

Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande
Band: 82 (1956)
Heft: 24

Artikel: Contribution à l'étude des coques cylindriques d'épaisseur variable
Autor: Favre, Henry
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-62095>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 02.04.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

BULLETIN TECHNIQUE DE LA SUISSE ROMANDE

Paraissant tous les quinze jours

Organe de la Société suisse des ingénieurs et des architectes, des Sociétés vaudoise et genevoise des ingénieurs et des architectes, de l'Association des Anciens élèves de l'Ecole polytechnique de l'Université de Lausanne et des Groupes romands des anciens élèves de l'Ecole polytechnique fédérale.

Comité de patronage — Président: R. Neeser, ingénieur, à Genève; Vice-président: G. Epitoux, architecte, à Lausanne; Secrétaire: J. Calame, ingénieur, à Genève — Membres, Fribourg: MM. H. Gicot, ingénieur; M. Waeber, architecte — Vaud: MM. A. Gardel, ingénieur; A. Chevalley, ingénieur; E. d'Okolski, architecte; Ch. Thévenaz, architecte — Genève: MM. Cl. Groscurin, architecte; E. Martin, architecte — Neuchâtel: MM. J. Béguin, architecte; R. Guye, ingénieur — Valais: MM. C. de Kalbermatten, ingénieur; D. Burgener, architecte.

Rédaction: D. Bonnard, ingénieur. Case postale Chauderon 475, Lausanne.

Conseil d'administration
de la Société anonyme du Bulletin technique: A. Stucky, ingénieur, président;
M. Bridel; G. Epitoux, architecte; R. Neeser, ingénieur.

Tarif des annonces

1/1 page	Fr. 264.—
1/2 »	» 134.40
1/4 »	» 67.20
1/8 »	» 33.60

Annonces Suisses S. A.
(ASSA)



Place Bel-Air 2. Tél. 22 33 26
Lausanne et succursales

Abonnements:
Suisse: 1 an, 26 francs
Etranger: 30 francs
Pour sociétaires:
Suisse: 1 an, 22 francs
Etranger: 27 francs
Prix du numéro: Fr. 1.60
Ch. post. « Bulletin technique de la Suisse romande »
N° II. 57 75, à Lausanne.

Adresser toutes communications concernant abonnements, changements d'adresse, expédition à
Imprimerie La Concorde,
Terreaux 31, Lausanne

Rédaction
et éditions de la S. A. du
Bulletin technique (tirés à
part), Case Chauderon 475
**Administration de la S. A.
du Bulletin Technique**
Ch. de Roseneck 6 Lausanne

SOMMAIRE: Contribution à l'étude des coques cylindriques d'épaisseur variable (suite et fin), par HENRY FAVRE, professeur à l'Ecole polytechnique fédérale, Zurich. — Société suisse des ingénieurs et des architectes: *Groupe des ingénieurs de l'industrie.* — DIVERS: *Fondation de l'Association Suisse pour l'Automatique; Une journée d'étude consacrée au bois.* — CORRESPONDANCE. — BIBLIOGRAPHIE. — Société vaudoise des ingénieurs et des architectes (Section S. I. A.): *Assemblée générale extraordinaire.* — CARNET DES CONCOURS. — SERVICE DE PLACEMENT. — DOCUMENTATION GÉNÉRALE. — DOCUMENTATION DU BATIMENT. — INFORMATIONS DIVERSES.

CONTRIBUTION À L'ÉTUDE DES COQUES CYLINDRIQUES D'ÉPAISSEUR VARIABLE

par HENRY FAVRE, Professeur à l'Ecole polytechnique fédérale, Zurich

(Suite et fin.) *

4. Applications

Nous allons maintenant appliquer la solution obtenue à la résolution d'un certain nombre de problèmes qui se posent dans l'industrie. Il s'agira de conduites ou de réservoirs dont une des extrémités est soumise à certaines conditions d'appui, l'autre extrémité étant libre. Nous supposons essentiellement que les ouvrages en question soient des coques cylindriques d'épaisseur linéairement variable, satisfaisant aux conditions (31) et (32).

Dans tous ces problèmes, nous nous bornerons à calculer le moment M_0 et l'effort tranchant Q_0 relatifs à l'extrémité non libre. Ces deux grandeurs donnent la clef de toute solution. Dès qu'elles sont connues, les formules du § 3 — ou les diagrammes des figures 3 à 6 — permettent en effet de calculer les déformations et les contraintes dans une section quelconque. Bien entendu il faut, dans chaque cas particulier, ajouter respectivement à ces dernières grandeurs celles provenant uniquement des forces extérieures données (pressions d'un gaz, d'un liquide, poids propre, etc.), appliquées à la coque libre à ses deux extrémités. Ces déformations et contraintes se calculent d'ailleurs facilement, en assimilant en général la coque à une membrane¹⁰.

* Voir Bulletin technique du 10 novembre 1956, page 419.

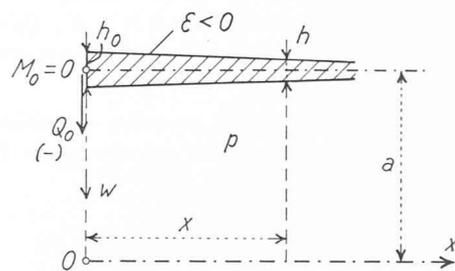


Fig. 7

¹⁰ Conduite soumise à une pression intérieure constante p et fixée à une des extrémités ($x = 0$), le long de la circonférence, par une articulation.

