

Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande
Band: 81 (1955)
Heft: 12: Les machines arithmétiques

Artikel: Principes du calcul à l'aide de suites
Autor: Cuénod, Michel
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-61339>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 01.04.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

PRINCIPES DU CALCUL A L'AIDE DE SUITES

par MICHEL CUÉNOD, ingénieur à la Société Générale pour l'Industrie, Genève¹

I. Définition

Nous considérons une certaine fonction univoque et réelle, déterminée par rapport à une variable indépendante. A chaque valeur de la variable indépendante correspond donc une et une seule valeur de la fonction.

Lorsque l'on veut appliquer une certaine opération fonctionnelle à cette fonction et lorsque l'on peut admettre que cette opération a un caractère linéaire, il peut être avantageux de la décomposer en fonctions élémentaires auxquelles on applique cette opération, et de superposer ensuite les résultats obtenus. Le calcul opérationnel n'est pas autre chose qu'une utilisation systématique de ce procédé ; les fonctions élémentaires sont, dans ce cas particulier, les composantes harmoniques ; cette décomposition et cette recombinaison peuvent être ramenées à des intégrations, sans que l'on ait besoin de traiter chaque composante individuellement.

Une autre façon de décomposer une fonction est de la considérer comme étant constituée par une suite d'impulsions. La forme même que l'on donne à ces impulsions importe peu. Elles peuvent avoir l'allure d'un triangle, d'une impulsion rectangulaire, d'une fonction exponentielle, etc. Il est possible d'appliquer l'opération fonctionnelle considérée à chacune des impulsions élémentaires, puis de superposer les résultats ainsi obtenus. A l'analyse spectrale à laquelle conduit l'intégrale de Fourier correspond ainsi une analyse impulsionnelle.

Soit $F(t)$ une certaine fonction représentée par la figure 1 avec, en abscisse, la variable indépendante t . A cette fonction $F(t)$ nous faisons correspondre la suite $S(F)$. Nous exprimons conventionnellement cette correspondance par le signe (Δ) ²

$$F(t) \Delta S(F) = [f_1; \dots; f_n; \dots].$$

Cette suite est donnée par les valeurs de la fonction $F(t)$ correspondant aux valeurs $\tau, 2\tau, 3\tau, \dots, n\tau, \dots$ de la variable indépendante, τ étant l'unité choisie pour la mesure de cette variable. Nous décomposons ainsi la fonction $F(t)$ en une suite d'impulsions rectangulaires ayant τ comme base et les ordonnées $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ comme hauteur. L'unité τ doit être choisie suffisamment petite pour que l'on puisse admettre que sur l'intervalle d'une

unité, la fonction varie linéairement, c'est-à-dire qu'elle puisse être assimilée à sa tangente. L'exactitude du calcul à l'aide de suites peut être améliorée en réduisant l'unité choisie pour la mesure de la variable indépendante.

Réciproquement, nous pouvons dire que toute suite définit une certaine fonction en considérant que chaque terme de la suite donne la valeur moyenne de la fonction pour la valeur de la variable indépendante caractérisée par l'ordre du terme de la suite, puis en joignant entre eux les points ainsi définis. Cette fonction n'a pas besoin d'être analytique. Elle peut être donnée par un relevé expérimental ou une analyse statistique. La variable indépendante peut être quelconque, cependant, nous ne considérons dans la suite que des fonctions avec une seule variable indépendante. Dans la plupart des exemples d'applications que nous développerons, cette variable sera le temps ; aussi c'est la variable que nous adopterons dans nos considérations générales ; toutefois, ces considérations sont valables également pour toute autre variable.

Si nous comparons la décomposition d'une fonction en ses composantes harmoniques et sa décomposition en une suite d'impulsions, nous voyons qu'à l'intégrale de Fourier correspond le calcul de la fonction pour les valeurs unités de la variable indépendante. Cette seconde façon de procéder est particulièrement avantageuse lorsque la fonction n'est pas donnée sous forme analytique, mais résulte, par exemple, d'un relevé expérimental. Il suffit de mesurer la fonction pour les valeurs unités de la variable indépendante.

Le principe de cette méthode a été exposé par A. Tustin (1). Nous en avons fait l'objet d'un précédent article (2) et d'une thèse de doctorat (3) dont cet article est extrait.

II. Opérations avec les suites

1. Addition et soustraction

Soit $F(t)$ et $G(t)$ deux fonctions, et $S(F) = [f_1; f_2; \dots; f_n; \dots]$ et $S(G) = [g_1; g_2; \dots; g_n; \dots]$ les deux suites correspondantes. Les termes de la suite $S(F + G)$ résultant de l'addition de deux suites $S(F)$ et $S(G)$ sont donnés par la somme des termes correspondants

$$\begin{aligned} S(F + G) &= S(F) + S(G) = [f_1; f_2; \dots; f_n; \dots] \\ &\quad + [g_1; g_2; \dots; g_n; \dots] = \\ &= [f_1 + g_1; f_2 + g_2; \dots; f_n + g_n; \dots] \end{aligned}$$

¹ L'utilisation de calculateurs arithmétiques est étroitement liée à l'élaboration de modes de calcul qui soient adaptés à l'exploitation de ces machines ; la « Méthode de calcul à l'aide de suites » qui a fait l'objet d'une récente thèse de doctorat, présentée à l'Ecole Polytechnique Fédérale de Zurich, par M. M. CUÉNOD (Editions La Concorde, Lausanne, 1955), ouvre à cet égard des perspectives intéressantes et nous donnons ci-dessous un extrait de la première partie de ce travail. (Résumé.)

² Conformément aux règles et recommandations pour les symboles littéraires et les signes ASE Publ. 192, N° 124.

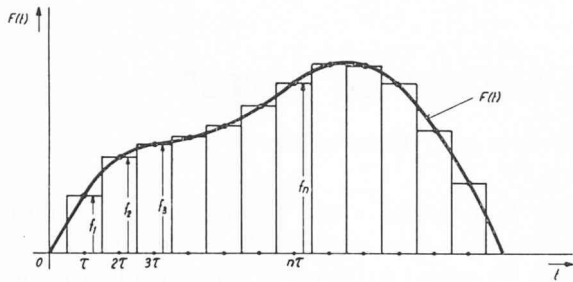


FIG. 1. — Définition de la suite correspondant à une fonction donnée.

De la définition même des suites découle la correspondance suivante :

$$F(t) + G(t) \triangleq S(F + G).$$

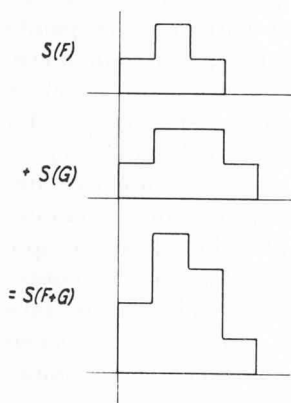


FIG. 2. — Définition de l'addition à l'aide de suites.

De même à la soustraction de deux suites correspond une suite dont les termes sont donnés par la soustraction des termes correspondants.

Exemple

Nous effectuons l'addition des deux suites caractérisées par les valeurs numériques suivantes :

$$S(F) = [1 ; 2 ; 1]$$

$$S(G) = [1 ; 2 ; 2 ; 1]$$

$$S(F + G) = [1 ; 2 ; 1] + [1 ; 2 ; 2 ; 1] = [2 ; 4 ; 3 ; 1].$$

La figure 2 donne la signification géométrique de cette addition.

2. Produit et quotient simples

Les termes de la suite $S(F \cdot G)$ résultant du produit simple des suites $S(F)$ et $S(G)$ sont donnés par le produit des termes correspondants. Nous désignons cette opération par un point (\cdot).

$$S(F \cdot G) = S(F) \cdot S(G) = [f_1 ; f_2 ; \dots ; f_n ; \dots] \cdot [g_1 ; g_2 ; \dots ; g_n ; \dots] = [f_1 g_1 ; f_2 g_2 ; \dots ; f_n g_n ; \dots].$$

En particulier, si une suite est multipliée k fois par elle-même, nous disons que la suite est « élevée k fois à la puissance simple ». Les termes de la suite qui caractérise cette puissance simple sont donnés par les termes de la suite considérée, élevés chacun à cette puissance :

$$S(F^k) = [f_1^k ; f_2^k ; \dots ; f_n^k ; \dots].$$

Les termes de la suite $S(F : G)$ résultant du quotient simple de la suite $S(F)$ par la suite $S(G)$ sont donnés par le quotient des termes correspondants. Nous désignons cette opération par deux points ($:$).

$$S(F : G) = S(F) : S(G) = [f_1 ; f_2 ; \dots ; f_n ; \dots] : [g_1 ; g_2 ; \dots ; g_n ; \dots] = \left[\frac{f_1}{g_1} ; \frac{f_2}{g_2} ; \dots ; \frac{f_n}{g_n} ; \dots \right].$$

De la définition même des suites découlent les correspondances suivantes :

$$F(t) \cdot G(t) \triangleq S(F \cdot G)$$

$$F(t)^k \triangleq S(F^k)$$

$$F(t) : G(t) \triangleq S(F : G).$$

3. Suites intercalaire et échelonnée

Il est souvent nécessaire de se servir de la « suite intercalaire » $S_i(F)$ dont les termes sont donnés par la moyenne des termes voisins :

$$S_i(F) = [f_{i1} ; f_{i2} ; f_{i3} ; \dots ; f_{in} ; \dots]$$

$$\text{avec } f_{i1} = \frac{1}{2} (f_0 + f_1)$$

$$f_{i2} = \frac{1}{2} (f_1 + f_2)$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$f_{in} = \frac{1}{2} (f_{n-1} + f_n)$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

avec f_0 = valeur de $F(t)$ pour $t = 0$.

Ainsi que le représente la figure 3, la suite intercalaire $S_i(F)$ caractérise en première approximation la valeur moyenne de la fonction $F(t)$ pendant le premier, le deuxième, ..., le $n^{\text{ième}}$ intervalle. Elle donne approximativement les valeurs de la fonction $F(t)$ pour les abscisses intercalaires

$$\tau/2 ; 3\tau/2 ; 5\tau/2 ; \dots ; (2n-1)\tau/2 ; \dots$$

et correspond à la suite $S(F)$ avec un décalage d'environ une demi-unité en avant.

