

**Zeitschrift:** Bulletin technique de la Suisse romande  
**Band:** 83 (1957)  
**Heft:** 2

**Artikel:** Solution améliorée de l'équation différentielle de la ligne élastique d'une poutre soumise à la flexion  
**Autor:** Rossier, Paul  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-62769>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 26.11.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# SOLUTION AMÉLIORÉE DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DE LA LIGNE ÉLASTIQUE D'UNE POUTRE SOUMISE A LA FLEXION

par PAUL ROSSIER, professeur, Genève

En résistance des matériaux, on montre que la ligne élastique d'une poutre soumise à la flexion satisfait à l'équation

$$(1) \quad MR = K,$$

où  $M$  est le moment fléchissant.

$R$  le rayon de courbure et

$K$  une constante égale au produit du module d'élasticité par un certain moment d'inertie de la section.

Le rayon  $R$  est

$$R = \frac{\sqrt{(1+y'^2)^3}}{y''}.$$

Éliminons la racine par élévation au carré ; l'équation (1) prend la forme

$$(2) \quad K^2 y''^2 = M^2 (1+y'^2)^3.$$

Pour intégrer cette équation différentielle, les ingénieurs opèrent comme suit : ils placent l'origine en un point invariable de la ligne élastique et l'axe des  $x$  tangent à celle-ci. Comme la courbe cherchée est peu inclinée sur l'axe des  $x$ , ils négligent  $y'^2$  devant l'unité ;  $y''$  reste seul et l'intégration se ramène à deux quadratures. Comme dans les cas de la pratique,  $M$  est un polynôme, ces opérations conduisent à un  $y$  qui est lui aussi un polynôme dont le degré dépasse celui de  $M$  de deux unités. Le problème est ainsi résolu sans difficulté.

Proposons-nous d'examiner l'erreur faite en posant  $y'^2 = 0$ . Pour fixer les idées, traitons le cas de la poutre encastree à une extrémité et soumise aux divers cas de charge suivants :

- I. Moment fléchissant constant (flexion circulaire) ;
- II. Force unique à l'extrémité ; le moment varie linéairement ;
- III. Charge uniformément répartie ; le moment est une fonction quadratique ;
- IV. Charge décroissant linéairement de l'encastrement à l'extrémité libre et s'annulant en ce point ; le moment est donné par une fonction cubique.

De façon générale, nous pouvons poser :

$$M = m_0 + m_1 x + m_2 x^2 + m_3 x^3.$$

Sauf  $m_0$ , certains de ces coefficients sont nuls dans les cas I à III.

Pour alléger les calculs, posons encore :

$$\frac{M}{K} = p + qx + rx^2 + tx^3.$$

L'équation (2) devient

$$(3) \quad y''^2 = (p + qx + rx^2 + tx^3)^2 (1 + y'^2)^3.$$

Le choix fait plus haut des axes permet de poser, en nous limitant aux termes en  $x^6$ ,

$$y = a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + a_6 x^6,$$

avec  $a_2$  positif.

Cela fait, calculons  $y'$  et  $y''$  ; ce sont des polynômes de degrés 5 et 4 et substituons dans l'équation (3), en allant jusqu'aux  $x^4$ , et comparons les coefficients des mêmes puissances de  $x$  dans les deux membres. Il vient ainsi successivement :

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{p}{2} = \frac{m_0}{K}, & a_3 &= \frac{q}{6} = \frac{m_1}{6K}, \\ a_4 &= \frac{2r + 3p^3}{24} = \frac{2m_2 K^2 + 3m_0^3}{24K^3}, \\ a_5 &= \frac{t + 3p^2 q}{20} = \frac{m_3 K^2 + 3m_0^2 m_1}{20K^3}, \\ a_6 &= \frac{15p^5 - 2p^2 r + 15p^2 q^2}{240} = \\ &= \frac{15m_0^5 - 2m_0^2 m_2 K^2 + 15m_0 m_1^2 K^2}{240K^5}. \end{aligned}$$

Les deux premiers coefficients  $a_2$  et  $a_3$  sont ceux de la théorie des ingénieurs. Pour les derniers, cette théorie donne :

$$a'_4 = \frac{r}{12} = \frac{m_2}{12K}, \quad a'_5 = \frac{t}{20} = \frac{m_3}{20K}, \quad a'_6 = 0.$$

Ainsi, la théorie des ingénieurs donne correctement les coefficients des deux premiers termes du développement en série de  $y$ . Pour les termes suivants, elle est en faute.

Cela est très frappant dans le cas de la flexion circulaire. L'équation (1) montre que la courbe élastique est un cercle. La théorie simplifiée donne une parabole. La théorie plus complète fournit les termes suivants :

$$y = \frac{m_0}{2K} x^2 + \frac{m_0^3}{8K^3} x^4 + \frac{m_0^5}{16K^5} x^6.$$

Ce sont les premiers termes du développement d'un cercle de rayon  $\frac{K}{m_0}$ . La théorie simplifiée ne donne que le premier terme.

