

**Zeitschrift:** Bulletin technique de la Suisse romande  
**Band:** 81 (1955)  
**Heft:** 21-22: École polytechnique fédérale Zurich: centenaire 1855-1955, fasc. no 2

**Artikel:** Application du calcul à l'aide de suites à la théorie des réglages automatiques  
**Autor:** Cuénod, Michel  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-61382>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 15.03.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

probabilité pour que l'erreur soit inférieure à 0,02 en valeur absolue est de 0,997. Deux causes d'erreur systématique sont encore à considérer : d'une part l'erreur sur  $\Delta p_{d1}$ , qui peut atteindre  $\pm 0,01$  ; d'autre part l'erreur due à l'échange de chaleur entre le thermomètre et les parois :  $\pm 0,01$ . Nous indiquons donc la valeur suivante pour le coefficient d'échauffement  $r$  :

$$r = 0,60 \begin{matrix} + 0,04 \\ - 0,03 \end{matrix}$$

Au cours des essais, le nombre de Mach a varié de 0,12 à 0,30 ; le nombre de Reynolds (rapporté au diamètre de la douille de protection), de  $4 \cdot 10^4$  à  $1 \cdot 10^5$ . Dans ce domaine de nombres de Reynolds, la couche limite autour du cylindre constitué par la douille de protection est encore en régime laminaire. En conséquence, nous envisageons de compléter les essais décrits ci-dessus par des essais effectués à des nombres de Reynolds plus élevés, ou avec un degré de turbulence plus grand, obtenu en plaçant un tamis à l'entrée du tuyau.

#### Liste des publications citées

- (1) P. J. KING : *Measurement of High Temperatures in High-Velocity Gas Streams*. Trans. of the A.S.M.E., vol. 65 (1943), p. 421.
- (2) GERHARD R. EBER : *Shielded Thermocouples. Physical Measurements in Gas Dynamics and Combustion*. Princeton University Press, Princeton, N. J. 1954, p. 186.
- (3) H. F. MULLIKIN : *Gas-temperature Measurement and the High-Velocity Thermocouple. Temperature. Its Measurement and Control in Science and Industry*. Reinhold Publishing Corp. New York, 1941.
- (4) *Physical Measurements in Gas Dynamics and Combustion*, Princeton, 1954.
- (5) E. POHLHAUSEN : *Der Wärmeaustausch zwischen festen Körpern und Flüssigkeiten mit kleiner Reibung und kleiner Wärmeleitung*. Zeitschrift für angew. Math. und Mech., vol. 1 (1921), p. 115.
- (6) E. ECKERT : *Temperaturmessung in schnell strömenden Gasen*. Zeitschrift V.D.I., vol. 84 (1940), p. 813.
- (7) A. BUSEMANN : *Gasströmung mit laminarer Grenzschicht entlang einer Platte*. Zeitschrift für angew. Math. und Mech., vol. 15 (1935), p. 23.
- (8) G. ACKERMANN : *Plattenthermometer in Strömung mit grosser Geschwindigkeit und turbulenter Grenzschicht*. Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, vol. 13 (1942), p. 226.
- (9) F. FRANKL : *Theory of the laminary boundary layer in compressible gases*. Trans. of the Central Aero-Hydrodynamical Institute, Moscow, 1934.
- (10) H. W. EMMONS et J. G. BRAINERD : *Temperature Effects in a Laminar Compressible-Fluid Boundary Layer Along a Flat Plate*. Journal of Applied Mechanics, vol. 18 (1941), p. A-105.
- (11) A. STODOLA : *Beitrag zur Strömung von Gasen und Dämpfen durch Rohre mit veränderlichem Querschnitt*. Zeitschrift V.D.I., vol. 47 (1903), p. 1787.
- (12) C. BATHO : *The Temperature Gradient in De Laval Steam Nozzles*. Proceedings of the Institution of Civil Engineers, vol. 174 (1908), p. 317.
- (13) W. NUSSELT : *Die Umsetzung der Energie in der Laval-düse*. Zeitschrift f.d.ges. Turbinenwesen, vol. 13 (1916), p. 137.
- (14) FRIEDRICH MÜLLER : *Über die Ermittlung des Temperaturverlaufes von schnellströmenden Gasen und Dämpfen bei Expansion in einer Laval-Düse*. Zeitschrift f.d.ges. Turbinenwesen, vol. 17 (1920), p. 61.
- (15) E. ECKERT et W. WEISE : *Die Temperatur unbeheizter Körper in einem Gasstrom hoher Geschwindigkeit*. Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, vol. 12 (1941), p. 40.
- (16) H. C. HOTTEL et A. KALITINSKY : *Temperature Measurement in High-Velocity Air Streams*. Journal of Applied Mechanics, vol. 22 (1945), p. A-25.
- (17) WERNER HARTMANN : *Ausfluss- und Kraftmessungen an der Beschauflung einer einstufigen Versuchsturbine im Luftversuchsstand*. V.D.I.-Forschungsheft 397 (1939), p. 5.
- (18) W. WIMMER : *Die Messung der Stautemperatur*. Ingenieur-Archiv, vol. 11 (1940), p. 1.
- (19) A. FRANZ : *Messtechnische Fragen bei Laderuntersuchungen*. Jahrbuch 1938 der Deutschen Luftfahrtforschung, p. II 215.