L'effort annulaire de la coque libre est, dans ce cas, $N = ap$, et la composante w_p du déplacement d'un

¹⁰ On peut démontrer qu'une coque cylindrique, satisfaisant aux conditions admises ici, se comporte approximativement, sous l'action d'une pression normale intérieure, comme une membrane, pourvu que cette pression varie suffisamment lentement en fonction de x . Ce sera le cas dans les applications ^{1°} à ^{7°}, où la pression p sera constante ou nulle. Par contre, dans les applications ^{8°} et ^{9°}, où p varie linéairement de zéro à une valeur finie, nous avons estimé indiqué de tenir compte non seulement de N dans le calcul de la coque libre, mais aussi de M_p , cette dernière grandeur pouvant n'être plus négligeable.

point de la surface moyenne, suivant la normale à cette surface, est, à l'extrémité $x = 0$ (fig. 7) :

$$(w_p)_{x=0} = -\frac{Na}{Eh_0} = -\frac{a^2 p}{Eh_0} \quad (46)$$

D'autre part, le déplacement w produit, à la même extrémité, par un moment M_0 et un effort tranchant Q_0 , est, d'après le § 2, donné par la formule :

$$(w)_{x=0} = \frac{-1}{2\beta^3 D_0} \left[\left(1 - \frac{5}{4}\epsilon\right) \beta M_0 + (1 - \epsilon) Q_0 \right] \quad (29)$$

Puisque, dans la section $x = 0$, le déplacement et le moment de flexion résultants doivent être nuls, on a les deux conditions :

$$\frac{-1}{2\beta^3 D_0} \left[\left(1 - \frac{5}{4}\epsilon\right) \beta M_0 + (1 - \epsilon) Q_0 \right] - \frac{a^2 p}{Eh_0} = 0, \quad M_0 = 0, \quad (47)$$

d'où, en tenant compte des relations (10), (17) et en posant $\frac{1}{1 - \epsilon} \cong 1 + \epsilon$:

$$Q_0 = -\frac{a^2 p}{Eh_0} \frac{2\beta^3 D_0}{1 - \epsilon} \cong -(1 + \epsilon) \frac{p}{2\beta},$$

c'est-à-dire :

$$M_0 = 0, \quad Q_0 = -(1 + \epsilon) \frac{p}{2\beta} \quad (48)$$

On voit que si l'épaisseur diminue à partir de l'extrémité où les parois sont articulées, ce qui est très souvent le cas dans les applications ($\epsilon < 0$, fig. 7), Q_0 est plus petit en valeur absolue que lorsque l'épaisseur est constante ($\epsilon = 0$). Dans les cas considérés par nos calculs, cette diminution de Q_0 ne dépassera pas 10 %, ϵ étant inférieur ou égal à 0,1, en vertu de la condition (31). Au contraire, si l'épaisseur augmente ($\epsilon > 0$), Q_0 est, en valeur absolue, plus grand que lorsque h est constant.

2° Conduite soumise à une pression intérieure constante p , et encastrée à une des extrémités (fig. 8).

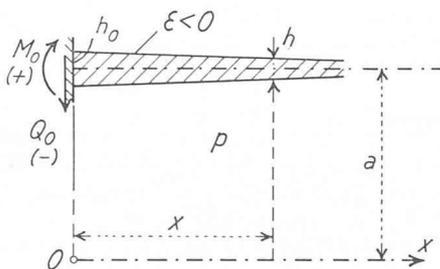


Fig. 8

La composante du déplacement dû à l'effort annulaire de la coque libre est, à l'extrémité $x = 0$, également donnée par la formule (46). Il est ici nécessaire de calculer encore la dérivée $\left(\frac{dw_p}{dx}\right)_{x=0}$ — c'est-à-dire le

petit angle formé par la tangente à la ligne élastique méridienne avec l'axe des x — afin de pouvoir formuler la condition d'encastrement. On a, pour une section quelconque, compte tenu de (7) et (11) :

$$w_p = -\frac{a^2 p}{Eh} = \frac{-a^2 p}{E h_0 \left(1 + \frac{\lambda}{a} x\right)},$$

d'où
$$\frac{dw_p}{dx} = \frac{\lambda a p}{E h_0 \left(1 + \frac{\lambda}{a} x\right)^2},$$

$$\left(\frac{dw_p}{dx}\right)_{x=0} = \frac{\lambda a p}{E h_0} = \frac{a^2 \beta \epsilon p}{E h_0} \quad (49)$$

D'autre part, le petit angle $\frac{dw}{dx}$ engendré par l'application, à l'extrémité $x = 0$, d'un moment M_0 et d'un effort tranchant Q_0 , est, dans cette section, donné par la formule établie § 2 :

$$\left(\frac{dw}{dx}\right)_{x=0} = \frac{1}{2\beta^2 D_0} \left(1 - \frac{5}{4}\epsilon\right) (2\beta M_0 + Q_0) \quad (30)$$

Quant au déplacement correspondant $(w)_{x=0}$, il est encore donné par la formule (29).