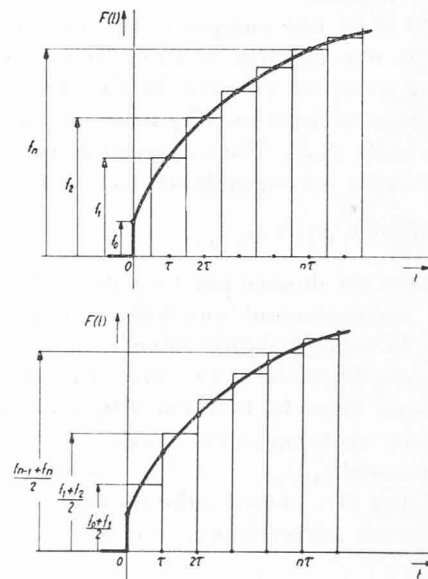


FIG. 3. — Définition de la suite intercalaire $S_i(F)$.

Une autre façon de décomposer une fonction est de la considérer comme étant donnée par la superposition d'une succession d'échelons rectangulaires, ainsi que le représente la figure 4. Ces éche-

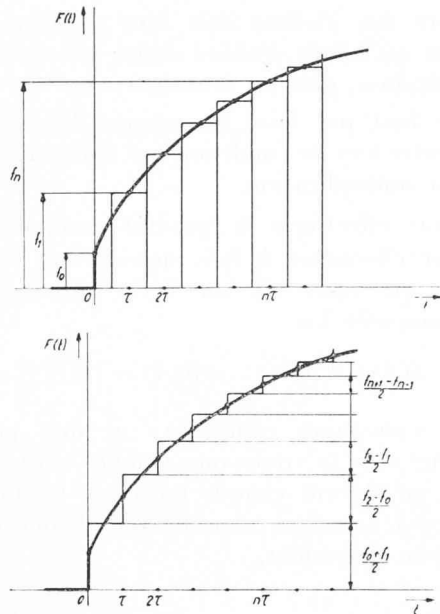


FIG. 4. — Définition de la suite échelonnée $S_e(F)$.
Décomposition d'une fonction $F(t)$ en une suite d'échelons rectangulaires.

lons sont décalés les uns par rapport aux autres d'une unité ; leur hauteur est donnée par la différence entre les termes voisins de la suite intercalaire. Nous définissons ainsi la « suite échelonnée » $S_e(F)$:

$$S_e(F) = [f_{e1} ; f_{e2} ; f_{e3} ; \dots ; f_{en} ; \dots]$$

avec $f_{e1} = \frac{f_0 + f_1}{2}$

$$f_{e2} = \frac{f_1 + f_2}{2} - \frac{f_0 + f_1}{2} = \frac{f_2 - f_0}{2}$$

$$f_{e3} = \frac{f_2 + f_3}{2} - \frac{f_1 + f_2}{2} = \frac{f_3 - f_1}{2}$$

⋮

$$f_{en} = \frac{f_{n-1} + f_n}{2} - \frac{f_{n-2} + f_{n-1}}{2} = \frac{f_n - f_{n-2}}{2}$$

⋮

4. Produit et quotient composés

A. Produit composé

Considérons qu'il existe une certaine relation fonctionnelle entre les deux grandeurs $A(t)$ et $B(t)$. Par exemple $A(t)$ est la force qui agit sur un point et $B(t)$ caractérise la position de ce point, ou $A(t)$ est une force électromotrice et $B(t)$ est le courant qui en résulte.

Nous supposons que l'on ait fait varier $A(t)$ selon une impulsion unitaire $I(t)$ représentée par la figure 5a et caractérisée par un rectangle dont la base est égale à l'unité choisie et dont l'amplitude est égale à $1/\tau$, c'est-à-dire dont la surface est égale à 1. Nous supposons que l'on ait pu mesurer la variation de $B(t)$ résultant de l'impulsion unitaire de A

et que l'on ait obtenu la courbe $G_{AB}(t)$ représentée par la figure 5b et caractérisée par la suite $S(G_{AB})$:

$$S(G_{AB}) = [g_1 ; g_2 ; g_3 ; \dots ; g_n ; \dots]$$

Nous définissons la fonction $G_{AB}(t)$ comme étant « la réponse impulsionnelle de B par rapport à A », et que l'on ait obtenu la courbe $G_{AB}(t)$ représentée par la figure 5b et caractérisée par la suite $S(G_{AB})$:

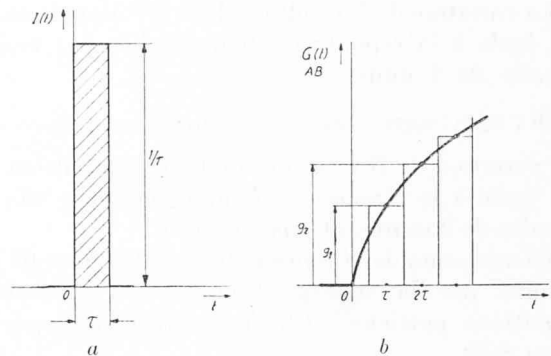


FIG. 5. — Définition de la réponse impulsionnelle $G_{AB}(t)$ d'une grandeur B à une variation de la grandeur A selon une impulsion unitaire $I(t)$.

c'est-à-dire « la réponse de B à une impulsion unitaire de A ».

Nous supposons que le phénomène considéré est linéaire et superposable, c'est-à-dire que l'effet, à savoir la variation de $B(t)$, est proportionnel à la cause, à savoir la variation de $A(t)$. Nous supposons également que pour $t < 0$, $A(t) = B(t) = 0$. Nous nous proposons de déterminer la variation de $B(t)$ résultant d'une variation quelconque de $A(t)$ représentée par la figure 6a et caractérisée par la suite $S(A)$:

$$S(A) = [a_1 ; a_2 ; \dots ; a_n ; \dots]$$

avec :

$$A(t) \Big|_{t=0} = a_0$$

Ainsi que le représente la figure 6a, cette variation de A peut être considérée comme étant constituée par une suite d'impulsions intervenant successivement aux abscisses $0 ; \tau ; 2\tau ; \dots ; n\tau ; \dots$ et dont l'amplitude est donnée par les termes de la suite intercalaire $S_i(A)$:

$$S_i(A) = [a_{i1} ; a_{i2} ; a_{i3} ; \dots ; a_{in} ; \dots] =$$

$$\left[\frac{1}{2}(a_0 + a_1) ; \frac{1}{2}(a_1 + a_2) ; \dots ; \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_n) ; \dots \right]$$

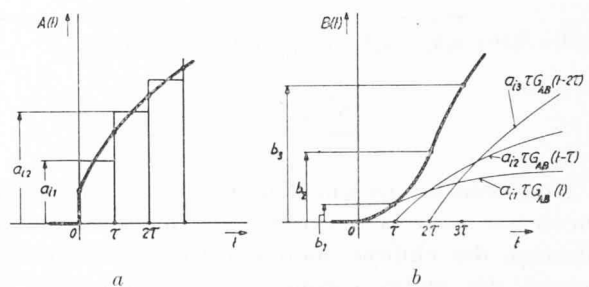


FIG. 6. — Définition du produit composé de deux suites.

Ainsi que le représente la figure 6b, la variation de B résultant de la première impulsion a_{i1} est égale à la réponse $G_{AB}(t)$ de $B(t)$ à une impulsion unitaire, réponse multipliée par $a_{i1} : 1/\tau = \tau a_{i1}$ et caractérisée par la suite :

$$\tau [a_{i1}g_1; a_{i1}g_2; a_{i1}g_3; \dots; a_{i1}g_n; \dots].$$

La variation de B résultant de la 2^{me} impulsion a_{i2} est égale à la réponse de B multipliée par τa_{i2} et décalée de 1 unité

$$\tau [0; a_{i2}g_1; a_{i2}g_2; a_{i2}g_3; \dots; a_{i2}g_{(n-1)}; a_{i2}g_n; \dots].$$

La variation de B résultant de la 3^{me} impulsion a_{i3} est égale à la réponse de B multipliée par τa_{i3} et décalée de 2 unités, et ainsi de suite.

La variation de B représentée par la figure 6b est donnée par la superposition de ces différentes variations partielles. Elle est caractérisée par la suite $S(B)$:

$S(B) = [b_1; b_2; \dots; b_n; \dots]$ telle que :

$$\begin{aligned} b_1 &= \tau (a_{i1}g_1) \\ b_2 &= \tau (a_{i1}g_2 + a_{i2}g_1) \\ b_3 &= \tau (a_{i1}g_3 + a_{i2}g_2 + a_{i3}g_1) \\ &\vdots \\ b_n &= \tau (a_{i1}g_n + a_{i2}g_{n-1} + \dots + a_{in}g_1) \end{aligned}$$

$$= \tau \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot g_{n+1-k} =$$

$$\frac{\tau}{2} \sum_{k=1}^n (A((k-1)\tau) + A(k\tau)) \cdot G_{AB}((n+1-k)\tau).$$

Nous définissons la manière dont la suite $S(B)$ est obtenue comme le *produit composé* de la suite $S_i(A)$ par la suite $S(G_{AB})$ et représentons ce produit par une étoile (*) :

$$S(B) = \tau ([S_i(A) * S(G_{AB})]). \quad (1)$$

Le schéma de calcul d'après lequel s'effectue le produit composé ressort du tableau suivant ; considérons d'une façon générale que l'on se propose de faire le produit $S(A) * S(B)$:

$S(A) =$	a_1	a_2	a_3	...	a_n	...
$S(B) =$	b_1	b_2	b_3	...	b_n	...
	a_1b_1	a_2b_1	a_3b_1	...	a_nb_1	...
		a_1b_2	a_2b_2	...	$a_{n-1}b_2$...
			a_1b_3	...	$a_{n-2}b_3$...
				...		

$$S(A) * S(B) = a_1b_1; a_1b_2 + a_2b_1; a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1; \dots$$

$$\dots; \sum_{k=1}^n a_k b_{n+1-k}; \dots$$

Nous constatons que l'on procède de la même façon que pour la multiplication, dans le système décimal, des chiffres donnés par la succession des termes des suites considérées, avec toutefois les deux différences suivantes :

- l'ordre des chiffres doit être retourné, c'est-à-dire qu'il faut d'abord écrire les unités, puis les dizaines, puis les centaines, etc.
- il ne faut pas faire les reports d'une colonne à l'autre lors de l'addition qui donne le résultat de la multiplication.