## APPLICATION DU CALCUL A L'AIDE DE SUITES A LA THÉORIE DES RÉGLAGES AUTOMATIQUES

par MICHEL CUÉNOD, ingénieur à la Société Générale pour l'Industrie, Genève

La théorie des réglages automatiques consiste essentiellement à étudier les deux problèmes suivants :

1. Détermination des conditions de stabilité d'un réglage automatique.
2. Détermination des variations de la grandeur à régler, à la suite d'une perturbation affectant le dispositif de réglage.

Nous allons montrer quelques avantages pratiques offerts par le calcul à l'aide de suites pour la résolution de ce genre de problèmes (1)<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Les chiffres entre parenthèses se réfèrent à la bibliographie donnée en fin d'article.

### I. Définitions

#### 1. Description du réglage d'un groupe hydro-électrique

A titre d'illustration, nous considérons le cas du réglage de vitesse d'un groupe hydro-électrique représenté schématiquement par la figure 1.

La turbine  $T$  entraîne le générateur  $G$  ainsi que le générateur pilote  $GP$ . L'ouverture de la turbine est commandée par le servo-moteur  $SM$ . Lorsque le commutateur  $C$  est dans sa position 2, le moteur  $M$  est alimenté par le générateur auxiliaire  $GA$  dont la vitesse peut être variée à volonté, indépendamment de celle du générateur  $G$ .

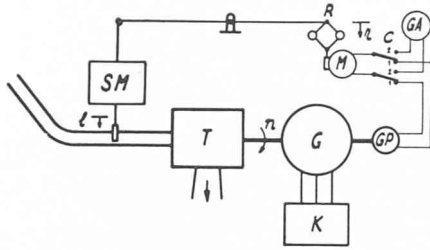


FIG. 1. — Dispositif du réglage de vitesse d'un groupe hydro-électrique.

Ainsi que le représente schématiquement la figure 2, ce réglage peut être représenté comme étant constitué par un circuit formé par 3 éléments :

	Grandeur d'entrée	Grandeur de sortie
groupe G	couple moteur $m$	vitesse angulaire $n$
dispositif de réglage R	vitesse angulaire $n$	ouverture de la turbine $l$
dispositif hydraulique H	ouverture de la turbine $l$	couple moteur $m$

Le groupe est soumis aux variations  $k$  de la charge qui constituent le « terme perturbateur » provoquant les réactions du dispositif de réglage. Les variations relatives  $n, l, m$  ne sont pas simultanées mais sont liées entre elles par une certaine relation fonctionnelle. Nous allons passer en revue les différentes façons de caractériser cette relation.

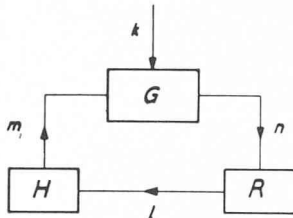


FIG. 2. — Représentation schématique du circuit de réglage d'un groupe hydro-électrique.

- G Groupe (turbine + alternateur).
- R Dispositif de réglage.
- H Dispositif hydraulique.
- $n$  Variation relative de la vitesse.
- $l$  Variation relative de l'ouverture de la turbine.
- $m$  Variation relative du couple moteur.
- $k$  Variation relative de la charge électrique.

Dans ce but, nous admettons que le circuit de réglage est ouvert et nous prenons en considération le dispositif de réglage avec, comme « grandeur d'entrée », la variation arbitraire relative de la vitesse angulaire  $n^*$ , et comme « grandeur de sortie », la variation relative  $l$  de l'ouverture de la turbine.

**2. Equation différentielle du réglage**

La méthode classique consiste à déterminer le système d'équations différentielles auxquelles obéissent ces deux grandeurs. Cette méthode a l'inconvénient d'être laborieuse et de conduire à des calculs inextricables, tant pour la détermination des conditions de stabilité que pour l'étude de la

variation de la grandeur à régler, dès que le circuit de réglage est un peu compliqué et dès que l'on ne se contente pas d'une approximation très grossière des caractéristiques dynamiques des organes de réglage.

**3. Courbe de Nyquist**

Une deuxième façon d'établir cette relation est de relever expérimentalement la « courbe de Nyquist » du dispositif de réglage que l'on obtient de la façon suivante : on fait osciller la grandeur d'entrée  $n$  autour d'une valeur moyenne avec une pulsation  $\omega_1$  ; la grandeur de sortie  $l$  oscille également autour d'une valeur moyenne. On mesure l'amplitude de l'oscillation de  $n$ , et on représente le résultat de cette mesure par un vecteur  $J(\omega_1)$ , dont la grandeur absolue  $|J_1|$  est égale à l'amplitude de l'oscillation de  $l$  divisée par l'amplitude de l'oscillation de  $n$ , et l'argument  $\psi_1$ , égal au déphasage entre ces deux oscillations, ainsi que le représente la figure 3.

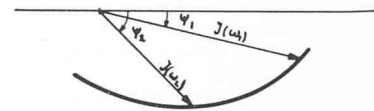


FIG. 3. — Définition de la courbe de Nyquist.

