, 2, 3 \dots$ (encore indéterminé)

x est la valeur compensée de l'angle, L_k une valeur mesurée, v_k un résidu, tandis que les paramètres ρ_i et A_i sont à calculer. On a une somme de binômes B_i :

$$\rho_i \cdot \cos(2i\varphi + A_i) - \rho_i \cos(2i(\varphi + \omega) + A_i)$$

ou $\rho_i \cdot \sin(2i\varphi + A_i) - \rho_i \sin(2i(\varphi + \omega) + A_i) = B_i$.

On effectue les lectures au droit des divisions φ et $(\varphi + \omega)$. En fait, il y a là une différence de sommes trigonométriques. L'équidistance des observations s'exprime par les valeurs de φ ci-après :

$$\varphi_1 = \varphi_1, \varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{n}, \varphi_3 = \varphi_1 + \frac{2\pi}{n}, \dots$$

$$\dots \varphi_n = \varphi_1 + (n-1) \frac{\pi}{n}.$$

Pour ce premier groupe de n équations on admettra $\varphi_1 = 0$ comme φ initial. Il y aura d'autres groupes,

comportant $n', n'', n''' \dots$ observations équidistantes, avec le concours d'autres points $P_3, P_4 \dots$. On effectue aussi les lectures au droit des divisions diamétralement opposées à φ et $(\varphi + \omega)$ puis forme la moyenne, d'où l'absence des multiples impairs de φ .

Solution provisoire

Le système d'équations (1) doit être transformé pour se prêter à l'établissement d'équations dites normales. Il y a diverses solutions.

I. *Compensation d'un groupe d'observations.* On a recours à des paramètres auxiliaires a_i et b_i tels que :

$$(2) \quad \begin{cases} B_i = a_i \cos 2i\varphi + b_i \sin 2i\varphi = \rho_i \sin(2i\varphi + A_i) - \\ - \rho_i \sin(2i(\varphi + \omega) + A_i) = -2\rho_i \sin i\omega \cos \\ (i\omega + A_i) \cos 2i\varphi + 2\rho_i \sin i\omega \sin(i\omega + A_i) \sin 2i\varphi \end{cases}$$

$$(3) \quad L_k + v_k = x + a_1 \cos 2\varphi_k + b_1 \sin 2\varphi_k + a_2 \cos 4\varphi_k + b_2 \sin 4\varphi_k + a_3 \cos 6\varphi_k + b_3 \sin 6\varphi_k + \dots$$

d'où le système d'équations normales :

$$(4) \quad [v] = [\cos 2\varphi \cdot v] = [\sin 2\varphi \cdot v] = [\cos 4\varphi \cdot v] = [\sin 4\varphi \cdot v] = [\cos 6\varphi \cdot v] = [\sin 6\varphi \cdot v] = \dots = 0$$

et les formules classiques de Bessel :

$$(5) \quad \begin{cases} a_1 = \frac{2}{n} [(L-x) \cos 2\varphi], & a_2 = \frac{2}{n} [(L-x) \cos 4\varphi], \\ a_3 = \frac{2}{n} [(L-x) \cos 6\varphi], & x = \frac{[L]}{n} \\ b_1 = \frac{2}{n} [(L-x) \sin 2\varphi], & b_2 = \frac{2}{n} [(L-x) \sin 4\varphi], \\ b_3 = \frac{2}{n} [(L-x) \sin 6\varphi] \dots \end{cases}$$

L'équation (2) donne la corrélation entre les valeurs a_i et b_i , calculées par les formules (5), et les paramètres ρ_i, A_i . Il s'agit en général de valeurs approchées (ρ_i, A_i). Ce calcul est assez laborieux si n est grand. Rappelons que les formules de Bessel sont indépendantes de l'ordre des fonctions trigonométriques qu'elles déterminent.