Puisque, pour $x = 0$, le déplacement et l'angle résultants doivent être nuls, on a les deux conditions :

$$\left. \begin{aligned} \frac{-1}{2\beta^3 D_0} \left[\left(1 - \frac{5}{4}\epsilon\right) \beta M_0 + (1 - \epsilon) Q_0 \right] - \frac{a^2 p}{Eh_0} &= 0, \\ \frac{1}{2\beta^2 D_0} \left(1 - \frac{5}{4}\epsilon\right) (2\beta M_0 + Q_0) + \frac{a^2 \beta \epsilon p}{Eh_0} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

En résolvant ce système par rapport à M_0 et Q_0 on obtient, en utilisant comme précédemment les relations (10), (17) et en négligeant les termes où figurent des puissances supérieures de ϵ (ce que nous ferons d'ailleurs en général dans la suite) :

$$M_0 = \left(1 - \frac{\epsilon}{4}\right) \frac{p}{2\beta^2}, \quad Q_0 = -\left(1 + \frac{\epsilon}{4}\right) \frac{p}{\beta} \quad (51)$$

Ces formules montrent que si l'épaisseur diminue à partir de l'extrémité $x = 0$ ($\epsilon < 0$), M_0 est plus grand et Q_0 plus petit (en valeur absolue) que lorsque l'épaisseur est constante ($\epsilon = 0$). Cette augmentation et cette diminution sont toutefois très faibles dans les cas considérés dans nos calculs, au maximum $\frac{\epsilon}{4} = \frac{0,1}{4} = 2,5\%$, en vertu de la condition (31). Au contraire, si l'épaisseur augmente, M_0 est plus petit et Q_0 plus grand (en valeur absolue) que lorsque h est constant.

3° Conduite soumise à une variation uniforme de température Δt et fixée à une des extrémités ($x = 0$), le long de la circonférence, par une articulation.

On a, ici :

$$(w_{\Delta t})_{x=0} = -\alpha a \Delta t,$$

α désignant le coefficient de dilatation, et les deux conditions à l'extrémité $x = 0$ s'écrivent, compte tenu de la formule (29) :

$$\frac{-1}{2\beta^3 D_0} \left[\left(1 - \frac{5}{4}\epsilon\right) \beta M_0 + (1 - \epsilon) Q_0 \right] - \alpha \Delta t = 0, \quad M_0 = 0, \quad (52)$$

d'où

$$M_0 = 0, \quad Q_0 = - (1 + \epsilon) \frac{\alpha E h_0 \Delta t}{2a\beta}. \quad (53)$$

La valeur de Q_0 donne lieu aux mêmes remarques que celles formulées à propos de la formule (48) relative au premier exemple.

4° Conduite soumise à une variation uniforme de température Δt et encastrée à une des extrémités ($x = 0$).

La variation de température n'engendrant dans la coque libre aucune inclinaison de la tangente à la ligne élastique méridienne, nous avons ici :

$$(w_{\Delta t})_{x=0} = -\alpha \Delta t, \quad \left(\frac{dw_{\Delta t}}{dx}\right)_{x=0} = 0,$$

d'où les deux conditions :

$$\left. \begin{aligned} \frac{-1}{2\beta^3 D_0} \left[\left(1 - \frac{5}{4}\epsilon\right) \beta M_0 + (1 - \epsilon) Q_0 \right] - \alpha \Delta t = 0, \\ \frac{1}{2\beta^2 D_0} \left(1 - \frac{5}{4}\epsilon\right) (2\beta M_0 + Q_0) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

Nous en tirons :

$$M_0 = \left(1 + \frac{3}{4}\epsilon\right) \frac{\alpha E h_0 \Delta t}{2a\beta^2}, \quad Q_0 = - \left(1 + \frac{3}{4}\epsilon\right) \frac{\alpha E h_0 \Delta t}{a\beta} \quad (55)$$

Une diminution de l'épaisseur à partir de l'extrémité $x = 0$ ($\epsilon < 0$) engendre donc, en valeur absolue, une diminution de M_0 et de Q_0 égale, en pour-cent, à $0,75 \epsilon$. Cette diminution ne dépassera pas 7,5 %, dans les conditions où nous sommes placés, en vertu de (31). L'effet contraire a lieu dans le cas où l'épaisseur augmente ($\epsilon > 0$).

5° Conduite formée de deux parties solidaires, de même rayon, d'épaisseurs inégalement variables et soumises à une pression intérieure constante p .

Nous supposons que les deux parties aient la même épaisseur h_0 dans la section de raccordement et soient faites de la même matière. Introduisons les axes Ox et Ox' indiqués dans la figure 9a et désignons respectivement par ϵ et ϵ' les nombres caractérisant les variations d'épaisseur. Dans la section $x = x' = 0$, les

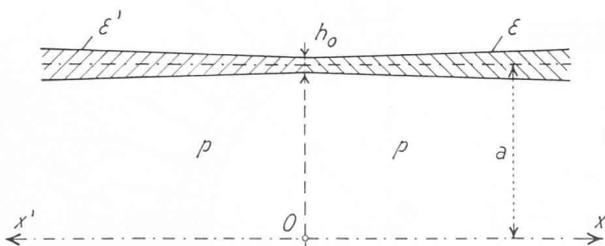


Fig. 9a

déplacements résultant des points des deux parties de la conduite et les angles formés par les tangentes aux deux lignes élastiques méridiennes avec l'axe Ox doivent être égaux. D'où, en utilisant les formules (29), (30), (46), (49) et en tenant compte du fait que les axes x et x' ont des sens opposés, les deux conditions de raccordement :

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{2\beta^3 D_0} \left[\left(1 - \frac{5}{4}\epsilon\right) \beta M_0 + (1 - \epsilon) Q_0 \right] - \frac{a^2 p}{E h_0} = \\ = -\frac{1}{2\beta^3 D_0} \left[\left(1 - \frac{5}{4}\epsilon'\right) \beta M_0' + (1 - \epsilon') Q_0' \right] - \frac{a^2 p}{E h_0}, \\ \frac{1}{2\beta^2 D_0} \left(1 - \frac{5}{4}\epsilon\right) (2\beta M_0 + Q_0) + \frac{a^2 \beta \epsilon p}{E h_0} = \\ = -\frac{1}{2\beta^2 D_0} \left(1 - \frac{5}{4}\epsilon'\right) (2\beta M_0' + Q_0') - \frac{a^2 \beta \epsilon' p}{E h_0}, \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

où M_0, M_0', Q_0, Q_0' désignent respectivement les moments et les efforts tranchants relatifs aux deux parties, dans la section $x = x' = 0$ (fig. 9b). Remarque que les quantités β et D_0 sont les mêmes pour les deux parties, d'après des formules (10) et (17).