Si l'on effectue la même mesure pour une autre pulsation  $\omega_2$  on obtiendra de façon générale un autre vecteur  $J_2$ . Si l'on répète cet essai pour une série de pulsations différentes  $\omega_3, \omega_4, \dots; \omega_n; \dots$  on obtient une famille de vecteurs  $J(\omega_3), J(\omega_4) \dots, J(\omega_n) \dots$ . En reliant l'extrémité de ces différents vecteurs, on obtient la *courbe de Nyquist* du dispositif, appelée également *courbe de comportement à fréquence variable*.

**4. Courbe de réponse**

Une troisième façon de déterminer les caractéristiques dynamiques du dispositif de réglage est de faire varier la grandeur d'entrée  $n$ , de mesurer cette variation et de mesurer simultanément la variation de la grandeur de sortie  $l$  ainsi que le représente la figure 4a.

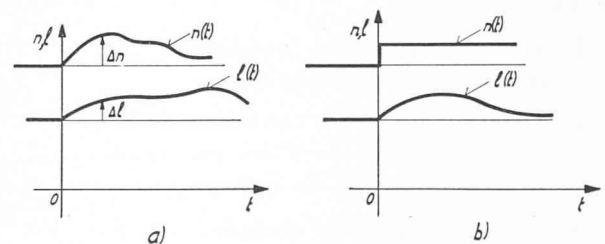


FIG. 4. — Définition de la courbe de réponse du dispositif de réglage.

- $n(t)$  = variation de la vitesse angulaire du groupe.
- $l(t)$  = variation de la course du servo-moteur.

Dans le cas particulier où  $n$  fait un saut brusque et reste ensuite constant, c'est-à-dire varie selon un échelon rectangulaire ainsi que le représente la figure 4b, la variation relative de  $l$  qui en résulte est définie comme étant la *courbe de réponse* du dispositif de réglage  $\Phi_{nl}(t)$

$$\Phi_{nl}(t) = \frac{l(t)}{n}$$

autrement dit, c'est la variation relative de  $l$  résultant d'une variation de  $n$  selon un échelon rectangulaire unitaire.

Lorsque la variation de la grandeur d'entrée est quelconque, la courbe de réponse peut se calculer en résolvant l'équation intégrale de Volterra et en intégrant la solution (2).

Soit  $l(t)$  la variation relative mesurée de la course du servo-moteur résultant d'une variation quelconque  $n(t)$  de la vitesse angulaire. La résolution de l'équation intégrale suivante permet de calculer la fonction  $G_{nl}(t)$ :

$$l(t) = \int_0^t n(\tau) G_{nl}(t - \tau) d\tau.$$

Ainsi que nous l'avons vu, (1) cette fonction  $G_{nl}(t)$  est la variation de  $l$  que l'on obtiendrait si  $n$  variait selon une impulsion unité. Comme l'échelon rectangulaire unitaire est l'intégrale de l'impulsion unité, il faut intégrer  $G_{nl}(t)$  pour obtenir la courbe de réponse.

$$\Phi_{nl} = \int_0^t G_{nl}(t) dt.$$

Il est pratiquement très difficile, sinon impossible d'effectuer directement ces opérations par voie analytique. Nous avons vu que si on connaît les transformations de Laplace, la résolution de l'équation intégrale de Volterra revient à faire le quotient de ces transformations. Il suffit de diviser ce quotient par l'opérateur  $p$  pour obtenir l'expression opérationnelle de la courbe de réponse.

$$\frac{1}{p} \Phi_{nl} = \frac{1}{p} \frac{l(p)}{n(p)} = \int_0^\infty \Phi_{nl}(t) e^{-pt} dt.$$

Nous définissons le quotient  $\frac{l(p)}{n(p)}$  comme étant la *fonction de transfert*  $\varphi_{nl}$  du dispositif de réglage.

Malheureusement, si  $n(t)$  et  $l(t)$  ont des allures compliquées, il n'est pas facile de leur appliquer la transformation de Laplace; d'autre part, la transformation inverse peut également conduire à des calculs compliqués. Ces difficultés s'aplanissent si l'on fait usage du calcul avec les suites. Ainsi que nous l'avons exposé précédemment, la résolution de l'équation intégrale de Volterra est équivalente au quotient composé des suites correspondant aux deux fonctions connues (1). La suite  $S(\Phi_{nl}(t))$  correspondant à la courbe de réponse s'obtient donc en faisant le produit composé de ce quotient composé par la suite unitaire.

$$S(\Phi_{nl}(t)) = \frac{S(l) * [1; 1; \dots; 1; \dots]}{S(n)} = \frac{S(l)}{S(n) * [1; -1]} \tag{1}$$

$S(n)$  étant la suite correspondant à  $n(t)$

$S(l)$  étant la suite correspondant à  $l(t)$ .

La suite de la dérivée de la courbe de réponse est la suite de la réponse à l'impulsion unitaire  $G_{nl}(t)$ :

$$S(\Phi'_{nl}) = S(G_{nl}) = \frac{S(l)}{S(n)}.$$

Il est connu que, si différents organes de réglage sont branchés en série, la fonction de transfert est donnée par le produit des fonctions de transfert de chacune d'elle.