II. *Calcul avec u observations.* C'est la solution qui paraît la plus normale ; il y a u inconnues et u observa-

tions choisies dans le groupe (1). Les résidus au nombre de u sont nuls. Les formules de Bessel sont applicables si la condition de l'équidistance est réalisée ce qui est aléatoire. Comme il s'agit d'éléments provisoires à déterminer, on peut se borner parfois à rapporter graphiquement les valeurs homologues (φ, L) et à poursuivre le calcul sur la base d'éléments équidistants obtenus par voie graphique. La valeur $x = [L] : n$, déduite des formules (5), n'est que provisoire si l'on doit tenir compte d'autres groupes de mesures. On écrira alors $(x) = [L] : n$ et les ordonnées du graphique seront $L_1 - (x), L_2 - (x), L_3 - (x) \dots$ plutôt que $L_1, L_2, L_3 \dots$. La courbe empirique sera tracée en atténuant les discordances éventuelles.

III. *Méthode de Tchebycheff*. Lorsque le nombre n est très grand, cette méthode présente de l'intérêt. Considérons encore le système d'équations (3) et la valeur initiale $\varphi_1 = 0$, en admettant une fonction de 4^e ordre. Partons de la valeur φ_1 et divisons la période 2π en v parties égales, v désignant un nombre entier qui est provisoirement arbitraire et distinct de n ; le fractionnement de la période sera :

$$\varphi_1, \varphi_1 + \frac{2\pi}{v}, \varphi_1 + 2 \frac{2\pi}{v} \dots \varphi_1 + (v-1) \frac{2\pi}{v}.$$

Les formules de Tchebycheff peuvent s'écrire (voir [2]) :

$$(6) \left\{ \begin{array}{l} a_v + a_{3v} + a_{5v} + a_{7v} + \dots \\ \cong \frac{1}{2v} \left\{ y(0) - y\left(\frac{\pi}{v}\right) + y\left(\frac{2\pi}{v}\right) - y\left(\frac{3\pi}{v}\right) + \dots - y\left((2v-1)\frac{\pi}{v}\right) \right\} \\ b_v - b_{3v} + b_{5v} - b_{7v} + \dots \\ \cong \frac{1}{2v} \left\{ y\left(\frac{\pi}{2v}\right) - y\left(\frac{3\pi}{2v}\right) + y\left(\frac{5\pi}{2v}\right) \dots \dots + y\left((4v-1)\frac{\pi}{2v}\right) \right\}. \end{array} \right.$$

Les y sont les L du système (3) dont on a retranché une quantité appelée moyenne provisoire. L'indice $v, 3v, 5v \dots$ sera égal ou inférieur à l'ordre 4. Pour $v = 1$ on a $3v = 3, 5v = 5 \dots$. On ne gardera donc, dans les premiers membres des formules (6), que les termes a_1, a_3, b_1, b_3 :

$$a_1 + a_3 \cong \frac{1}{2} \left\{ y(0) - y(\pi) \right\},$$

$$b_1 - b_3 \cong \frac{1}{2} \left\{ y\left(\frac{\pi}{2}\right) - y\left(\frac{3\pi}{2}\right) \right\}.$$

Dans les seconds membres, on s'arrête respectivement aux termes $y(\pi)$ et $y\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ car les termes $y(2\pi)$ et $y\left(\frac{5\pi}{2}\right)$, qui viennent ensuite, appartiennent à la période suivante.

Pour $v = 2$ on a $3v = 6, 5v = 10 \dots$. Dans les premiers membres on ne conserve que a_2 et b_2 :

$$a_2 \cong \frac{1}{4} \left\{ y(0) - y\left(\frac{\pi}{2}\right) + y(\pi) - y\left(\frac{3\pi}{2}\right) \right\}$$

$$b_2 \cong \frac{1}{4} \left\{ y\left(\frac{\pi}{4}\right) - y\left(\frac{3\pi}{4}\right) + y\left(\frac{5\pi}{4}\right) - y\left(\frac{7\pi}{4}\right) \right\}.$$

Pour $v = 3, 3v = 9, 5v = 15 \dots$ seuls subsistent les termes a_3 et b_3 :

$$a_3 \cong \frac{1}{6} \left\{ y(0) - y\left(\frac{\pi}{3}\right) + y\left(\frac{2\pi}{3}\right) - y(\pi) + y\left(\frac{4\pi}{3}\right) - y\left(\frac{5\pi}{3}\right) \right\}$$

$$b_3 \cong \frac{1}{6} \left\{ y\left(\frac{\pi}{6}\right) - y\left(\frac{\pi}{2}\right) + y\left(\frac{5\pi}{6}\right) - y\left(\frac{7\pi}{6}\right) + y\left(\frac{3\pi}{2}\right) - y\left(\frac{11\pi}{6}\right) \right\}.$$