On a, d'autre part, en vertu de la loi d'égalité de l'action et de la réaction :

$$M_0' = M_0, \quad Q_0' = -Q_0. \quad (57)$$

En substituant ces valeurs dans les équations (56), on en tire, en négligeant les termes du second degré :

$$M_0 = M_0' = -\frac{(\epsilon + \epsilon') p}{8 \beta^2}, \quad Q_0 = -Q_0' = 0. \quad (58)$$

Remarquons tout d'abord que, dans le cas particulier où $\epsilon = -\epsilon'$, nous avons $M_0 = M_0' = 0$, d'après la première de ces formules, résultat évident, puisque les deux parties en forment alors une seule d'épaisseur linéairement variable.

Dans le cas général où $\epsilon \neq -\epsilon'$, les formules (58) montrent que les variations d'épaisseur engendrent, dans la section de raccordement, des moments $M_0 = M_0'$ proportionnels à la somme $\epsilon + \epsilon'$ des nombres caractérisant ces variations, mais n'engendrent pas d'efforts tranchants. Ces moments ont des signes contraires à celui de cette somme. Ainsi, dans le cas de la figure 9a, où ϵ et ϵ' sont supposés positifs, M_0 et M_0' sont négatifs. Les deux parties de la conduite sont donc soumises, sur une certaine longueur mesurée à partir de la section

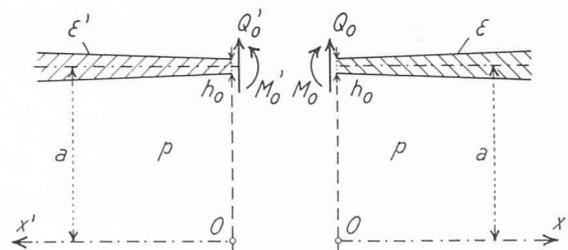


Fig. 9b

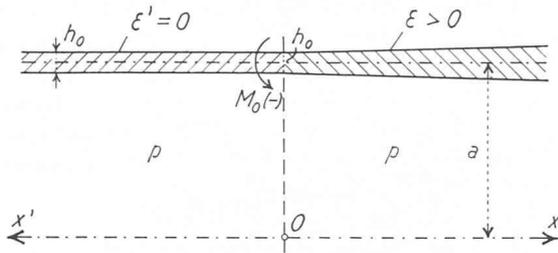


Fig. 10a

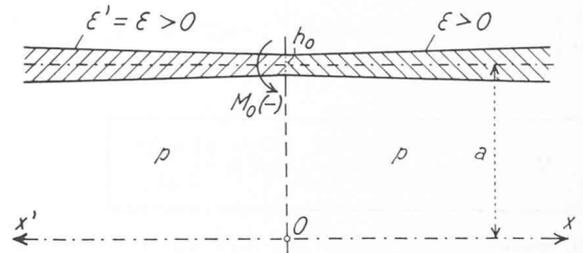


Fig. 11a

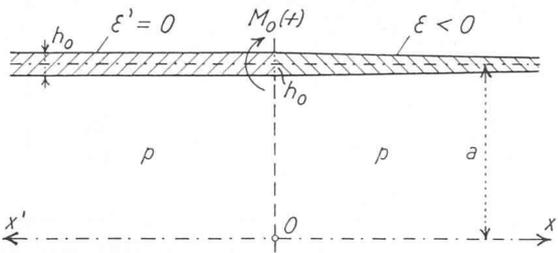


Fig. 10b

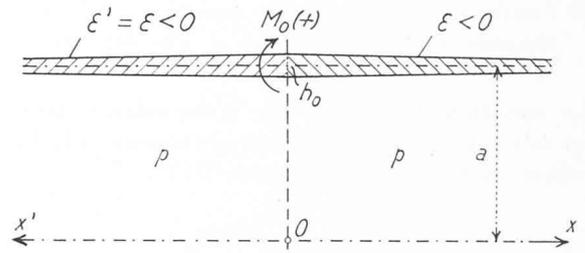


Fig. 11b

de raccordement, à des moments de flexion M_x , M_φ , à des efforts annulaires N et à des efforts tranchants Q , engendrés par les variations des épaisseurs. Ces moments et ces efforts sont d'ailleurs petits, $M_0 = M_0'$ étant de l'ordre de ϵ et ϵ' . On peut vérifier que les tensions qu'ils engendrent ne dépassent pas, dans les conditions admises, le 10 % des tensions dues à l'effort annulaire primaire $N = ap$.

Examinons deux cas particuliers :

a) $\epsilon \neq 0$, $\epsilon' = 0$. Les formules (58) deviennent :

$$M_0 = M_0' = -\frac{\epsilon p}{8\beta^2}, \quad Q_0 = 0. \quad (59)$$

Les moments M_0 et M_0' sont donc négatifs si $\epsilon > 0$ (fig. 10a) et positifs dans le cas contraire (fig. 10b).

b) $\epsilon = \epsilon' \neq 0$. Les formules (58) montrent que :

$$M_0 = M_0' = -\frac{\epsilon p}{4\beta^2}, \quad Q_0 = 0. \quad (60)$$

Il y a lieu de faire les mêmes remarques au sujet des signes des moments que dans le cas précédent (voir fig. 11a et b).

6° Conduite formée de deux parties solidaires égales, d'épaisseurs variables, serrées dans la section de raccordement par une bride exerçant une force P , constante par unité de longueur.