Considérons par exemple que le circuit de réglage d'un groupe hydro-électrique est ouvert, c'est-à-dire que le commutateur  $C$  de la figure 1 est sur sa position 2. La variation de la vitesse  $n$  du groupe résultant d'une variation quelconque de la vitesse  $n^*$  du groupe auxiliaire  $GA$  est la suivante sous forme opérationnelle:

$$n = n^* \varphi_{nl} \varphi_{lm} \varphi_{mn}$$

d'où il résulte que la fonction de transfert  $\varphi_{nn}$  du circuit de réglage ouvert est la suivante:

$$\varphi_{nn} = \frac{n}{n^*} = \varphi_{nl} \varphi_{lm} \varphi_{mn}.$$

Il est connu que le produit de deux fonctions opérationnelles correspond à l'intégrale de Duhamel à laquelle correspond également le produit des deux suites qui s'y rapportent.

Calculée à l'aide de suites, la variation de  $n$  résultant d'une variation de  $n^*$  s'obtient de la façon suivante:

$$S(n) = S(n^*) * S(\Phi'_{nl}) * S(\Phi'_{lm}) * S(\Phi'_{mn}).$$

$S(\Phi'_{nl})$ ,  $S(\Phi'_{lm})$  et  $S(\Phi'_{mn})$  sont les suites qui correspondent aux dérivées des courbes de réponse  $\Phi_{nl}(t)$ ,  $\Phi_{lm}(t)$  et  $\Phi_{mn}(t)$  autrement dit ce sont les suites qui correspondent à la réponse du dispositif de réglage et du groupe à une impulsion unité.

La suite de la *courbe de réponse du circuit du réglage ouvert* est la suivante:

$$S(\Phi_{nn}) = [1; 1; \dots; 1; \dots] * S(\Phi'_{nl}) * S(\Phi'_{lm}) * S(\Phi'_{mn}) \\ = S(\Phi_{nl}) * S(\Phi'_{lm}) * S(\Phi'_{mn}). \tag{2}$$

Ce résultat illustre de façon particulièrement frappante l'analogie que l'on peut relever entre le calcul à l'aide de suites et le calcul opérationnel.

**5. Détermination de la courbe de Nyquist qui correspond à une courbe de réponse donnée**

L'avantage de la courbe de réponse est qu'elle donne une image très concrète des caractéristiques dynamiques de l'organe de réglage considéré et qu'elle est relativement facile à déterminer expé-

rimentalement. Son inconvénient est qu'elle ne donne aucune indication immédiate sur la stabilité du réglage. Il est donc nécessaire de pouvoir déterminer à partir d'une courbe de réponse donnée, la courbe de Nyquist correspondante. Il est connu que cette courbe de Nyquist se détermine à l'aide de l'intégrale de Fourier (3) :

$$J(\omega) = j\omega \int_0^{\infty} \Phi(t) e^{-j\omega t} dt$$

ou exprimée un peu différemment :

$$J(\omega) = \omega \int_0^{\infty} \Phi(t) \sin \omega t dt + j\omega \int_0^{\infty} \Phi(t) \cos \omega t dt.$$

Si l'on remplace  $j\omega$  par  $p$  et que l'on divise cette expression par  $p$  on retrouve l'expression de la transformation de Laplace. Le résultat de cette intégrale se trouve contenu dans les tables de transformation du calcul opérationnel. Si l'on a relevé expérimentalement une courbe de réponse, on peut toujours trouver une approximation de son expression mathématique en la considérant comme étant une somme de fonctions du temps potentielles ou exponentielles :

$$\Phi(t) = \sum_{m, \dots, q} (a_m e^{\alpha_m t} + b_n t^n + c_q t^q e^{p_t})$$

$a_m$  étant réel ou complexe.

En déterminant la forme opérateur de cette expression, en y remplaçant  $p$  par  $j\omega$  et en la multipliant par  $j\omega$  on obtient ainsi directement l'expression de la courbe de Nyquist.

Pratiquement, cette méthode peut conduire à des calculs assez laborieux, dès que l'allure de la courbe de réponse ne se laisse pas traduire par une expression mathématique simple.

Une autre méthode pour passer de la courbe de réponse à la courbe de Nyquist est de faire usage d'un *analyseur harmonique* (4). Cet appareil permet de réaliser graphiquement l'intégration des coefficients de Fourier  $a_n$  et  $b_n$  tels que :

$$a_n = \frac{1}{T} \int_0^t F(t) \cos \left( 2\pi n \frac{t}{T} \right) dt$$

$$b_n = \frac{1}{T} \int_0^t F(t) \sin \left( 2\pi n \frac{t}{T} \right) dt.$$

En identifiant  $\frac{2\pi n}{T}$  à  $\omega$ , on voit immédiatement que cet appareil permet d'effectuer l'intégration voulue.

Une remarque s'impose. Cette intégration doit se faire sur un intervalle fini  $T$ , celui pendant lequel dure le phénomène transitoire. Si la courbe de réponse ne tend pas vers zéro en régime permanent, il faut lui soustraire une fonction simple telle que cet écart s'annule.