Enfin pour $v = 4, 3v = 12 \dots$ seuls subsistent :

$$a_4 \cong \frac{1}{8} \left\{ y(0) - y\left(\frac{\pi}{4}\right) + y\left(\frac{\pi}{2}\right) - y\left(\frac{3\pi}{4}\right) + y(\pi) - y\left(\frac{5\pi}{4}\right) + y\left(\frac{3\pi}{2}\right) - y\left(\frac{7\pi}{4}\right) \right\}$$

$$b_4 \cong \frac{1}{8} \left\{ y\left(\frac{\pi}{8}\right) - y\left(\frac{3\pi}{8}\right) + y\left(\frac{5\pi}{8}\right) - y\left(\frac{7\pi}{8}\right) + y\left(\frac{9\pi}{8}\right) - y\left(\frac{11\pi}{8}\right) + y\left(\frac{13\pi}{8}\right) - y\left(\frac{15\pi}{8}\right) \right\}$$

d'où les valeurs numériques :

$$a_4 = + 0,90 (0,90), \quad a_3 = + 0,62 (0,64),$$

$$a_2 = + 0,79 (0,78), \quad a_1 = + 1,29 (1,27),$$

$$b_4 = + 0,48 (0,46), \quad b_3 = + 1,01 (1,01),$$

$$b_2 = + 0,83 (0,83), \quad b_1 = + 0,93 (0,93).$$

Les résultats entre parenthèses sont déduits des formules de Bessel en considérant 24 observations équidistantes pour :

$$2\varphi = 0, \pi/12, \pi/6, \pi/4, \pi/3, 5\pi/12, \pi/2, 7\pi/12, \dots \dots 7\pi/4, 11\pi/6, 23\pi/12.$$

De ces a_i et b_i on déduit les (ρ_i) et (A_i) , valeurs approchées

$$\rho_i = (\rho_i) + \delta\rho_i, \quad A_i = (A_i) + \delta A_i \quad \text{et } (x) + \delta x = x.$$

Application numérique : $n = 48$

$2\varphi = 0$	$y = + 3,60$	$2\varphi = \pi/3$	$y = + 0,31$	$2\varphi = 2\pi/3$	$y = - 0,36$	$2\varphi = \pi$	$y = - 0,23$	$2\varphi = 4\pi/3$	$y = - 1,41$	$2\varphi = 0$	$y = 5\pi/3$	$y = - 1,98$
$\pi/24$	$+ 4,23$	$3\pi/8$	$- 0,03$	$17\pi/24$	$- 0,65$	$25\pi/24$	$- 0,34$	$11\pi/8$	$- 0,79$	$41\pi/24$	$- 2,43$	
$\pi/12$	$+ 4,55$	$5\pi/12$	$- 0,13$	$3\pi/4$	$- 0,81$	$13\pi/12$	$- 0,70$	$17\pi/12$	$- 0,27$	$7\pi/4$	$- 2,65$	
$\pi/8$	$+ 4,25$	$11\pi/24$	$- 0,08$	$19\pi/24$	$- 0,92$	$9\pi/8$	$- 1,19$	$35\pi/24$	$+ 0,04$	$43\pi/24$	$- 2,39$	
$\pi/6$	$+ 3,62$	$\pi/2$	$+ 0,04$	$5\pi/6$	$- 0,79$	$7\pi/6$	$- 1,53$	$3\pi/2$	$+ 0,20$	$11\pi/6$	$- 1,55$	
$5\pi/24$	$+ 2,70$	$13\pi/24$	$+ 0,07$	$7\pi/8$	$- 0,64$	$29\pi/24$	$- 1,82$	$37\pi/24$	$- 0,03$	$15\pi/8$	$- 0,67$	
$\pi/4$	$+ 1,75$	$7\pi/12$	$+ 0,06$	$11\pi/12$	$- 0,40$	$5\pi/4$	$- 1,89$	$19\pi/12$	$- 0,56$	$23\pi/12$	$+ 1,04$	
$7\pi/24$	$+ 0,97$	$5\pi/8$	$- 0,14$	$23\pi/24$	$- 0,27$	$31\pi/24$	$- 1,71$	$13\pi/8$	$- 1,25$	$47\pi/24$	$+ 2,50$	