Si nous effectuons le produit composé d'une suite par elle-même k fois, nous disons symboliquement que nous « élevons cette suite à la puissance composée k »

$$S(A) * S(A) * \dots * S(A) = [S(A)]^k.$$

Cette « puissance composée » ne doit pas être confondue avec la « puissance simple » (suite $S(A^k)$), obtenue en élevant chaque terme de la suite à la puissance k ainsi que nous l'avons définie dans le paragraphe précédent.

Exemple.

Nous effectuons la multiplication entre les deux suites caractérisées par les valeurs numériques suivantes (en admettant $\tau = 1$) :

$$\begin{array}{r} S(A) = 1 \quad 2 \quad 2 \quad 1 \\ S(B) = 1 \quad 2 \quad 1 \\ \hline \\ \\ \\ \\ \\ \hline S(A) * S(B) = 1 \quad 4 \quad 7 \quad 7 \quad 4 \quad 1 \end{array}$$

La figure 7 donne la signification géométrique de ce produit composé. La surface hachurée (1) représente la suite $S(A)$ multipliée par le facteur 1 ; la surface hachurée (2) représente la suite $S(A)$ multipliée par 2 et décalée de 1 unité, la surface hachurée (3) représente la suite $S(A)$ multipliée par 1 et décalée de 2 unités.

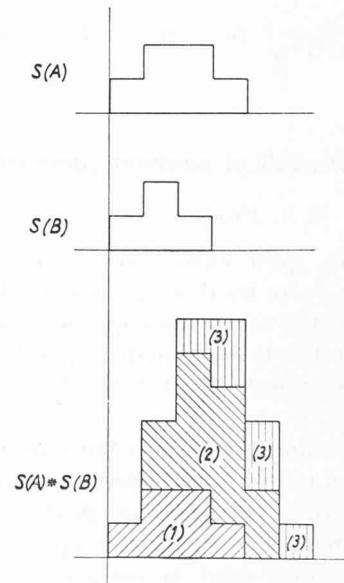


FIG. 7. — Signification géométrique du produit composé.

B. Quotient composé

Le quotient composé est l'opération inverse de celle du produit composé. Soit à nouveau les deux grandeurs $A(t)$ et $B(t)$ reliées entre elles par une certaine relation fonctionnelle. Nous supposons que l'on ait déterminé la variation de $B(t)$ résultant d'une variation donnée de $A(t)$ et que l'on connaisse les suites $S(B)$ et $S(A)$ qui caractérisent ces deux variations. Si l'on effectue le quotient composé de $S(B)$ par $S(A)$, on détermine la suite $S(G_{AB})$ qui correspond à la variation de B résultant d'une variation de A selon une impulsion unitaire, à savoir la réponse de B à une impulsion unitaire. Nous exprimons symboliquement ce quotient composé par le signe ($\frac{\text{B}}{\text{A}}$) ou par une double barre de fraction. La façon dont il s'opère ressort du tableau suivant :

$$\begin{array}{cccc|cccc}
 a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots & b_1 & b_2 & b_3 & \dots \\
 a_1 & a_1 \frac{b_2}{b_1} & a_1 \frac{b_3}{b_1} & a_1 \frac{b_4}{b_1} & \dots & \frac{a_1}{b_1} & \frac{1}{b_1} (a_2 - a_1 \frac{b_2}{b_1}) & \dots & \\
 \hline
 0 & a_2 - a_1 \frac{b_2}{b_1} & a_3 - a_1 \frac{b_3}{b_1} & a_4 - a_1 \frac{b_4}{b_1} & & & & & \\
 & a_2 - a_1 \frac{b_2}{b_1} & a_2 \frac{b_2}{b_1} - a_1 \left(\frac{b_2}{b_1}\right)^2 & \dots & & & & & \\
 & 0 & \dots & & & & & &
 \end{array}$$

Nous cherchons combien de fois b_1 entre dans a_1 , ce qui donne le premier terme de la suite du quotient. Nous multiplions chaque terme de la suite $S(B)$ par a_1/b_1 et soustrayons la suite ainsi obtenue de $S(A)$. Nous cherchons combien de fois b_1 entre dans le premier terme de cette nouvelle suite, ce qui donne le deuxième terme de la suite du quotient, et l'opération se continue ainsi.

Nous constatons que ce quotient composé s'effectue selon les mêmes règles que la division dans le système décimal des chiffres donnés par la succession des termes des suites considérées, avec la différence que, lors des soustractions, on ne fait pas de report d'une colonne à l'autre; le résultat des soustractions, positif ou négatif, est conservé dans la même colonne.

Le calcul numérique d'un quotient composé peut s'effectuer le plus commodément en faisant usage de la formule de récurrence suivante :

Soit $S(C) = [c_1; c_2; \dots; c_n; \dots]$ la suite cherchée obtenue par le quotient composé des suites $S(A)$ et $S(B)$; le terme général c_n se calcule au moyen de la relation suivante :

$$c_n = \frac{1}{b_1} (a_n - b_n c_1 - b_{n-1} c_2 - b_{n-2} c_3 - \dots - b_2 c_{n-1})$$

ainsi nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 c_1 &= \frac{a_1}{b_1} \\
 c_2 &= \frac{1}{b_1} (a_2 - b_2 c_1) = \frac{1}{b_1} \left(a_2 - a_1 \frac{b_2}{b_1} \right) \\
 c_3 &= \frac{1}{b_1} (a_3 - b_3 c_1 - b_2 c_2) = \\
 &= \frac{1}{b_1} \left(a_3 - a_1 \frac{b_3}{b_1} - \frac{b_2}{b_1} \left(a_2 - a_1 \frac{b_2}{b_1} \right) \right), \text{ etc.}
 \end{aligned}$$

Nous retrouvons bien les termes obtenus en effectuant directement le quotient composé.

Exemple

Nous contrôlons qu'en divisant la suite $S(A)*S(B)=[1; 4; 7; 7; 4; 1]$ par la suite $S(B)=[1; 2; 2; 1]$ on retrouve bien la suite $S(A)=[1; 2; 4; 1]$:

$$\begin{array}{cccc|cccc}
 1 & 4 & 7 & 7 & 4 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\
 1 & 2 & 2 & 1 & & & 1 & 2 & 1 & \\
 \hline
 0 & 2 & 5 & 6 & 4 & & & & & \\
 & 2 & 4 & 4 & 2 & & & & & \\
 \hline
 & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & & & & \\
 & & 1 & 2 & 2 & 1 & & & & \\
 \hline
 & & 0 & 0 & 0 & 0 & & & &
 \end{array}$$

Remarques

a) Nous considérons les deux polynômes :

$$\begin{aligned}
 A(x) &= (a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots) \\
 B(x) &= (b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \dots)
 \end{aligned}$$

Nous effectuons le produit de ces deux polynômes et obtenons le polynôme suivant :

$$\begin{aligned}
 A(x) \cdot B(x) &= (a_1 b_1) x^2 + (a_2 b_1 + a_1 b_2) x^3 + \\
 &+ (a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1) x^4 + \dots
 \end{aligned}$$

Nous reconnaissons dans les coefficients des puissances de x les termes de la suite obtenue par le produit composé de $S(A)$ par $S(B)$. Nous en concluons que les termes de la série du produit ou du quotient composé s'obtiennent selon les mêmes règles que celles qui permettent de calculer les coefficients du polynôme obtenu par le produit ou le quotient de 2 polynômes.

Il est connu que le produit entre polynômes est commutatif et associatif, c'est-à-dire que l'ordre dans lequel on effectue le produit entre polynômes n'importe pas et que l'on peut mettre en évidence un facteur commun. Nous voyons ainsi que le produit composé est également commutatif et associatif, c'est-à-dire que :

$$S(A)*S(B) = S(B)*S(A)$$

$$S(A)*S(B) + S(A)*S(C) = S(A)*[S(B)+S(C)].$$

b) Si nous combinons le produit et le quotient composés, nous pouvons, si la variation de B résultant de la variation de A est connue, calculer la variation de B résultant d'une variation quelconque de A . Autrement dit, nous pouvons ramener les variations de B à une variation unitaire de A , sans qu'il soit nécessaire pour cela de connaître l'expression analytique des variations de A et B . Nous verrons que cette propriété est avantageuse dans certaines applications pratiques.