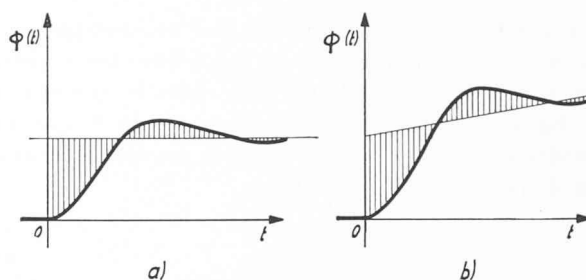


FIG. 5. — Détermination de la courbe de Nyquist correspondant à une courbe de réponse donnée.

Si par exemple, l'organe considéré a un caractère statique, ainsi que le représente la figure 5a, la grandeur de sortie tend vers une constante. La surface qu'il faut intégrer est la différence entre la courbe de réponse et cette constante, telle que, par exemple, la surface hachurée de la figure 5a.

Si, par contre, l'organe considéré a un caractère astatique, la grandeur de sortie tend en régime permanent vers une variation linéaire, éventuellement superposée à une constante. C'est, dans ce cas, cette fonction linéaire qu'il faut soustraire, ainsi que le représente la figure 6b.

Une troisième méthode pour passer de la courbe de réponse à la courbe de Nyquist est de réaliser l'intégration que cette transformation comporte à l'aide de suites ; soit :

$$S(\Phi) = [\Phi(\tau) ; \Phi(2\tau) ; \Phi(3\tau) ; \dots ; \Phi(n\tau) ; \dots]$$

la suite qui correspond à la courbe de réponse et :

$$S(\cos(\omega_1 t)) = [\cos(\omega_1 \tau) ; \cos(\omega_1 2\tau) ; \cos(\omega_1 3\tau) ; \dots ; \cos(\omega_1 n\tau) ; \dots]$$

$$\text{et : } S(\sin(\omega_1 t)) = [\sin(\omega_1 \tau) ; \sin(\omega_1 2\tau) ; \sin(\omega_1 3\tau) ; \dots ; \sin(\omega_1 n\tau) ; \dots]$$

les suites qui correspondent à  $\cos(\omega_1 t)$  et à  $\sin(\omega_1 t)$ .

Les intégrales

$$\int_0^{\infty} \Phi(t) \sin(\omega_1 t) dt \quad \text{et} \quad \int_0^{\infty} \Phi(t) \cos(\omega_1 t) dt$$

peuvent être ramenées à deux sommes :

$$\text{Re } J(\omega_1) = \omega_1 \tau \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(n\tau) \sin(\omega_1 n\tau)$$

$$\text{Im } J(\omega_1) = \omega_1 \tau \sum_{n=1}^{\infty} \Phi(n\tau) \cos(\omega_1 n\tau).$$
(3)

Cette méthode correspond à la détermination des coefficients de Fourier par la méthode classique de Runge. Les sommes ainsi définies peuvent être aisément calculées à l'aide de machines à calculer. Ainsi, à partir de deux variations simultanées quelconques de la grandeur d'entrée et de la grandeur de sortie d'un dispositif de réglage, obtenues par un essai unique, facile à réaliser, il est possible, à l'aide des suites, sans aucun artifice mathématique, de déterminer les courbes de réponse et les courbes de Nyquist du dispositif et d'analyser ainsi toutes ses caractéristiques dynamiques.

## II. Détermination des conditions de stabilité

Les critères permettant de déterminer les conditions de stabilité d'un réglage automatique ont déjà fait l'objet de nombreuses publications (en particulier 5 à 14), aussi nous contenterons-nous d'en rappeler brièvement leur principe.

Lorsque l'équation différentielle de réglage est connue, le *critère de Hurwitz* donne les conditions que les coefficients de cette équation doivent remplir pour que la partie réelle des racines de l'équation caractéristique soit négative, c'est-à-dire pour que le réglage soit stable (5). Ces conditions peuvent être également contrôlées graphiquement à l'aide du *critère de Leonhard* (6).

Lorsque la courbe de Nyquist de chaque élément du dispositif de réglage est connue, on obtient la courbe de Nyquist du circuit de réglage  $J_R$  ouvert en faisant le produit de ces différentes courbes de Nyquist (c'est-à-dire en additionnant leur phase et en faisant le produit de leur grandeur absolue pour chaque pulsation) (7)

$$J_R = - J_{nl} \cdot J_{lm} \cdot J_{mn}.$$

Le signe négatif provient du fait que le réglage agit en sens inverse de l'écart initial de la grandeur à régler. La courbe symétrique par rapport à l'axe réel correspond à la courbe de Nyquist pour des valeurs de  $\omega$  négatives.

Le critère de Nyquist énonce que le réglage est stable si, lorsqu'on parcourt la courbe de Nyquist

$J_R$  de  $\omega = +\infty$  à  $\omega = -\infty$  on entoure le point  $(+1, j0)$  dans le sens des aiguilles d'une montre autant de fois que le système ouvert a de racines instables (8).

Les critères de Hurwitz, de Leonhard et de Nyquist ont reçu déjà de nombreuses applications et ont chacun leurs avantages et leurs inconvénients. L'aide que peuvent apporter les suites pour la détermination des courbes de Nyquist peut faciliter encore l'application du critère de Nyquist. Nous voulons rappeler une troisième méthode qui peut rendre de grands services à l'ingénieur praticien face à un réglage automatique dont il doit mettre au point la stabilité.