On a ici $\epsilon = \epsilon'$, et les conditions de raccordement s'écrivent (fig. 12) :

$$Q_0 = -\frac{P}{2}, \quad \frac{1}{2\beta^2 D_0} \left(1 - \frac{5}{4}\epsilon\right) (2\beta M_0 + Q_0) = 0. \quad (61)$$

La première de ces conditions est évidente. La seconde exprime, à l'aide de la formule (30), le fait que la tangente à la ligne élastique méridienne doit rester parallèle à l'axe des x dans la section de raccordement, ce qui exige que $\left(\frac{dw}{dx}\right)_{x=0} = 0$. On tire des relations (61) :

$$M_0 = \frac{P}{4\beta}, \quad Q_0 = -\frac{P}{2}. \quad (62)$$

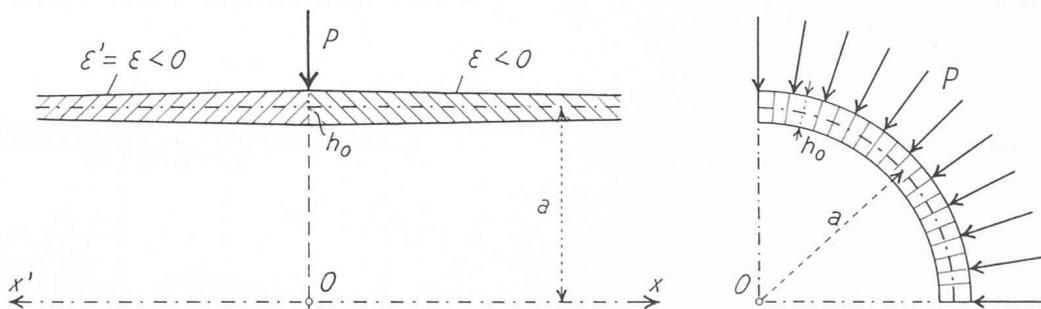


Fig. 12

D'où ce résultat intéressant : le moment M_0 et l'effort tranchant Q_0 (relatifs à la section $x = 0$) sont complètement indépendants des variations de l'épaisseur, ε ne figurant pas dans les formules (62). Mais il est évident que, par contre, la répartition des grandeurs M_x , M_φ , N et Q le long de l'axe dépendra de cette variation, comme le montrent d'ailleurs éloquentement les diagrammes des figures 4 et 6.

Calculons encore le déplacement $(w)_{x=0}$. La formule (29) donne, en introduisant les valeurs (62) de M_0 et Q_0 :

$$(w)_{x=0} = \left(1 - \frac{3}{4} \varepsilon\right) \frac{P}{2\beta^3 D_0} \quad (63)$$

Ce déplacement dépend donc des variations de l'épaisseur.

7° Conduite formée de deux parties égales, d'épaisseurs variables, et d'un raccord d'épaisseur constante h_0 , de longueur l , sur laquelle est appliquée une pression extérieure radiale p , constante par unité de surface, les trois parties étant solidaires.

Nous nous bornerons à esquisser la solution. La continuité du raccordement de la partie centrale et des parties d'épaisseurs variables est exprimée par les équations (fig. 13) :

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{2\beta^3 D_0} \left[\left(1 - \frac{5}{4} \varepsilon\right) \beta M_0 + (1 - \varepsilon) Q_0 \right] &= \\ = \frac{a^2 p}{Eh_0} - \frac{2 M_0 a^2 \beta^2}{Eh_0} \chi_2(\alpha) + \frac{2 Q_0 a^2 \beta}{Eh_0} \chi_1(\alpha), & \\ \frac{1}{2\beta^2 D_0} \left(1 - \frac{5}{4} \varepsilon\right) (2\beta M_0 + Q_0) &= \\ = -\frac{4 M_0 a^2 \beta^3}{Eh_0} \chi_3(\alpha) + \frac{2 Q_0 a^2 \beta^2}{Eh_0} \chi_2(\alpha), & \end{aligned} \right\} (64)$$

où M_0 , Q_0 désignent le moment et l'effort tranchant pour $x = 0$, et où α , χ_1 , χ_2 , χ_3 ont les valeurs¹¹ :

$$\alpha = \beta l, \quad (65)$$

$$\left. \begin{aligned} \chi_1(\alpha) &= \frac{\operatorname{ch}\alpha + \operatorname{cosec}\alpha}{\operatorname{sh}\alpha + \sin\alpha}, & \chi_2(\alpha) &= \frac{\operatorname{sh}\alpha - \sin\alpha}{\operatorname{sh}\alpha + \sin\alpha}, \\ \chi_3(\alpha) &= \frac{\operatorname{ch}\alpha - \operatorname{cosec}\alpha}{\operatorname{sh}\alpha + \sin\alpha}. \end{aligned} \right\} (66)$$

¹¹ Le lecteur trouvera dans l'ouvrage *Plates and Shells* de S. TIMOSHENKO (McGraw Hill Book Company, New York and London, 1940), p. 402, une table donnant un certain nombre de valeurs de ces trois fonctions (remarquer que nous avons posé pour simplifier $\alpha = \beta l$ et non $\alpha = \frac{\beta l}{2}$, comme l'a fait S. Timoshenko).