Nous avons vu que le quotient composé de la suite $S(A)$ par la suite $S(B)$ donne en principe la variation de la grandeur A résultant d'une variation de B selon une impulsion unitaire. Cependant, les règles du calcul à l'aide de suites sont valables lorsque les fonctions considérées s'étendent sur un intervalle très grand par rapport à celui de l'unité choisie, ce qui n'est pas le cas pour l'impulsion unité. Aussi, est-il préférable de ne pas choisir cette impulsion unité comme fonction unitaire de référence, mais de prendre l'échelon unité $U(t) = 1$ ou la fonction exponentielle $F(t) = 1 - e^{-t/T}$. Puisque le produit composé est commutatif, il est avantageux, en ce qui concerne l'exactitude des calculs,

de commencer par faire le produit composé de la suite qui figure au numérateur par la suite de la fonction unitaire, puis d'appliquer à la suite qui en résulte l'opération du quotient composé avec la suite qui figure au dénominateur.

c) Considérons le produit composé $S(C) = S(A) * S(B)$ et effectuons la somme des termes de $S(C)$:

$$\begin{aligned} S(C) &= c_1 + c_2 + c_3 \dots + c_n + \dots \\ &= a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1 + a_1 b_4 + \dots \\ &= a_1 (b_1 + b_2 + b_3 \dots + b_n + \dots) \\ &\quad + a_2 (b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n + \dots) + \dots \\ &\quad + a_n (b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n + \dots) + \dots \\ &= (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots) (b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n + \dots). \end{aligned}$$

Nous voyons que la somme des termes d'un produit composé est égale au produit de la somme des termes des suites dont on effectue le produit :

$$\Sigma S(C) = \Sigma S(A) \cdot \Sigma S(B).$$

On peut également démontrer que lorsque l'on effectue le quotient composé entre deux suites $S(C) = S(A) \# S(B)$, la somme des termes du quotient est égale au quotient de la somme des termes de la suite du numérateur par la somme des termes de la suite du dénominateur :

$$\Sigma S(C) = \Sigma S(A) : \Sigma S(B).$$

Cette propriété est très commode pour le contrôle numérique de l'opération d'un produit ou d'un quotient composé.

d) Considérons les deux suites :

$$S(A) = [1 ; 2 ; 3 ; 2 ; 1] \text{ et } S(B) = [1 ; 3 ; 2 ; 1].$$

Nous effectuons le quotient composé $S(A) \# S(B)$;

1	2	3	2	1	1	3	2	1
1	3	2	1		1	-1	4	-9
0	-1	1	1	1	21	...		
	-1	-3	-2	-1				
	0	4	3	2	0			
		4	12	8	4			
		0	-9	-6	-4	0		
			-9	-27	-18	-9		
			0	21	14	9		
							

Nous obtenons ainsi une suite alternée instable. Quelques indications sur le problème de la stabilité du quotient alterné sont donnés dans l'annexe I de la thèse dont cet article est extrait.

e) Dans de nombreux cas la relation dynamique qui unit A à B est connue par la « courbe de réponse Φ_{AB} de B par rapport à A », dite aussi « réponse indicelle de B par rapport à A », c'est-à-dire par la variation de B résultant d'une variation de A selon un échelon rectangulaire. Cette courbe de réponse peut soit avoir été calculée, soit avoir été relevée expérimentalement ; l'impulsion unité $I(t)$ est égale lorsque l'unité τ est suffisamment petite à la dérivée de l'échelon rectangulaire unitaire $U(t)$; en première approximation la réponse $G_{AB}(t)$ à l'impulsion unité est donnée par la dérivée de la courbe de réponse $\Phi_{AB}(t)$.

Nous avons vu que la suite échelonnée $S_e(A)$ décomposait la fonction $A(t)$ en une suite d'échelons rectangulaires. La variation de B résultant d'une variation quelconque de A peut également se calculer en faisant le produit composé de la suite échelonnée $S_e(A)$ par la suite caractérisant la courbe de réponse $\Phi_{AB}(t)$:

$$S(B) = [S_e(A) * S(\Phi_{AB})].$$

Ce mode de faire est avantageux, en particulier lorsque $A(t)$ ne s'annule pas en régime permanent, mais tend vers une valeur constante, car le nombre des termes de la suite échelonnée $S_e(A)$ se trouve limité, tandis que les suites $S(A)$ et $S_i(A)$ ont un nombre de termes illimité.

Selon la forme que l'on donne à la fonction unité (triangle, fonction exponentielle, etc.), on peut donner d'autres significations au produit composé, mais l'opération de ce produit reste la même.

Réciproquement si l'on fait le quotient composé de la suite $S(B)$ qui caractérise l'effet par la suite échelonnée $S_e(A)$ qui caractérise la cause, on obtient en première approximation comme résultat la suite qui caractérise la réponse indicelle de B par rapport à A .

5. Décalage

Soit $G(t)$ une fonction telle que :

$$\text{pour } \begin{cases} t < T^* & G(t) = 0 \\ t > T^* & G(t) = F(t - T^*). \end{cases}$$

La fonction $G(t)$ est donc la fonction $F(t)$ décalée de l'intervalle T^* ainsi que le représente la figure 8.

Soit $S(F) = [f_1 ; f_2 ; \dots ; f_n ; \dots]$ la suite qui correspond à $F(t)$. On voit immédiatement que la suite $S(G)$ qui correspond à $G(t)$ s'obtient par le produit composé de la suite $S(F)$ par la suite $[0 ; \dots ; 0 ; 1]$, le nombre de zéros étant donné par le quotient $T^*/\tau = T$.

$$\begin{aligned} S(G) &= [f_1 ; f_2 ; \dots ; f_n ; \dots] * [0 ; 0 ; \dots ; 0 ; 1] \\ &= [0 ; 0 ; \dots ; 0 ; f_1 ; f_2 ; \dots ; f_n ; \dots] \\ &= S(F) * D(+T). \end{aligned}$$

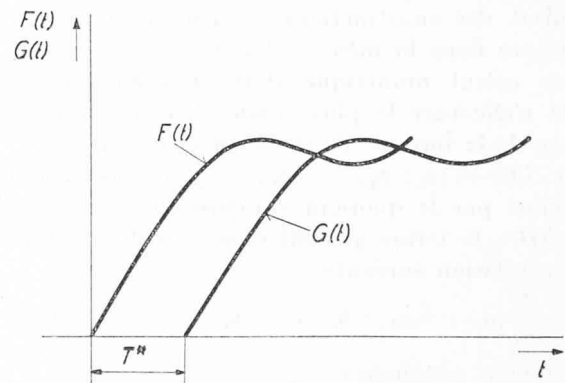


FIG. 8. — Définition du décalage.

Nous définissons par $D(+T)$ la suite qui caractérise l'opération du décalage

$$D(+T) = [0 ; 0 ; \dots ; 0 ; 1].$$

Autrement dit, le produit composé d'une suite avec $D(+T)$ signifie que la fonction correspondant à cette suite est décalée en arrière de l'intervalle T .

Inversement, nous définissons par le produit composé avec la suite $D(-T)$ le décalage de T unité *en avant*, c'est-à-dire que le $(T + 1)$ nième terme devient le premier terme de la nouvelle suite, le $(T + 2)$ nième terme devient le 2^e terme, etc., les termes pour $t < 0$ étant supprimés.

Ainsi par exemple :

$$\begin{aligned} S(G) &= D(-1) * S(F) \\ &= D(-1) * [f_1; f_2; f_3; \dots; f_n; \dots] \\ &= [f_2; f_3; f_4; \dots; f_{n+1}; \dots]. \end{aligned}$$

6. Intégration

A. Première intégration.

Soit $S(F) = [f_1; f_2; \dots; f_n; \dots]$ la suite qui correspond à la fonction $F(t)$ et $S_i(F)$ sa suite intercalaire, ainsi que le représente la figure 3.

$$S_i(F) = \frac{1}{2} [f_0 + f_1; f_1 + f_2; \dots; f_{n-1} + f_n; \dots].$$

Nous voyons immédiatement que cette suite intercalaire $S_i(F)$ est obtenue par le produit composé de la suite $S(F)$ par la suite $0,5 [1; 1]$, produit auquel on ajoute la suite $\left[\frac{f_0}{2}\right]$ réduite à un seul terme :

$$S_i(F) = S(F) * 0,5 [1; 1] + \left[\frac{f_0}{2}\right].$$

Cette suite intercalaire donne en première approximation la valeur moyenne de la fonction pendant les différents intervalles unitaires ; ainsi que l'indique la figure 3, les valeurs de l'intégrale

$\int_0^t F(t)dt$ peuvent se calculer en faisant la somme des impulsions définies par les termes de la suite intercalaire et multipliées par l'unité choisie :

$$\begin{aligned} \int_0^\tau F(t)dt &= \frac{f_0 + f_1}{2} \tau \\ \int_0^{2\tau} F(t)dt &= \left(\frac{f_0 + f_1}{2} + \frac{f_1 + f_2}{2}\right) \tau = \left(\frac{f_0}{2} + f_1 + \frac{f_2}{2}\right) \tau \\ &\vdots \\ \int_0^{n\tau} F(t)dt &= \left(\frac{f_0 + f_1}{2} + \frac{f_1 + f_2}{2} + \dots + \frac{f_{n-1} + f_n}{2}\right) \tau \\ &= \left(\frac{f_0}{2} + f_1 + f_2 + \dots + f_{n-1} + \frac{f_n}{2}\right) \tau. \end{aligned}$$

La suite qui caractérise l'intégrale est donc la suivante :

$$\begin{aligned} S\left(\int_0^t F(t)dt\right) &= \\ &= \tau \left[\frac{f_0 + f_1}{2}, \frac{f_0}{2} + f_1 + \frac{f_2}{2}, \dots, \frac{f_0}{2} + f_1 + f_2 + \dots + f_{n-1} + \frac{f_n}{2}\right] \end{aligned}$$

avec $t = n\tau$.

Elle est obtenue en faisant le produit de la suite intercalaire S_i par la suite de la fonction unitaire $[1; 1; \dots; 1; \dots]$ comme le montre le produit composé ci-dessous :

$$\begin{array}{cccc} 0,5 & (f_0 + f_1 & f_1 + f_2 & f_2 + f_3 & \dots) \\ & \underline{1} & \underline{1} & \underline{1} & \dots) \\ 0,5 & (f_0 + f_1 & f_1 + f_2 & f_2 + f_3 & \dots) \\ 0,5 & (& f_0 + f_1 & f_1 + f_2 & \dots) \\ 0,5 & (& & f_0 + f_1 & \dots) \\ \vdots & & & \vdots & \dots) \\ 0,5 & (f_0 + f_1 & f_0 + 2f_1 + f_2 & f_0 + 2f_1 + 2f_2 + f_3 & \dots) \end{array}$$

Nous avons vu que le produit composé était commutatif, c'est-à-dire que l'ordre dans lequel on effectuait le produit n'avait pas d'influence sur son résultat. Nous en concluons que :

$$\begin{aligned} S\left(\int_0^t F(t)dt\right) &= \\ &= \tau \left(\left[S(F) * 0,5 [1; 1] + \frac{f_0}{2} \right] * [1; 1; \dots; 1; \dots] \right) \\ &= \frac{\tau}{2} \left(S(F) * [1; 1] * [1; 1; \dots; 1; \dots] + f_0 [1; 1; \dots; 1; \dots] \right) \\ &= \tau \left(S(F) * [0,5; 1; 1; \dots; 1; \dots] + \frac{f_0}{2} [1; 1; \dots; 1; \dots] \right). \end{aligned} \tag{2}$$

Nous retrouvons la même formule que celle indiquée par A. Tustin (1) avec en plus le terme en f_0 . Ce procédé d'intégration est bien connu sous le nom d'« intégration selon la règle du trapèze ».