Nous supposons que l'on ait pu déterminer, soit expérimentalement, soit par le calcul, la courbe de réponse du réglage ouvert  $\Phi_{mn}$ . En première approximation, cette courbe de réponse peut être assimilée à une des courbes indiquées dans l'ouvrage, donné par la référence 9, et représentée par les figures 6, 7, 8, 9 et 10. Sur ces figures sont représentées également les conditions que les coefficients, qui caractérisent ces courbes de réponse, doivent remplir pour que le réglage soit stable. Ces relations sont établies de la façon suivante : soit  $\varphi_{mn}$  l'expression écrite sous forme opérationnelle de la courbe de réponse du réglage ouvert. En posant  $\varphi_{mn} = 1$  on obtient l'équation caractéristique dont on détermine les racines en posant comme condition que leur partie réelle soit négative.

Ainsi, lorsque l'on se propose d'ausculter la stabilité d'un réglage automatique, il suffit d'ouvrir

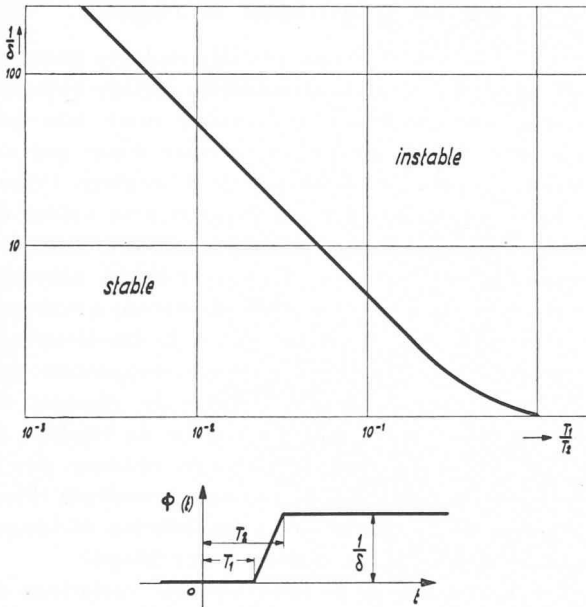


FIG. 6. — Condition de stabilité d'un réglage statique avec retard.

$$\Phi(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } 0 < t < T_1 \\ \frac{1}{\delta} \frac{t - T_1}{T_2 - T_1} & \text{pour } T_1 < t < T_2 \\ \frac{1}{\delta} & \text{pour } t > T_2 \end{cases}$$

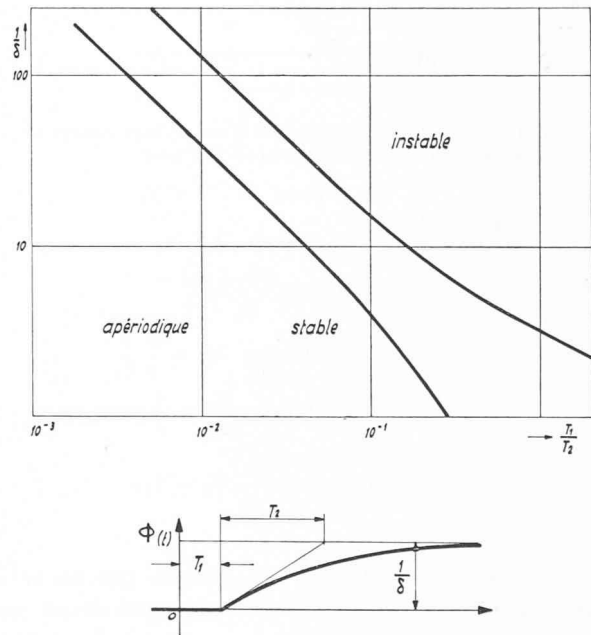


FIG. 7. — Condition de stabilité d'un réglage statique avec retard et une courbe exponentielle.

$$\Phi(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < T_1 \\ \frac{1}{\delta} \left( 1 - e^{-\frac{1}{T_2}(t-T_1)} \right) & \text{pour } t > T_2 \end{cases}$$

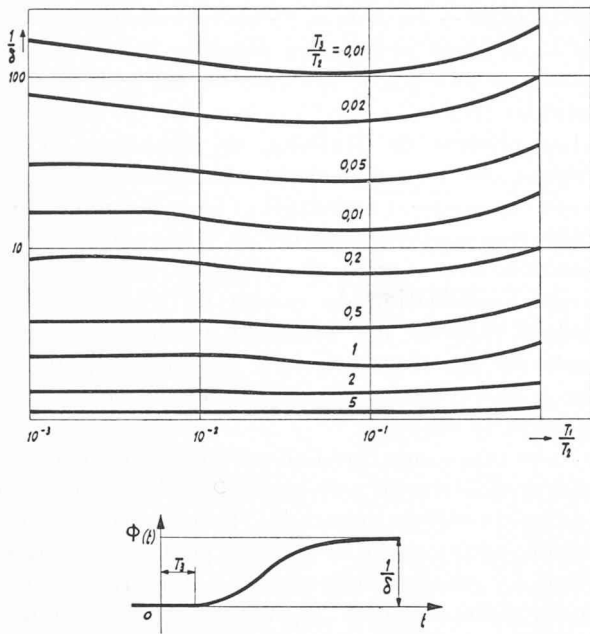


FIG. 8. — Condition de stabilité d'un réglage statique avec retard et deux courbes exponentielles.