Dans le cas où il s'agit de plusieurs groupes d'observations équidistantes on a :

$$P_{\rho_1} = \left[\frac{\partial F}{\partial \rho_1} \frac{\partial F}{\partial \rho_1} + \frac{\partial F'}{\partial \rho_1} \frac{\partial F'}{\partial \rho_1} + \frac{\partial F''}{\partial \rho_1} \frac{\partial F''}{\partial \rho_1} + \dots \right],$$

$$P_{\rho_2} = \left[\frac{\partial F}{\partial \rho_2} \frac{\partial F}{\partial \rho_2} + \frac{\partial F'}{\partial \rho_2} \frac{\partial F'}{\partial \rho_2} + \frac{\partial F''}{\partial \rho_2} \frac{\partial F''}{\partial \rho_2} + \dots \right], P_{\rho_3} = \dots$$

Admettons de plus, pour simplifier la discussion :
 $n = n' = n'' = n''' \dots$

$$(13) \quad P_{\rho_1} : P_{\rho_2} : P_{\rho_3} : P_{\rho_4} = (\sin^2 \omega + \sin^2 \omega' + \sin^2 \omega'' + \dots) :$$

$$: (\sin^2 2\omega + \sin^2 2\omega' + \sin^2 2\omega'' + \dots) :$$

$$: (\sin^2 3\omega + \sin^2 3\omega' + \sin^2 3\omega'' + \dots) :$$

$$: (\sin^2 4\omega + \sin^2 4\omega' + \sin^2 4\omega'' + \dots),$$

sommes étendues ici aux six valeurs angulaires $\omega, \omega'', \omega''' \dots$ figurant dans le système d'équations (12). On peut obtenir :

$$P_{\rho_1} = P_{\rho_2} = P_{\rho_3} = P_{\rho_4}$$

pour $P_1 SP_2 = P_2 SP_3 = P_3 SP_4 = 36^\circ = 40^\circ$ car

$$3 \sin^2 40^\circ + 2 \sin^2 80^\circ + \sin^2 120^\circ = 3 \sin^2 80^\circ + 2 \sin^2 160^\circ + \sin^2 240^\circ = 3 \sin^2 120^\circ + 2 \sin^2 240^\circ + \sin^2 360^\circ = 3 \sin^2 160^\circ + 2 \sin^2 320^\circ + \sin^2 480^\circ.$$

Pratiquement, il n'est pas nécessaire d'attribuer rigoureusement ces valeurs aux angles mesurés ; il

suffit que la précision soit à peu près uniforme. Quant à l'erreur moyenne M d'une observation de poids un, elle comprend implicitement l'erreur de division Δ et celle de mesure m :

$$M^2 = \Delta^2 + m^2$$

Le terme m^2 est assez facile à déterminer et M^2 sera compris entre M_1^2 et M_2^2 , valeurs peu différentes l'une de l'autre.

En résumé on aura recours, pour déterminer la précision d'un cercle divisé, à des observations angulaires en nombre surabondant, le degré de surdétermination étant relativement élevé. La méthode de Tchebycheff sera souvent d'un emploi judicieux comme auxiliaire du calcul. L'ordre de la somme trigonométrique, par contre, sera choisi de manière à limiter autant que possible le nombre des termes, donc celui des inconnues.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] CZERSKI, Z. : *Verallgemeinerung des Heuvelink-Verfahrens für Untersuchung der Kreisteilungsfehler* (Zeitschr. f. Vermessungswesen, 11/1935).
- [2] FRÉCHET et ROMANN : *Représentation des lois empiriques* (Paris, 1930).
- [3] JORDAN-EGGERT : *Vermessungskunde* (Ausgleichsrechnung), Stuttgart 1935.
- [4] ANSERMET, A. : *Beitrag zur Bestimmung der regelmässigen Kreisteilungsverbesserungen* (Schweiz. Zeitschr. f. Vermessung, 1954).