Exemple

Nous nous proposons de calculer l'intégrale de la fonction linéaire. Nous savons que c'est une parabole.

$$F(t) = t \quad \int_0^t F(t)dt = \int_0^t t dt = \frac{t^2}{2}$$

$S(F) = [1; 2; \dots; n; \dots]$ avec $\tau = 1$ et $f_0 = 0$.

Nous effectuons le produit composé donné par la formule (2) :

$$\begin{array}{cccccccc} S(F) = & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n & \dots \\ & \underline{0,5} & \underline{1} & \underline{1} & \underline{1} & \dots & \underline{1} & \dots \\ & 0,5 & 1 & 1,5 & 2 & \dots & 0,5n & \dots \\ & & 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & \dots \\ & & & 1 & 2 & \dots & n-2 & \dots \\ & & & & 1 & \dots & n-3 & \dots \\ & & & & & \vdots & & \dots \end{array}$$

$$S\left(\int_0^t F(t)dt\right) = 0,5; 2; 4,5; 8 \dots\dots$$

Nous retrouvons, en effet, les termes de la suite parabolique correspondant à la fonction $t^2/2$.

B. *Intégrations successives*

En appliquant cette même opération à la première intégrale, nous pouvons déterminer les intégrales d'un ordre plus élevé. Nous obtenons ainsi, pour l'intégrale double, en tenant compte du fait que si $F(0) \neq \infty$ on a :

$$\int_0^0 F(t)dt = 0$$

$$S\left(\int_0^t dt \int_0^t F(t)dt\right) = \\ = \tau [0,5; 1; 1; \dots; 1; \dots] * \left[\tau \left([0,5; 1; 1; \dots; 1; \dots] * S(F) \right) + \frac{f_0}{2} [1; 1; \dots; 1; \dots] \right]$$

Un regroupement de cette expression donne :

$$S\left(\int_0^t dt \int_0^t F(t)dt\right) = \tau^2 \left(S(F) * [0,5; 1; 1; \dots; 1; \dots]^2 + \frac{f_0}{2} \left([0,5; 1; 1; \dots; 1; \dots] * [1; 1; \dots; 1; \dots] \right) \right)$$

En appliquant successivement la même opération, nous obtenons l'expression suivante pour la $k^{\text{ième}}$ intégration :

$$S\left(\int_0^t dt \int_0^t \dots \int_0^t F(t)dt\right) = \tau^k \left(S(F) * [0,5; 1; 1; \dots; 1; \dots]^k + \frac{f_0}{2} \left([1; 1; \dots; 1; \dots] * [0,5; 1; 1; \dots; 1; \dots]^{k-1} \right) \right)$$

Exemple

Nous nous proposons de calculer la deuxième intégrale de l'échelon rectangulaire unitaire

$$U(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ 1 & \text{pour } t > 0 \end{cases}$$

$S(U) = [1; 1; 1; \dots; 1; \dots]$ avec $U(0) = 1$ et $\tau = 1$

$$\int_0^t dt \int_0^t U(t)dt = \frac{t^2}{2}$$

$$S\left(\int_0^t dt \int_0^t U(t)dt\right) = \\ = [0,5; 1; 1; \dots; 1; \dots]^2 * [1; 1; \dots; 1; \dots] + \\ + 0,5 [1; 1; \dots; 1; \dots] * [0,5; 1; 1; \dots; 1; \dots] \\ = [0,25; 1; 2; 3; \dots] * [1; 1; \dots; 1; \dots] + \\ + 0,5 [0,5; 1,5; 2,5; 3,5; \dots] \\ = [0,25; 1,25; 3,25; \dots] + [0,25; 0,75; 1,25; \dots] \\ = [0,5; 2; 4,5; 8; \dots]$$

Comme il fallait s'y attendre, cette suite correspond bien à la fonction parabolique $t^2/2$.

Cependant, pour les intégrales d'un ordre plus élevé, l'approximation est moins bonne. Cela pro-

vient du fait que la fonction ne varie plus linéairement pendant un intervalle unitaire. La valeur moyenne de la fonction sur cet intervalle n'est plus donnée par sa valeur médiane. Une meilleure approximation de l'intégration est obtenue en faisant usage de la suite échelonnée $S_e(F)$, telle que nous l'avons définie au paragraphe 3.

Il est connu que la $k^{\text{ième}}$ intégrale d'un échelon rectangulaire unitaire est donnée par l'expression suivante :

$$\int_0^t dt \int_0^t \dots \int_0^t U(t)dt = \frac{t^k}{k!}$$

La suite qui correspond à cette intégration est la suivante :

$$S\left(\frac{t^k}{k!}\right) = \frac{\tau^k}{k!} [1; 2^k; 3^k; \dots; n^k; \dots]$$

Considérons à nouveau une fonction $F(t)$ caractérisée par la suite $S(F)$ et la suite échelonnée $S_e(F)$. Nous pouvons intégrer chacun des termes de $S_e(F)$, et ensuite superposer le résultat de ces différentes intégrations.

Ainsi pour la $k^{\text{ième}}$ intégration, nous obtenons :

pour $t = \tau$: $\frac{\tau^k}{k!} \cdot \frac{f_0 + f_1}{2}$

pour $t = 2\tau$: $\frac{\tau^k}{k!} \left(\frac{f_0 + f_1}{2} (1 + 2^k) + \frac{f_2 - f_1}{2} \right)$

pour $t = 3\tau$:

$$\frac{\tau^k}{k!} \left(\frac{f_0 + f_1}{2} (1 + 2^k + 3^k) - \frac{f_2 - f_1}{2} (1 + 2^k) + \frac{f_3 - f_1}{2} \right)$$

Nous obtenons le résultat du produit composé de la suite échelonnée par la suite $\frac{\tau^k}{k!} [1; 2^k; 3^k; \dots; n^k; \dots]$. La suite échelonnée est donnée par le produit composé de la suite intercalaire $S_i(F)$ par la suite $[1; -1]$:

$$S_e(F) = S_i(F) * [1; -1] \\ = \left[S(F) * 0,5 [1; 1] + \left[\frac{f_0}{2} \right] \right] * [1; -1]$$

Nous voyons ainsi que la $k^{\text{ième}}$ intégrale d'une fonction $F(t)$ est donnée par le produit composé suivant :

$$S\left(\int_0^t dt \int_0^t \dots \int_0^t F(t)dt\right) = \left[S(F) * 0,5 [1; 1] + \left[\frac{f_0}{2} \right] \right] * [1; -1] * \frac{\tau^k}{k!} [1; 2^k; 3^k; \dots; n^k; \dots] \quad (3)$$

Pour $k = 1$ et $k = 2$, c'est-à-dire pour la première et deuxième intégrales, nous pouvons aisément contrôler que nous obtenons le même résultat que celui déjà obtenu.

7. Dérivation

A. Première dérivation

Considérons à nouveau une fonction $F(t)$ à laquelle correspondent la suite $S(F)$ et la suite intercalaire $S_i(F)$.

Nous nous proposons de déterminer la dérivée de la fonction à l'abscisse $t = n\tau$ et pour ce faire, nous considérons le petit triangle hachuré de la figure 9. La base de ce petit triangle est égale à l'unité choisie τ , sa hauteur est égale à la différence entre les deux termes voisins de la suite intercalaire. Nous en concluons :

$$\left. \frac{dF(t)}{dt} \right|_{t=n\tau} \approx \operatorname{tg} \alpha \approx \left(\frac{F((n+1)\tau) + F(n\tau)}{2} - \frac{F(n\tau) + F((n-1)\tau)}{2} \right) \frac{1}{\tau}$$

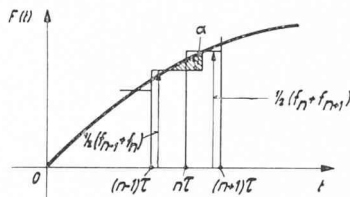


FIG. 9. — Définition de la dérivation à l'aide de suites.

Ainsi pour :

$$t = \tau, \quad \frac{dF}{dt} = \frac{1}{\tau} \left(\frac{f_2 + f_1}{2} - \frac{f_1 + f_0}{2} \right) = \frac{1}{2\tau} (f_2 - f_0)$$

$$t = 2\tau, \quad \frac{dF}{dt} = \frac{1}{\tau} \left(\frac{f_3 + f_2}{2} - \frac{f_2 + f_1}{2} \right) = \frac{1}{2\tau} (f_3 - f_1)$$

$$\vdots$$

$$t = n\tau, \quad \frac{dF}{dt} = \frac{1}{\tau} \left(\frac{f_{n+1} + f_n}{2} - \frac{f_n + f_{n-1}}{2} \right) = \frac{1}{2\tau} (f_{n+1} - f_{n-1}).$$

Nous obtenons donc pour la suite correspondant à la fonction dérivée l'expression suivante :

$$S\left(\frac{dF}{dt}\right) = \frac{1}{\tau} \left[\frac{f_1 + f_2}{2} - \frac{f_0 + f_1}{2}, \frac{f_3 + f_2}{2} - \frac{f_2 + f_1}{2}, \dots; \right. \\ \left. \frac{f_{n+1} + f_n}{2} - \frac{f_n + f_{n-1}}{2}, \dots \right]$$

$$= \frac{1}{2\tau} [f_2 - f_0; f_3 - f_1; \dots; f_{n+1} - f_{n-1}; \dots].$$

Nous voyons immédiatement que cette suite est obtenue en faisant le produit composé de la suite intercalaire par la suite $[1; -1]$, en divisant le résultat ainsi obtenu par l'unité choisie τ et en décalant ce résultat d'une unité en avant, c'est-à-dire en prenant le deuxième terme comme premier terme, le troisième terme comme deuxième terme, etc.

$$S\left(\frac{dF}{dt}\right) = \frac{1}{\tau} \left(\left[S(F) * 0,5[1; 1] + \left[\frac{f_0}{2} \right] * [1; -1] * D(-1) \right] \right. \\ \left. = \frac{1}{2\tau} \left(\left[S(F) * [1; 0; -1] + f_0[1; -1] \right] * D(-1) \right) \right) \quad (4)$$

Le signe symbolique $D(-1)$ signifie ce décalage en avant de 1 unité de temps.