$$\Phi(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < T_3 \\ \frac{1}{\delta} \left[ 1 + \frac{1}{T_1 - T_2} \left( T_2 e^{-\frac{t-T_3}{T_2}} - T_1 e^{-\frac{t-T_3}{T_1}} \right) \right] & \text{pour } t > T_3 \end{cases}$$

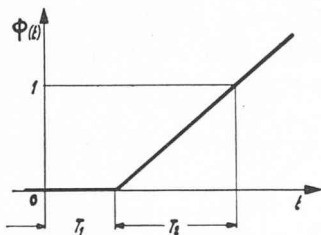


FIG. 9. — Condition de stabilité d'un réglage astatique avec retard et caractéristique linéaire.

$$\Phi(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } 0 < t < T_1 \\ \frac{t - T_1}{T_2} & \text{pour } t > T_1 \end{cases}$$

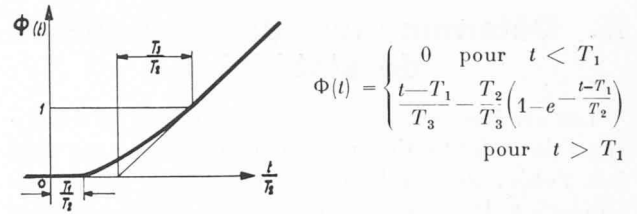
Condition de stabilité  $\frac{T_1}{T_2} = \frac{\pi}{2}$

Pulsation de l'oscillation  $\omega_0 = \frac{\pi}{2} \frac{1}{T_1}$

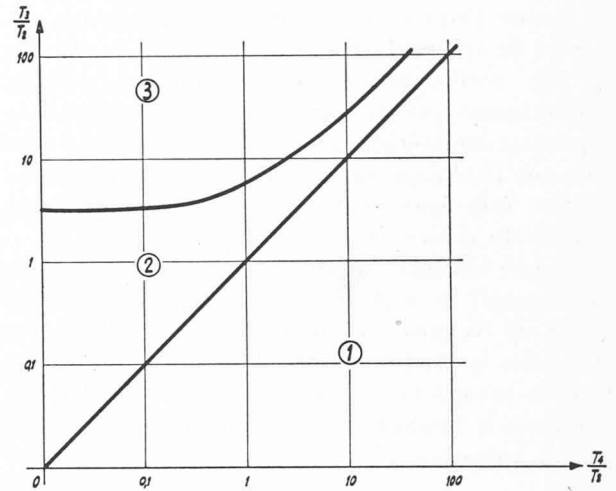
Cas limite apériodique  $\frac{T_1}{T_2} = \frac{1}{e}$

Constante de temps du cas limite apériodique  $T_0 = T_1$ .

son circuit de réglage, de déterminer, par un essai facile à réaliser, les variations des grandeurs qui caractérisent les extrémités de ce circuit de réglage ouvert, puis à l'aide de suites, de déterminer la courbe de réponse du réglage ouvert, d'assimiler cette courbe de réponse à une des courbes représentées par les figures 6 à 10 dont on peut déduire immédiatement les conditions de stabilité sans calcul ni procédé graphique (9).



$$\Phi(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < T_1 \\ \frac{t - T_1}{T_3} - \frac{T_2}{T_3} \left( 1 - e^{-\frac{t - T_1}{T_2}} \right) & \text{pour } t > T_1 \end{cases}$$



- ① instable
- ② stable périodique
- ③ stable apériodique

FIG. 10. — Condition de stabilité d'un réglage astatique avec retard et une courbe exponentielle, et une caractéristique linéaire.

### III. Détermination des variations de la grandeur à régler

A mesure que la technique des réglages automatiques se développe, la stabilité du réglage apparaît comme une condition nécessaire, mais non pas suffisante. On exige que, à la suite d'une perturbation agissant sur le dispositif de réglage, l'écart de la grandeur à régler par rapport à sa valeur de consigne soit réduite à un minimum, tant en amplitude qu'en durée. Cette condition nécessite de pouvoir calculer cet écart. Considérons à nouveau le réglage de vitesse d'un groupe hydro-électrique représenté par la figure 1. Nous supposons que l'on a pu déterminer la courbe de réponse du réglage ouvert, ainsi que la courbe de réponse de la vitesse par rapport à la charge, obtenue par la mesure de la variation de la vitesse résultant d'une variation de la charge selon un échelon rectangulaire, le dispositif de réglage étant bloqué.