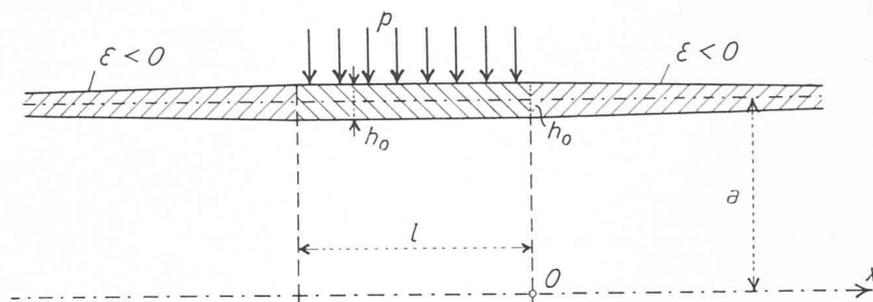


Fig. 13

En résolvant le système (64) par rapport à M_0 et Q_0 , on obtient :

$$\left. \begin{aligned} M_0 &= \frac{-\left(1 - \chi_2 - \frac{5}{4} \varepsilon\right) p}{2\beta^2 \left[\left(1 - \chi_2 - \frac{5}{4} \varepsilon\right)^2 - 2(1 + \chi_1 - \varepsilon) \left(1 + \chi_3 - \frac{5}{4} \varepsilon\right) \right]}, \\ Q_0 &= \frac{\left(1 + \chi_3 - \frac{5}{4} \varepsilon\right) p}{\beta \left[\left(1 - \chi_2 - \frac{5}{4} \varepsilon\right)^2 - 2(1 + \chi_1 - \varepsilon) \left(1 + \chi_3 - \frac{5}{4} \varepsilon\right) \right]}. \end{aligned} \right\} (67)$$

Connaissant M_0 et Q_0 , il sera facile de calculer M_x , M_φ , N et Q non seulement dans les deux parties d'épaisseur variable, mais encore dans celle d'épaisseur constante, de longueur l .

8° Réservoir cylindrique vertical, articulé à l'extrémité inférieure, libre à l'extrémité supérieure, et rempli d'un liquide.

Dans ce calcul, nous négligerons l'influence — en général faible — du poids propre de la coque sur les valeurs de M_0 et Q_0 . Il n'y aurait d'ailleurs aucune difficulté à tenir compte de cette influence séparément.

Soit γ le poids spécifique du liquide et H , la hauteur du réservoir (fig. 14). Calculons tout d'abord $(w)_{x=0}$, $\left(\frac{dw}{dx}\right)_{x=0}$ et $\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)_{x=0}$, en supposant provisoirement la coque libre à ses deux extrémités.

La pression du liquide, dans une section x , est $\gamma(H-x)$. L'effort annulaire engendré par cette pression est égal à $\gamma(H-x)a$ et la composante normale du déplacement d'un point de la surface moyenne a donc, compte tenu de (7) et (11), la valeur¹² :

$$w = -\frac{\gamma(H-x)a^2}{Eh} = -\frac{\gamma a^2(H-x)}{Eh_0(1 + \varepsilon\beta x)}. \quad (68)$$

On déduit de cette formule :

$$\frac{dw}{dx} = \frac{\gamma a^2(1 + \varepsilon\beta H)}{Eh_0(1 + \varepsilon\beta x)^2}, \quad (69)$$

$$\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{2\varepsilon\beta\gamma a^2(1 + \varepsilon\beta H)}{Eh_0(1 + \varepsilon\beta x)^3}, \quad (70)$$

¹² La fonction w définie par (68) satisfait — à des termes très petits près — à l'équation différentielle (1), où $Z = -\gamma(H-x)$, comme on le vérifie facilement.

d'où, pour $x = 0$:

$$\left\{ \begin{aligned} (w)_{x=0} &= -\frac{\gamma a^2 H}{Eh_0}, & (71) \quad \left(\frac{dw}{dx}\right)_{x=0} &= \frac{\gamma a^2}{Eh_0} (1 + \epsilon \beta H), & (72) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)_{x=0} &= -\frac{2 \epsilon \beta \gamma a^2}{Eh_0} (1 + \epsilon \beta H). & (73) \end{aligned} \right.$$

La courbure $\frac{d^2w}{dx^2}$ de la ligne élastique méridienne engendre dans la coque, d'après (3) et (70), des moments constants :

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -D \frac{d^2w}{dx^2} = -D_0 (1 + \epsilon \beta x)^3 \frac{d^2w}{dx^2} = \\ &= \frac{2 \epsilon \beta \gamma a^2 (1 + \epsilon \beta H) D_0}{Eh_0}. \end{aligned} \right\} (74)$$

Ces moments sont petits, étant du même ordre que ϵ ¹³. Pour réaliser l'état d'équilibre considéré, il faudrait ainsi appliquer dans la section $x = 0$ un moment ayant la valeur (74)¹⁴. Ce moment va intervenir dans les conditions d'appui.

Superposons maintenant, à l'état d'équilibre que nous venons de considérer, l'état engendré par l'application, dans la section $x = 0$, d'un moment M_0 et d'un effort tranchant Q_0 . Ces deux grandeurs doivent être choisies de façon que le déplacement et le moment résultants soient nuls dans cette section. Compte tenu des relations (29), (30), (71) et (74), on a donc les deux conditions d'appui :

$$\left\{ \begin{aligned} -\frac{1}{2\beta^3 D_0} \left[\left(1 - \frac{5}{4} \epsilon\right) \beta M_0 + (1 - \epsilon) Q_0 \right] - \frac{\gamma a^2 H}{Eh_0} &= 0, \\ M_0 + \frac{2 \epsilon \beta \gamma a^2 (1 + \epsilon \beta H) D_0}{Eh_0} &= 0. \end{aligned} \right. (75)$$

Ces deux équations, résolues par rapport à M_0 et Q_0 donnent, en tenant compte des relations (10), (17) et en négligeant un très petit terme dans la seconde des formules ci-dessous :

$$\boxed{\begin{aligned} M_0 &= -\frac{\epsilon \gamma (1 + \epsilon \beta H)}{2 \beta^3}, \\ Q &= -\left[(1 + \epsilon) \beta H - (1 + \epsilon \beta H) \epsilon \right] \frac{\gamma}{2 \beta^2}. \end{aligned}} (76)$$

Le second terme de la parenthèse $[\]$ étant en général petit par rapport au premier, on constate qu'une diminution de l'épaisseur ($\epsilon < 0$) engendre une diminution de la valeur absolue de l'effort tranchant, comme dans le cas où la pression est constante (voir 1^o). Quant au moment M_0 , il est petit et de signe contraire à celui de ϵ .