BIBLIOGRAPHIE

Bautechnik-Archiv

Le « Bulletin technique » a déjà eu l'occasion de signaler à ses lecteurs cette excellente collection de publications paraissant sous la forme de cahiers et éditée par la maison *Wilhelm Ernst & Sohn* à Berlin-Wilmersdorf (Hohenzollerndam 169).

Chaque cahier comporte plusieurs études se rapportant au domaine de l'ingénieur civil.

Voici les sommaires des cinq premiers cahiers et celui du neuvième (les cahiers 6, 7 et 8 ont fait l'objet de comptes rendus antérieurs) :

Heft 1 (1947). — Une brochure 17×24 cm, 49 pages, 52 figures. Prix : 6 DM.

Zeitgemässe Fragen aus dem neueren Schrifttum des Ingenieurbaues (*T. v. Rothe*). — Kolbenlose Pressen (Druckkissen) im Bauwesen (*F. Hörnlmann*). — Grundsätzliches zur Frage der Grundwasserabsenkung (*H. Weber*). — Einfluss der Verdrehungssteifigkeit der Hauptträger auf die Lastverteilung beim Trägerrost nach Rechnung und Versuch (*J. Schöttgen*). — Störungsfreie Kaminkopfausbildung (*O. Spitzner*).

Heft 2 (1948). — Une brochure 17×24 cm, 54 pages, 53 figures. Prix : 6,40 DM.

Erfahrungen eines Wasserbauers (*W. Paxmann*). — Die Abwasserreinigung und die sich dabei abspielenden stofflichen Vorgänge (*E. Marquardt*). — Über die Druckverteilung im Boden hinter Wänden verschiedener Art. Mit Ergebnissen eigener Versuche (*H. Press*).

Heft 3 (1949). — Une brochure 17×24 cm, 74 pages, 76 figures. Prix : 7,20 DM.

Widmung zum 20-jährigen der Degebo (*J. Volk*). — Noch offenstehende Probleme auf dem Gebiete des Grund-

baues (*A. Agatz* und *E. Lackner*). — Arbeiten der Degebo in den Jahren 1938-1948 (*H. Muhs*). — Anwendung des seismischen Bodenuntersuchungsverfahrens bei einem Tal-sperrrenbau (*H. Lorenz*). — Messtechnische Grundlagen bei Setzungsmessungen an grossen Bauwerken (*E. Brennecke* und *K. Ansorge*). — Untersuchungen an einem fehlerhaften Kompressorenfundament (*O. Fritsch* und *H. Mush*). — Schwingungsuntersuchungen an einfachen Mauerwerkskörpern und Gebäuden (*A. Ramspeck* und *G.-A. Schulze*). — Das technische Experiment in der Bodenmechanik (*A. Hertwig*).

Heft 4 (1949). — Une brochure 17×24 cm, 73 pages, 28 figures. Prix : 7,50 DM.

Tulla, Honsell, Rehbock. Lebensbilder dreier Wasserbauingenieure am Oberrhein (*H. Wittmann*). — Berechnung und Bau von Plattenbrücken (*R. Ohlig*).

Heft 5 (1949). — Une brochure 17×24 cm, 60 pages, 41 figures. Prix : 5,20 DM.

Neue Erfahrungen auf dem Gebiete der Verfestigung und Abdichtung des Untergrundes (*H. Jähde*). — Die Gleichungen der Stau- und Senkungsweiten für rechteckigen und parabolischen Gerinnequerschnitt und ihre praktische Anwendung (*L. Rothmund*). — Über Zusammenhänge zwischen der technischen Balkenbiegungslehre und der Scheibentheorie (*G. Worch*).

Heft 9 (1953). — Une brochure 17×24 cm, 141 pages, 103 figures. Prix : 14,50 DM.

Erddruckversuche an einer durch Reibung verankerten Stützwand (*H. Muhs*). — Über das Verhalten von Pfahlgründungen bei Schwingungserregung (*G. Brandes*). — Baugrubenumschliessung nach dem Gefrierverfahren (*W. Sichert* und *P. Chardabellas*).

Notons qu'en Suisse, les cahiers de cette collection peuvent être livrés par la maison « Verlag für Wissenschaft, Technik und Industrie », Schützenmattstr. 43, Bâle.