Les variations de  $n$  résultant des variations de  $n^*$  et de  $k$  peuvent se superposer. En appliquant l'intégrale de Duhamel, nous voyons que pour des variations quelconques, la variation de la vitesse est donnée par la somme des deux intégrales suivantes (2, 3) :

$$n(t) = \int_0^t \frac{d}{dt} \Phi_{kn}(t-\tau) k(\tau) d\tau + \int_0^t \frac{d}{dt} \Phi_{nn}(t-\tau) n^*(\tau) d\tau.$$

Nous écrivons cette même expression sous une forme un peu différente :

$$n(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t \Phi_{kn}(t-\tau)k(\tau)d\tau + \frac{d}{dt} \int_0^t \Phi_{nn}(t-\tau)n^*(\tau)d\tau.$$

Lorsque le circuit de réglage est fermé, la vitesse  $n^*$  est égale à la vitesse du groupe  $n$ . La variation de vitesse  $n$  résultant d'une variation  $k(t)$  de la charge se calcule analytiquement en résolvant l'équation intégrale suivante :

$$n(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t \Phi_{kn}(t-\tau)k(\tau) d\tau + \frac{d}{dt} \int_0^t \Phi_{nn}(t-\tau)n(\tau)d\tau.$$

La résolution directe de cette équation offre certaines difficultés. Elle est facilitée en faisant usage du calcul à l'aide de suites. Nous avons vu que l'équivalent de l'intégrale de Duhamel était le produit composé (1). Nous obtenons ainsi :

$$S(n) = [1; -1] * S(\Phi_{kn}) * S(k) + [1; -1] * S(\Phi_{nn}) * S(n).$$

Nous résolvons cette équation par rapport à  $S(n)$ . Il en résulte :

$$S(n) = \frac{S(k) * S(\Phi_{kn}) * [1; -1]}{[1] - [1; -1] * S(\Phi_{nn})}. \quad (4)$$

En effectuant les produits et quotients composés que cette expression comporte, on obtient ainsi la

suite qui caractérise la variation de la grandeur à régler à la suite d'une perturbation. Nous insistons sur le fait que  $S(k)$ ,  $S(\Phi_{kn})$  et  $S(\Phi_{nn})$  peuvent être des suites absolument quelconques, obtenues par exemple par voie expérimentale.

L'analogie entre le calcul à l'aide de suites et le calcul opérationnel apparaît comme particulièrement évidente. En posant :

$n(p)$	fonction opérationnelle de	$n(t)$
$k(p)$	»	» $k(t)$
$\Phi_{kn}(p)$	»	» $\Phi_{kn}(t)$
$\Phi_{nn}(p)$	»	» $\Phi_{nn}(t)$ ,

l'équation intégrale de réglage devient la suivante :

$$n(p) = \Phi_{kn}(p) \cdot k(p) + \Phi_{nn}(p) \cdot n(p).$$

Nous la résolvons par rapport à  $n(p)$  et obtenons :

$$n(p) = k(p) \frac{\Phi_{kn}(p)}{1 + \Phi_{nn}(p)}.$$

En appliquant la transformation opérateur-temps à cette expression, on obtient la variation de la vitesse résultant d'une variation donnée de la charge. Cependant, si  $k(t)$ ,  $\Phi_{kn}(t)$  et  $\Phi_{nn}(t)$  ont été relevés expérimentalement et ne peuvent pas être exprimés analytiquement, la méthode de calcul à l'aide de suites est la seule qui puisse être appliquée.

(à suivre)

## LA MACHINE À COUDRE

### Son évolution au cours des temps

par L. ALAMARTINE, ingénieur E.P.F., Genève

La machine à coudre, dont la fabrication soulève des problèmes aussi ardues que les autres appareils utilisés par l'homme, n'est pour ainsi dire jamais citée dans les revues et périodiques de documentation générale ; on ne la rencontre que dans des journaux spécialisés n'atteignant pas le grand public.

Le but de la présente note est de résumer l'évolution de la machine à coudre depuis ses débuts jusqu'à nos jours.

L'origine de la couture remonte aux temps les plus reculés de l'histoire de l'humanité. Les hommes primitifs se vêtirent de peaux de bêtes qu'ils assemblèrent en perçant des trous avec des arêtes de poissons et en utilisant de la ficelle faite de boyaux ou de fibres.

Peu à peu, les temps évoluèrent (âges du bronze et du fer) et les aiguilles en métal apparurent munies d'un trou (chas) dans la partie supérieure, l'outil principal pour la couture à la main (fig. 1).

Les premières tentatives de réalisation de la couture par un moyen mécanique eurent lieu au milieu du XVIII<sup>e</sup> siècle, en cherchant d'abord à imiter la couture à la main, ce qui n'alla pas sans difficultés ; on le con-

çoit aisément en songeant à la complexité des mouvements que la main effectue.



Fig. 1. Aiguille primitive.

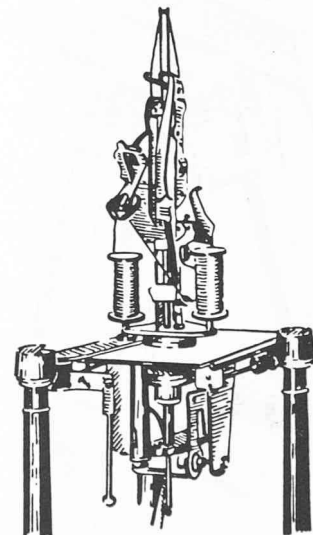


Fig. 2. — Machine Joseph Madersperger.