¹³ Nous ne pouvons pas, dans la parenthèse figurant au numérateur de la formule (74), négliger le terme $\epsilon \beta H$, qui est du même ordre que l'unité ($\epsilon \beta H = -1$ dans le cas extrême où l'épaisseur h est nulle au niveau du liquide).

¹⁴ Il serait facile de montrer qu'il faudrait également appliquer, dans cette section, un petit effort tranchant, du même ordre que ϵ^2 , donc tout à fait négligeable. Nous ne le considérerons pas dans la suite.

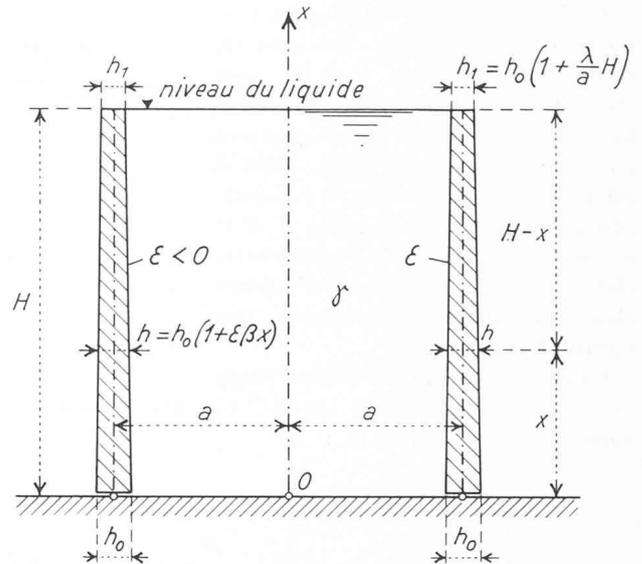


Fig. 14.

Remarque. En calculant les valeurs résultantes des moments M_x et M_ϕ , il faudra, dans le cas traité, ajouter respectivement aux moments engendrés par M_0 , Q_0 et donnés par les formules (38), (39), les valeurs des moments relatives au premier état d'équilibre considéré. Ces derniers moments seront déterminés par les formules (74) et (4). Comme ils sont petits, on pourra souvent les négliger.

9^o Réservoir cylindrique vertical, encastré à l'extrémité inférieure, libre à l'extrémité supérieure, et rempli d'un liquide.

En utilisant les notations de la figure 14, les conditions d'appui s'écrivent, compte tenu des relations (29), (30), (71) et (72) :

$$\left\{ \begin{aligned} -\frac{1}{2\beta^3 D_0} \left[\left(1 - \frac{5}{4} \epsilon\right) \beta M_0 + (1 - \epsilon) Q_0 \right] - \frac{\gamma a^2 H}{Eh_0} &= 0, \\ \frac{1}{2\beta^2 D_0} \left(1 - \frac{5}{4} \epsilon\right) (2 \beta M_0 + Q_0) + \frac{\gamma a^2}{Eh_0} (1 + \epsilon \beta H) &= 0. \end{aligned} \right. (77)$$

On en tire, en tenant compte des relations (10), (17) et en négligeant de très petits termes :

$$\boxed{\begin{aligned} M_0 &= \left[\left(1 + \frac{3}{4} \epsilon\right) \beta H - (1 + \epsilon) (1 + \epsilon \beta H) \right] \frac{\gamma}{2 \beta^3}, \\ Q_0 &= -\left[\left(2 + \frac{\epsilon}{2}\right) \beta H - 1 - \frac{3}{4} (1 + \epsilon \beta H) \epsilon \right] \frac{\gamma}{2 \beta^2}. \end{aligned}} (78)$$

La remarque faite à la fin de l'application précédente est évidemment encore valable ici.

Les applications numériques de ces formules montrent qu'une diminution de l'épaisseur ($\epsilon < 0$) entraîne une augmentation de la valeur absolue de M_0 et une diminution de celle de Q_0 , toutes deux très faibles, comme dans le cas où la pression est constante (voir 2^e exemple).

— Pour illustrer les conclusions des deux dernières applications (8° et 9°), choisissons l'exemple suivant :

$$\left. \begin{aligned} a = 10 \text{ m}, \quad H = 12,50 \text{ m}, \quad h_0 = 0,36 \text{ m}, \quad \lambda = -0,60, \\ v = 0,25, \quad \gamma = 1 \text{ kg/dm}^3. \end{aligned} \right\} (79)$$

L'épaisseur h_1 de ce réservoir est, à l'extrémité supérieure, en vertu de la relation (7) :

$$h_1 = h_0 \left(1 + \frac{\lambda}{a} H \right) = 0,09 \text{ m}. \quad (80)$$

Il s'agit donc d'un réservoir dont l'épaisseur décroît linéairement, à partir de la base, de 36 à 9 cm, et qu'on peut imaginer construit en béton armé.