Nous obtenons une expression légèrement différente de celle indiquée par A. Tustin (1) qui définit la suite correspondant à la différentiation comme l'inverse de la suite correspondant à l'intégration et qui obtient le résultat suivant :

$$S\left(\frac{dF}{dt}\right) = \frac{1}{\tau} \frac{S(F)}{[0,5; 1; 1; \dots; 1; \dots]} = \\ = \frac{1}{\tau} * [2; -4; +4; -4; \dots] = S(F) * \frac{2}{\tau} \cdot \frac{[1; -1]}{[1; 1]}.$$

L'erreur qui affecte le résultat de la dérivation obtenu par l'application de la formule (4) est indiquée dans l'annexe II de la thèse dont cet article est extrait.

Exemple

Nous nous proposons de calculer la dérivée de la fonction parabolique :

$$F(t) = \frac{t^2}{2} \quad \frac{dF}{dt} = t \quad F(0) = 0$$

$$S\left(\frac{t^2}{2}\right) = \left[0,5; 2; 4,5; 8; 12,5; \dots; \frac{n^2}{2}; \dots \right] \text{ avec } \tau = 1.$$

Nous effectuons le produit composé donné par la formule (4) :

0,5	2	4,5	8	12,5	...
1	0	-1			
0,5	2	4,5	8	12,5	...
		-0,5	-2	-4,5	...
0,5	2	4	6	8	...

Nous supprimons le premier terme de la suite ainsi obtenue et divisons cette suite par 2. Il en résulte :

$$S\left(\frac{d}{dt} \frac{t^2}{2}\right) = S(t) = [1; 2; 3; 4; \dots; n; \dots],$$

ce qui est bien le résultat auquel il fallait s'attendre.

B. Dérivations successives

La seconde dérivée s'obtient en appliquant la même opération à la suite qui caractérise la première dérivée :

$$S(F'') = S\left(\frac{d^2F}{dt^2}\right) = \\ = \frac{1}{2\tau} \left(\left[S(F') * [1; 0; -1] + f'(0)[1; -1] \right] * D(-1) \right)$$

où f'_0 est donnée par la valeur de $\frac{dF}{dt}$ pour $t = 0$

$$S(F'') = \frac{1}{(2\tau)^2} \left(\left[\left[S(F) * [1; 0; -1]^2 + f_0[1; -1] \right] * [1; 0; -1] * D(-2) \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{2\tau} \left(f'_0[1; -1] * D(-1) \right) \right)$$

$$\text{avec } [1; 0; -1]^2 = [1; 0; -1] * [1; 0; -1] = \\ = [1; 0; -2; 0; 1]$$

et $D(-2) =$ décalage de deux unités en avant.

D'une façon générale, la suite de la dérivée d'ordre k est obtenue de la façon suivante :

$$S(F^{(k)}) = S\left(\frac{d^k F}{dt^k}\right) = \frac{1}{(2\tau)^k} \left([S(F) * [1; 0; -1]^k + f_0 [1; -1] * [1; 0; -1]^{k-1}] * D(-k) \right) + \frac{1}{(2\tau)^{k-1}} \left([f'_0 [1; -1] * [1; 0; -1]^{k-2}] * D(1-k) \right) + \dots + \frac{1}{2\tau} \left([f_0^{(k-1)} [1; -1]] * D(-1) \right). \tag{5}$$

Exemple

Nous nous proposons de calculer la deuxième dérivée de la fonction parabolique :

$$F(t) = \frac{t^2}{2} \text{ avec } F(0) = F'(0) = 0.$$

Nous obtenons en admettant $\tau = 1$ et en effectuant le produit composé donné par la formule (5) dans laquelle on pose $k = 2$:

0,5	2	4,5	8	12,5	18	24,5
1	0	-2	0	1			
0,5	2	4,5	8	12,5	18	24,5
		-1	-4	-9	-16	-25
				0,5	2	4,5
0,5	2	3,5	4	4	4	4

Nous supprimons les deux premiers termes et obtenons après avoir divisé par 4 :

$$S\left(\frac{d^2}{dt^2} \frac{t^2}{2}\right) = [0,875; 1; 1; \dots; 1; \dots]$$

A part le premier terme, nous obtenons bien le terme constant $U = 1$, ainsi qu'il fallait s'y attendre. L'inexactitude qui affecte le premier terme montre les limites de la précision du calcul à l'aide de suites pour les dérivées d'un ordre supérieur.

III. Equations différentielles linéaires

1. Equations différentielles linéaires du 1^{er} ordre

Considérons tout d'abord une équation linéaire différentielle du type suivant :

$$a \frac{dx}{dt} + bx = F(t).$$

Cette équation est obtenue par la dérivée de l'équation intégrale suivante :

$$ax + b \int_0^t x dt + C = \int_0^t F(t) dt.$$

C est la constante d'intégration à déterminer par les conditions aux limites. Pour $t = 0$ nous obtenons :

$$ax(0) + C = 0$$

donc

$$C = -ax(0).$$

Nous obtenons ainsi :

$$a(x - x(0)) + b \int_0^t x dt = \int_0^t F(t) dt.$$

Nous traduisons cette équation intégrale sous forme d'équations de suites. Soit $S(x) = [x_1; x_2; \dots; x_n; \dots]$ la suite de la fonction que l'on se propose de déterminer et dont on connaît la valeur initiale $x(0) = x_0$, et soit $S(F) = [f_1; f_2; \dots; f_n; \dots]$ la suite qui correspond à la fonction $F(t)$, avec la valeur initiale $f_0 = F(0)$.

En utilisant la formule (2), nous obtenons :

$$a S(x) - ax_0 [1; 1; \dots; 1; \dots] + b\tau \left(S(x) * [0,5; 1; 1; \dots; 1; \dots] + \frac{x_0}{2} [1; 1; \dots; 1; \dots] \right) = \tau \left(S(F) * [0,5; 1; 1; \dots; 1; \dots] + \frac{f_0}{2} [1; 1; \dots; 1; \dots] \right).$$

Nous résolvons cette équation par rapport à $S(x)$:

$$S(x) = \frac{S(F) * \tau [0,5; 1; 1; \dots; 1; \dots] + \left(\frac{\tau}{2} (f_0 - bx_0) + ax_0\right) [1; 1; \dots; 1; \dots]}{[a + 0,5 b \tau; b \tau; b \tau; \dots; b \tau; \dots]} \tag{6}$$

Ce quotient composé permet de calculer la suite $S(x)$ qui caractérise la solution de l'équation différentielle. On voit que le $(n + 1)$ ^{ième} terme est donné par la relation suivante :

$$ax_{n+1} - ax_0 + b\tau \left(\frac{x_0}{2} + x_1 + x_2 + \dots + x_n + \frac{x_{n+1}}{2} \right) = \tau \left(\frac{f_0}{2} + f_1 + f_2 + \dots + \frac{f_{n+1}}{2} \right).$$

Si l'on soustrait cette expression de celle obtenue pour le n ^{ième} terme, on obtient la formule de récurrence suivante :

$$a(x_{n+1} - x_n) + \frac{b\tau}{2}(x_n + x_{n+1}) = \frac{\tau}{2}(f_n + f_{n+1}).$$

Cette formule peut être également obtenue en appliquant directement à l'équation différentielle la formule (4) de la différentiation à l'aide de suites :

$$\frac{a}{2\tau} [S(x) * [1; 0; -1]] * D(-1) + b S(x) = S(F).$$

En effectuant le produit composé que contient la parenthèse, on obtient entre les termes voisins du n ^{ième} terme de la suite $S(x)$ la relation suivante :

$$\frac{a}{2\tau} x_{n+1} + bx_n - \frac{a}{2\tau} x_{n-1} = f_n.$$

Cette relation correspond à celle que nous avons déjà obtenue, avec la différence que dans le cas

précédent l'unité était réduite de moitié et que la relation était appliquée entre les termes voisins et le terme intermédiaire de la suite intercalaire.

Cette formule de récurrence correspond à un cas particulier de la méthode d'intégration classique d'Adams. Il est connu que cette méthode s'applique aux équations différentielles non linéaires du type (3) :

$$a \frac{dx}{dt} = \varphi(x, t).$$

En intégrant cette équation dans l'intervalle τ de t_n à t_{n+1} et en appliquant la règle du trapèze, on obtient :

$$a(x_{n+1} - x_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \varphi(x, t) dt \simeq \frac{\tau}{2} (\varphi(x_n, t_n) + \varphi(x_{n+1}, t_{n+1})).$$

Dans le cas particulier où l'équation différentielle est linéaire, on peut poser :

$$\varphi(x, t) = -bx + F(t).$$

Il en résulte :

$$a(x_{n+1} - x_n) = \frac{\tau}{2} (-bx_n + f_n - bx_{n+1} + f_{n+1}).$$

On retrouve l'expression déjà obtenue. On peut en conclure que la méthode de résolution d'une équation différentielle du premier ordre au moyen du calcul à l'aide de suites selon la formule (6) est identique à l'application de la méthode d'Adams lorsque l'intégration que nécessite cette méthode est effectuée selon la règle du trapèze. Toutes les considérations concernant la stabilité et la précision de la méthode d'Adams peuvent ainsi être étendues à notre cas (3 à 7).

2. Equations différentielles linéaires d'un ordre supérieur

Considérons une équation différentielle du deuxième ordre :

$$a \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx = F(t).$$

Cette équation est obtenue par la dérivée de l'équation suivante :

$$a \frac{dx}{dt} + bx + c \int_0^t x dt + C_1 = \int_0^t F(t) dt$$

avec $C_1 = -(a\dot{x}(0) + bx(0))$

et $\dot{x}(0) = \frac{dx}{dt}$ pour $t = 0$.

Nous introduisons cette constante dans l'équation que nous avons obtenue, ce qui donne :

$$a \left(\frac{dx}{dt} - \dot{x}(0) \right) + b(x - x(0)) + c \int_0^t x dt = \int_0^t F(t) dt.$$

Cette équation est obtenue par la dérivée de l'équation suivante :

$$a \left(x - \int_0^t \dot{x}(0) dt \right) + b \left(\int_0^t x dt - \int_0^t x(0) dt \right) + c \int_0^t dt \int_0^t x dt + C_2 = \int_0^t dt \int_0^t F(t) dt$$

avec $C_2 = -ax(0)$.

En considérant que $x(0)$ et $\dot{x}(0)$ sont des constantes, nous obtenons :

$$a(x - x(0) - \dot{x}(0)t) + b \left(\int_0^t x dt - x(0)t \right) + c \int_0^t dt \int_0^t x dt = \int_0^t dt \int_0^t F(t) dt$$

soit :

$$ax + b \int_0^t x dt + c \int_0^t dt \int_0^t x dt = \int_0^t dt \int_0^t F(t) dt + (a\dot{x}(0) + bx(0))t + ax(0).$$

Nous traduisons à nouveau cette équation intégrale sous forme d'équation de suites et introduisons les expressions des premières et deuxièmes intégrations à l'aide de suites :

$$a S(x) + b\tau \left(S(x) * [0,5; 1; 1; \dots; 1; \dots] + \frac{x_0}{2} [1; 1; 1; \dots; 1; \dots] \right) + c\tau^2 \left(S(x) * [0,5; 1; 1; \dots; 1; \dots]^2 + \frac{x_0}{2} [0,5; 1; 1; \dots; 1; \dots] * [1; 1; 1; \dots; 1; \dots] \right) = \tau^2 \left(S(F) * [0,5; 1; 1; \dots; 1; \dots]^2 + \frac{f_0}{2} [0,5; 1; 1; \dots; 1; \dots] * [1; 1; \dots; 1; \dots] \right) + \tau(a\dot{x}_0 + bx_0) [1; 2; 3; \dots; n; \dots] + ax_0 [1; 1; 1; \dots; 1; \dots]$$

avec $x_0 = x(0)$; $\dot{x}_0 = \dot{x}(0)$; $f_0 = F(0)$.

Nous résolvons cette équation par rapport à $S(x)$ et effectuons les produits composés contenus dans les parenthèses :

$$S(x) = \left[S(F) * \tau^2 [0,25; 1; 2; 3; \dots] + \frac{\tau^2}{2} (f_0 - cx_0) [0,5; 1,5; 2,5; 3,5; \dots] + \tau(a\dot{x}_0 + bx_0) [1; 2; 3; \dots] + \left(ax_0 - \frac{b\tau x_0}{2} \right) [1; 1; \dots; 1; \dots] \right] * [a + 0,5b\tau + 0,25c\tau^2; b\tau + c\tau^2; b\tau + 2c\tau^2; b\tau + 3c\tau^2; \dots]. \tag{7}$$

* * *

On peut aisément étendre ce procédé de calcul à des équations différentielles d'un ordre supérieur. Cependant les calculs deviennent assez compliqués et l'approximation devient moins bonne par suite des intégrations d'un ordre supérieur que cela nécessite.

3. Exemples

A. Calcul d'un dispositif mécanique

Considérons le dispositif mécanique représenté par la figure 10 formé par un amortisseur *B* et un ressort *F*. Nous nous proposons de calculer la course *X* au point *P* en fonction de la force *K* qui agit sur ce point. Ce système obéit à l'équation différentielle suivante, dans l'hypothèse que l'on peut négliger la masse de la partie mobile :

$$b \frac{dX}{dt} + jX = K(t)$$

avec

b = constante d'amortissement

et *f* = caractéristique du ressort.

Nous considérons une variation de *K* et de *X* par rapport à un état initial de repos et posons :

$$K = K_0 + \Delta K$$

et $X = X_0 + \Delta X.$

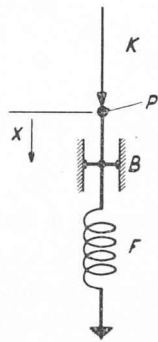


FIG. 10. — Dispositif mécanique constitué par un amortisseur et un ressort.

Nous tenons compte du fait que $K_0 = jX_0$, que $\frac{dX_0}{dt} = 0$ et obtenons :

$$\frac{b dx}{j dt} + x = k$$

avec

$$k = \frac{\Delta K}{K_0} \quad x = \frac{\Delta X}{X_0}$$

Nous définissons par $T = \frac{b}{j\tau}$ la constante de temps du dispositif mesurée à l'aide de l'unité τ et obtenons :

$$T\tau \frac{dx}{dt} + x = k.$$

Considérons le cas particulier où *k* a la forme d'un échelon rectangulaire ainsi que le représente la courbe 1 de la figure 11

$$k = \bar{k} [1; 1; \dots; 1; \dots].$$

Nous admettons par exemple que la constante de temps $T = 8$ sec et que $\tau = 1$ sec. La solution analytique de l'équation différentielle dans ce cas particulier est donnée par une courbe exponentielle :

$$\frac{x(t)}{\bar{k}} = 1 - e^{-\frac{t}{T}} = 1 - e^{-\frac{t}{8}}.$$

La suite correspondant à cette fonction, que représente la courbe 2 de la figure 11, est la suivante :

$$S\left(\frac{x}{\bar{k}}\right) = [0,119; 0,221; 0,313; 0,393; 0,463; 0,527; 0,581; 0,631; 0,675; \dots].$$

Pour résoudre cette équation à l'aide de suites, nous admettons $\tau = 1$. Nous utilisons la formule (6) et obtenons ainsi :

$$a = T, \quad b = \tau = 1 \quad \text{et} \quad f_0 = x_0 = 0$$

$$\begin{aligned} TS(x) + S(x) * [0,5; 1; 1; \dots; 1; \dots] &= \\ &= S(k) * [0,5; 1; 1; \dots; 1; \dots] \\ &+ \frac{k_0}{2} [1; 1; \dots; 1; \dots]. \end{aligned}$$

Nous considérons à nouveau une variation de la force selon un échelon rectangulaire et obtenons, en admettant $T = 8$:

$$S\left(\frac{x}{\bar{k}}\right) = \frac{[1; 2; 3; 4; \dots; n; \dots]}{[8,5; 1; 1; \dots; 1; \dots]}.$$

Nous effectuons ce quotient composé :

1	2	3	4	5	...	8,5	1	1	1	...
1	0,118	0,118	0,118	0,118	...	0,118	0,221	0,313	0,393	...
0	1,882	2,882	3,882	4,882	...	1,882	0,221	0,221	0,221	...
0	2,661	3,661	4,661	...	2,661	0,313	0,313	...		
0	3,348	4,348	...							

et on obtient :

$$S\left(\frac{x}{\bar{k}}\right) = [0,118; 0,221; 0,313; 0,393; 0,463; 0,527; \dots].$$

Cette variation se confond avec la courbe 2 de la figure 11 et correspond bien au résultat obtenu par voie analytique.

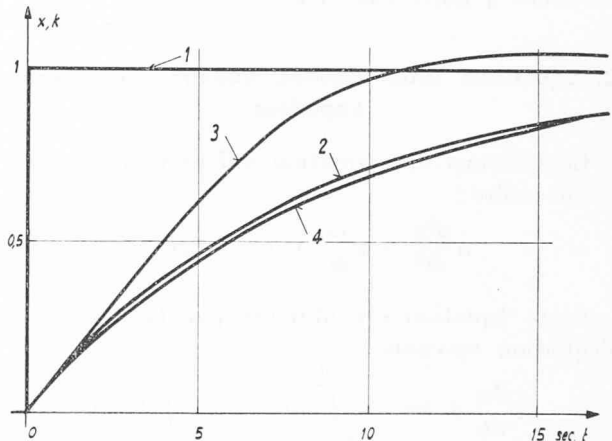


FIG. 11. — Réponse du dispositif mécanique à une variation de la force selon un échelon rectangulaire.

- Courbe 1 : variation relative de la force *K*.
- Courbe 2 : variation relative de la course *X* calculée par voie analytique et calculée au moyen de suites lorsque l'unité choisie n'est pas négligeable.
- Courbe 3 : variation relative de la course d'un dispositif avec retard.
- Courbe 4 : variation relative de la course *X* calculée au moyen de suites lorsque l'unité choisie est négligeable.

Le grand mérite de cette dernière méthode d'intégration est qu'elle se prête bien à l'intégration des équations différentielles dont le terme perturbateur est quelconque, tel que, par exemple, celui qui est défini par la courbe de la figure 12 à laquelle correspond la suite suivante :

$$S(k) = k [1; 1,6; 1,5; 1,3; 1; 0,7; 0,5; 0,4; 0,3; 0,22; 0,15; 0,09; 0,04; 0,02]$$

avec $\bar{k}_0 = 0$.

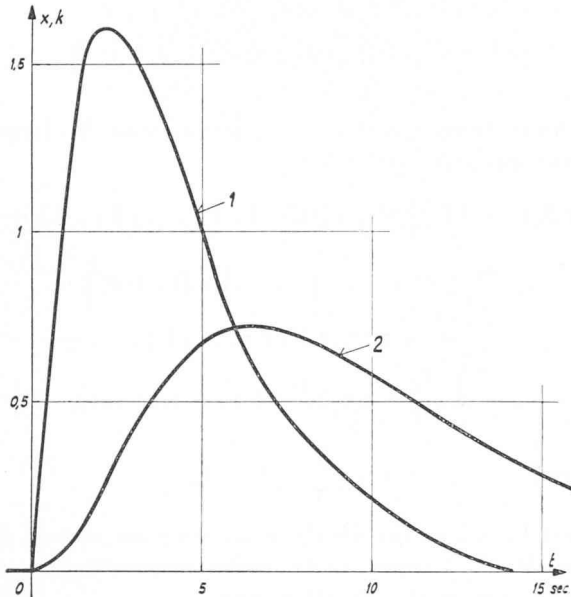


FIG. 12. — Réponse du dispositif mécanique à une variation de la force selon une allure quelconque. Courbe 1 : variation relative de la force K. Courbe 2 : variation relative de la course du point X.