On déduit des formules (10) et (11), en introduisant les valeurs (79) :

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{3(1-v^2)}{a^2 h_0^2}} = 0,682 \text{ m}^{-1}, \quad \varepsilon = \frac{\lambda}{a\beta} = 0,0880. \quad (81)$$

Les conditions (31) et (32) d'application de nos formules sont satisfaites, car

$$|\varepsilon| = 0,088 < 0,1 \quad \text{et} \quad l = H = 12,50 > \frac{3}{\beta} = 4,40 \text{ m}.$$

a) *Cas où le réservoir est articulé à l'extrémité inférieure.*

Les formules (76) donnent ici, en introduisant les valeurs (79) et (81) :

$$\underline{M_0} = 35 \text{ kg}, \quad \underline{Q_0} = -8380 \text{ kg/m}. \quad (82)$$

On aurait, dans les mêmes conditions, mais si l'épaisseur était constante ($\varepsilon = 0$), toujours en vertu des formules (76) :

$$\underline{M_0} = 0, \quad \underline{Q_0} = -\frac{\gamma H}{2\beta} = -9160 \text{ kg/m}. \quad (82')$$

La diminution de l'épaisseur réduit donc la valeur absolue de l'effort tranchant Q_0 de $\frac{9160 - 8380}{9160} = 0,085$, soit de 8,5 %.

On remarque, d'autre part, que le moment $M_0 = 35 \text{ kg}$ est ici négligeable. Il en est par conséquent de même des moments M_x et M_φ relatifs au premier état d'équilibre dont il a été question précédemment.

b) *Cas où le réservoir est encastré à l'extrémité inférieure.*

Les formules (78) donnent, dans ce cas :

$$\underline{M_0} = 12\,170 \text{ kg}, \quad \underline{Q_0} = -16\,820 \text{ kg/m}. \quad (83)$$

On aurait, dans les mêmes conditions, mais si l'épaisseur était constante ($\varepsilon = 0$), toujours d'après les formules (78) :

$$\left. \begin{aligned} M_0 &= (\beta H - 1) \frac{\gamma}{2\beta^3} = 11\,830 \text{ kg}, \\ Q_0 &= -(2\beta H - 1) \frac{\gamma}{2\beta^2} = -17\,250 \text{ kg/m}. \end{aligned} \right\} (83')$$

La variation de l'épaisseur augmente donc la valeur absolue de M_0 de $\frac{12\,170 - 11\,830}{11\,830} = 0,029$, soit de 2,9 %, et diminue celle de Q_0 de $\frac{17\,250 - 16\,820}{17\,250} = 0,025$, soit de 2,5 % seulement. L'influence de la diminution de l'épaisseur se manifeste cependant plus fortement *le long de la hauteur du réservoir*, comme le montrent éloquentement les diagrammes des figures 3 à 6.

Zurich, le 10 avril 1956.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] H. REISSNER : *Über die Spannungsverteilung in zylindrischen Behälterwänden*. Beton und Eisen, Vol. 7, 1908, p. 150 et suiv.
- [2] E. MEISSNER : *Beanspruchung und Formänderung zylindrischer Gefässe mit linear veränderlicher Wandstärke*. Vierteljahrsschrift der Naturforsch. Gesellschaft in Zürich, 1917, p. 153 et suiv.
- [3] A. DUMAS : *Sur le régime des déformations et des contraintes d'une enveloppe cylindrique de révolution, d'épaisseur variable, sollicitée par des efforts circulaires*. Bull. techn. de la Suisse rom., 28 juil. 1945, p. 199 et suiv.
- [4] J. PASCHOUD : *Recherche de l'élastique d'un tube cylindrique de révolution à épaisseur variable*. Bull. techn. de la Suisse rom., 28 juil. 1945, p. 221 et suiv. Voir aussi du même auteur : *Calcul des tubes cylindriques de révolution d'épaisseur variable, sollicités à la flexion circulaire*. Bull. techn. de la Suisse rom., 27 janv. 1951, p. 13 et suiv.
- [5] B. DE FONTVILANT : *Calcul des réservoirs circulaires en béton armé à paroi d'épaisseur variable*. Inst. techn. du Bâtiment et des Trav. publics, Série I, N° 23, 30 oct. 1945.
- [6] J. TACHE : *Le calcul d'un tube cylindrique de révolution à épaisseur de paroi variable*. Bull. techn. de la Suisse rom., 12 oct. 1946, p. 273 et suiv., et 26 oct. 1946, p. 285 et suiv.
- [7] W. FLÜGGE : *Statik und Dynamik der Schalen*. Springer, Berlin, 1934.
- [8] S. TIMOSHENKO : *Theory of Plates and Shells*. McGraw Hill Book Co., New York a. London, 1940.
- [9] K. GIRKMANN : *Flächentragwerke*. Springer, Wien, 1946.
- [10] P. L'HERMITE : *Résistance des matériaux théorique et expérimentale*. Dunod, Paris, 1954.
- [11] H. FAVRE et E. CHABLOZ : *Etude des plaques circulaires fléchies d'épaisseur linéairement variable. Cas d'une surcharge uniformément répartie*. Zeitschr. für angew. Math. u. Physik, Vol. I, 1950, p. 317 et suiv.
- [12] H. FAVRE et E. CHABLOZ : *Etude des plaques circulaires fléchies d'épaisseur linéairement variable. Cas d'une force appliquée au centre*. Bull. techn. de la Suisse rom., 12 janv. 1952.
- [13] H. FAVRE et B. GILG : *La plaque rectangulaire fléchie d'épaisseur linéairement variable*. Zeitschr. für angew. Math. u. Physik, Vol. III, 1952, p. 354 et suiv.
- [14] H. FAVRE et W. SCHUMANN : *Etude de la flexion pour différentes conditions d'appui des plaques rectangulaires d'épaisseur linéairement variable*. Bull. techn. de la Suisse rom., 28 mai 1955.