Si nous effectuons le produit composé de cette suite par la suite [0,5; 1; 1; 1; ...; 1; ...] et le quotient composé par la suite [8,5; 1; 1; 1; ...; 1; ...] nous obtenons :

$$s\left(\frac{x}{k}\right) = \frac{[0,5; 1; 1; \dots; 1; \dots] * [1; 1,6; 1,5; 1,3; 1; 0,7; 0,5; 0,4; 0,22; 0,15; 0,09; 0,04; 0,02]}{[8,5; 1; 1; 1; \dots; 1; \dots]}$$

Le résultat de ce quotient composé est représenté par la courbe 2 de la figure 12. Nous voyons que par suite de l'amortissement, la variation de x se trouve ralentie et en quelque sorte écrasée.

B. Calcul d'une corde chargée

La figure 13 représente une corde de longueur l tendue entre deux points A et B et portant une charge dont la répartition est donnée par la courbe $w(x)$. Soit K la traction à laquelle la corde est soumise à ses deux extrémités. Nous nous proposons de déterminer la flèche $y(x)$ en chacun des points de cette corde.

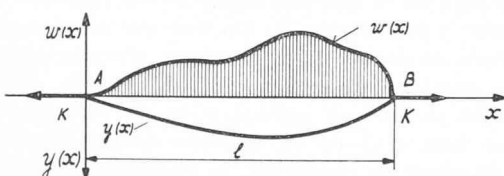


FIG. 13. — Détermination de la flexion d'une corde avec charge répartie de façon quelconque.

Il est connu que $y(x)$ est donnée par l'équation différentielle suivante (8) :

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} = -\frac{w(x)}{K}$$

Nous intégrons cette équation deux fois et obtenons :

$$y(x) = -\left(\int_0^x dx \int_0^x \frac{w(x)}{K} dx + \int_0^x C_1 dx + C_2\right)$$

C_1 et C_2 sont les constantes d'intégration à déterminer par les conditions aux limites.

Pour $x = 0$, nous posons $y(x) = 0$. Comme les intégrales sont nécessairement nulles pour cette valeur de x , nous en concluons que :

$$y(0) = 0 = C_2$$

La constante d'intégration C_1 se détermine par la condition $y(l) = 0$.

Nous obtenons ainsi :

$$y = -\frac{1}{K} \left(\int_0^x dx \int_0^x w(x) dx + C_1 x \right)$$

avec

$$C_1 = -\frac{1}{lK} \int_0^l dx \int_0^l w(x) dx$$

Si la répartition de la charge est quelconque et ne se laisse pas exprimer de façon analytique, il est avantageux de se servir du calcul à l'aide de suites pour effectuer ces intégrales doubles.

A titre d'illustration, nous considérons le cas particulier d'une charge constante égale à w_0 entre x_1 et x_2 et nulle ailleurs, ainsi que le représente la courbe 1 de la figure 14.

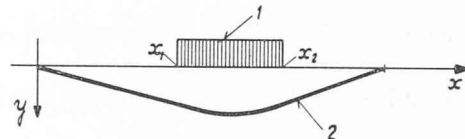


FIG. 14. — Flexion d'une corde chargée dans un cas particulier.

Courbe 1 : allure de la charge.
Courbe 2 : allure de la corde.

Dans ce cas de charge particulier, il est possible de faire le calcul par voie analytique et l'on obtient le résultat suivant :

$$y = \frac{w_0}{2K} \frac{x}{l} \left((l-x_1)^2 - (l-x_2)^2 \right) \quad \text{pour } 0 < x < x_1$$

$$y = \frac{w_0}{2K} \left[\frac{x}{l} \left((l-x_1)^2 - (l-x_2)^2 \right) - (x-x_1)^2 \right]$$

pour $x_1 < x < x_2$

$$y = \frac{w_0}{2K} \left[\frac{x}{l} \left((l-x_1)^2 - (l-x_2)^2 \right) - (x-x_1)^2 + (x-x_2)^2 \right]$$

pour $x_2 < x < l$.

En admettant, par exemple : $l = 10$

$$x_1 = 4$$

$$x_2 = 7,$$

nous obtenons la flexion représentée par la courbe 2 de la figure 14 caractérisée par les équations suivantes :

$$y = \frac{\omega_0}{2K} \frac{x}{10} (36-9) = \frac{\omega_0}{2K} 2,7 x \quad \text{pour } 0 < x < 4$$

$$y = \frac{\omega_0}{2K} (2,7 x - (x-4)^2) = \frac{\omega_0}{2K} (-x^2 + 10,7 x - 16)$$

pour $4 < x < 7$

$$y = \frac{\omega_0}{2K} (-x^2 + 10,7 x - 16 + x^2 - 14 x + 49) = \frac{\omega_0}{2K} (-3,3 x + 33) \quad \text{pour } 7 < x < 10.$$

La suite qui correspond à cette fonction est la suivante :

$$S(y) = \frac{\omega_0}{2K} [1,35; 2,70; 4,05; 5,40; 6,25; 6,10; 4,95; 3,30; 1,65].$$

Nous appliquons la méthode de calcul à l'aide de suites. Soit $S(\omega)$ la suite qui caractérise la charge :

$$S(\omega) = \omega_0 [0; 0; 0; 1; 1; 1; 1; 0; 0; 0].$$

Nous déterminons la suite qui caractérise l'intégrale double de $\omega(x)$:

$$S\left(\int_0^x \int_0^x \omega(x) dx\right) = \omega_0 [0; 0; 0; 0,5; 2; 4,5; 7,5; 10,5; 13,5]$$

$$\text{donc } C_1 = -\frac{\omega_0}{1K} \int_0^l \int_0^l \omega(x) dx = -\frac{\omega_0}{K} \frac{13,5}{10} = -1,35 \frac{\omega_0}{K}.$$

Nous obtenons ainsi :

$$S(y) = \frac{\omega_0}{K} [1,35 [1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10] - [0; 0; 0; 0,5; 2; 4,5; 7,5; 10,5; 13,5]] = \frac{\omega_0}{K} [1,35; 2,70; 4,05; 5,40; 6,25; 6,10; 4,95; 3,30; 1,65].$$

Ce sont les mêmes valeurs que celles obtenues par voie analytique.

Cet exemple présente un côté pratique, car il indique comment résoudre le problème d'une ligne électrique aérienne avec charge inégalement répartie. Il permet de contrôler la position des conducteurs pour une portée partiellement déchargée de givre, contrôle qui, sinon, doit se faire par voie graphique ou empirique. D'autres problèmes tels que celui de la flexion d'une poutre encastrée avec une répartition quelconque de la charge peuvent être traités selon le même principe.

IV. Equations différentielles avec décalage

Il arrive parfois, en particulier dans l'étude de phénomènes de propagation et de réglage, que l'on ait à résoudre des équations différentielles dont la variable est caractérisée par un décalage.

De telles équations conduisent à des calculs très compliqués si l'on se propose de les résoudre

à l'aide des méthodes de calculs classiques ; elles se laissent par contre aisément résoudre au moyen du calcul à l'aide de suites. Soit par exemple une équation différentielle du 1^{er} degré :

$$a \frac{dx(t)}{dt} + b x(t - T) = F(t).$$

Nous intégrons cette équation et obtenons en tenant compte des conditions aux limites :

$$a(x - x_0) + b \int_x^t x(t - T) dt = \int_0^t F(t) dt.$$

Nous traduisons cette équation sous la forme d'une équation de suites :

$$a S(x) + b \tau \left([S(x) * [0,5; 1; 1; \dots; 1; \dots]] + \frac{x_0}{2} [1; 1; \dots; 1; \dots] \right) * D(+\theta) = S(F) * \tau [0,5; 1; 1; \dots; 1; \dots] + \tau \left(\frac{f_0}{2} + ax_0 \right) [1; 1; \dots; 1; \dots],$$

avec : $\theta < \frac{T}{\tau} < \theta + 1,$

θ est la valeur du décalage mesurée au moyen de l'unité τ ; lorsque cette unité est suffisamment petite, on peut admettre que

$$\theta \sim \frac{T}{\tau}.$$

Nous résolvons cette équation par rapport à $S(x)$:

$$S(x) = \frac{S(F) * \tau [0,5; 1; 1; \dots; 1; \dots] + \left[\frac{\tau}{2} f_0 + ax_0 \right] - \left[\frac{\tau}{2} bx_0 \right] * D(+\theta)}{[a; 0; 0; \dots; 0; 0,5 b\tau; b\tau; b\tau; \dots; b\tau; \dots]}$$

Le nombre de zéros qui caractérise la suite du dénominateur est égal à $\theta - 1$.

Exemple

Nous admettons que la fonction $F(t)$ est caractérisée par un échelon rectangulaire et admettons les valeurs numériques suivantes :

$$a = 8 \text{ sec} ; b = 1 ; T = 4 \text{ sec}, \\ x_0 = f_0 = 0.$$

En choisissant l'unité égale à 1 seconde, nous obtenons comme équation :

$$8 S(x) + S(x) * [0,5; 1; 1; \dots; 1; \dots] = [1; 1; \dots; 1; \dots] * [0,5; 1; 1; \dots; 1; \dots] \\ S(x) = \frac{[1; 1; \dots; 1; \dots] * [0,5; 1; 1; \dots; 1; \dots]}{[8; 0; 0; 0; 0,5; 1; 1; \dots; 1; \dots]}$$

Le résultat de ce quotient composé est représenté par la courbe 3 de la figure 11. On voit que cette courbe 3 est située au-dessus de la courbe 2 obtenue au paragraphe précédent avec $T = 0$; par suite du décalage qu'il faut prendre en considération, la variation de x dépasse tout d'abord sa nouvelle valeur d'équilibre. Si ce décalage est important, le phénomène prend une allure oscillatoire.

(A suivre).