Pour nous rendre compte de l'ordre de grandeur de la différence entre les deux théories, examinons le cas suivant, où les efforts et les déformations sont considérables :

Module d'élasticité  $2 \cdot 10^7 \text{ tm}^{-2}$  (acier),

Moment d'inertie  $5 \cdot 10^{-7} \text{ m}^4 = 50 \text{ cm}^4$  (cela correspond à peu près à une section rectangulaire de 5 cm de hauteur et de 4,8 cm de base). Il vient  $K = 10 \text{ tm}^2$ .

|                          | I                    | II                    | III                   | IV                      |
|--------------------------|----------------------|-----------------------|-----------------------|-------------------------|
| $m_0$                    | 1                    | 1                     | 0,5                   | 0,33333                 |
| $m_1$                    | 0                    | -1                    | -1                    | -1                      |
| $m_2$                    | 0                    | 0                     | 0,5                   | 1                       |
| $m_3$                    | 0                    | 0                     | 0                     | -0,33333                |
| $a_2 = a'_2$             | $5 \cdot 10^{-2}$    | $5 \cdot 10^{-2}$     | $2,5 \cdot 10^{-2}$   | $1,6667 \cdot 10^{-2}$  |
| $a_3 = a'_3$             | 0                    | $-1,67 \cdot 10^{-2}$ | $-1,67 \cdot 10^{-2}$ | $-1,6667 \cdot 10^{-2}$ |
| $a_4$                    | $1,25 \cdot 10^{-4}$ | $1,25 \cdot 10^{-4}$  | $4,23 \cdot 10^{-3}$  | $8,3333 \cdot 10^{-3}$  |
| $a'_4$                   | 0                    | 0                     | $4,17 \cdot 10^{-3}$  | $8,3333 \cdot 10^{-3}$  |
| $a_5$                    | 0                    | $-1,5 \cdot 10^{-4}$  | $-3,75 \cdot 10^{-5}$ | $-1,6833 \cdot 10^{-3}$ |
| $a'_5$                   | 0                    | 0                     | 0                     | $-1,6667 \cdot 10^{-3}$ |
| $a_6$                    | $6,25 \cdot 10^{-7}$ | $6,31 \cdot 10^{-6}$  | $3,02 \cdot 10^{-5}$  | $2,18 \cdot 10^{-5}$    |
| $f$ (mm)                 | 50,13                | 33,18                 | 12,55                 | 6,672                   |
| $f'$ (mm)                | 50                   | 33,33                 | 12,40                 | 6,667                   |
| $\Delta f$ (mm)          | 0,13                 | -0,15                 | 0,15                  | 0,005                   |
| $\frac{\Delta f}{f}$ (%) | 0,26                 | -0,45                 | 1,2                   | 0,08                    |

Poutre de 1 mètre de long soumise :

- I. à un moment constant de 1 tonne-mètre,
- II. à une charge de 1 tonne en l'extrémité,
- III. à une charge uniformément répartie de 1 tonne,
- IV. à une charge de 1 tonne, répartie linéairement, nulle à l'extrémité libre.

Le tableau donne les valeurs des coefficients  $a$  de la théorie complète et des coefficients  $a'$  de la théorie des ingénieurs, les flèches en l'extrémité libre  $f$  et  $f'$  (des ingénieurs), la différence  $\Delta f$  et sa valeur relative  $\frac{\Delta f}{f}$ .

Ainsi que l'on pouvait s'y attendre (sinon la réalité aurait brutalement prouvé aux ingénieurs l'insuffisance de leurs hypothèses et de leurs calculs), les différences entre les deux théories sont petites, généralement inférieures à 1 %. Or, il est difficile de connaître les modules

d'élasticité avec cette précision. Ainsi la théorie des ingénieurs est satisfaisante. Elle l'est d'autant plus que dans le développement en série de puissances de la déformation  $y$ , les deux premiers coefficients sont correctement déterminés par la théorie simplifiée.

Dans toute théorie, il faut soigneusement distinguer les hypothèses de caractère physique faites pour simplifier un problème de celles qui sont ajoutées pour rendre moins pénible la solution des problèmes mathématiques ainsi posés. Les hypothèses de la résistance des matériaux, par exemple le fait de négliger les contractions et dilatations transversales, la continuité et l'homogénéité de la matière, sont des hypothèses de caractère physique. Mais le fait de négliger un terme parce qu'il gêne le développement mathématique est une sorte de défaite du mathématicien, chose que celui-ci n'aime pas, même si les corrections qu'il apporte sont pratiquement négligeables aux yeux du praticien.

## ECOLE POLYTECHNIQUE DE L'UNIVERSITÉ DE LAUSANNE

### Hommage au professeur A. Stucky à l'occasion du trentième anniversaire de son enseignement dans notre Ecole polytechnique

Les anciens élèves du professeur Alfred Stucky ont appris il y a quelques jours, par le « Bulletin n° 1 de l'A<sup>3</sup> E<sup>2</sup> P. L. », l'anniversaire de sa trentième année d'enseignement.

C'est en 1926 en effet que M. Landry, alors directeur de l'Ecole d'ingénieurs de Lausanne, qui s'y connaissait en hommes et avait pu apprécier les capacités techniques, le jugement rapide, l'audace réfléchie et la clarté d'esprit de M. Stucky, le fit appeler au poste de professeur extraordinaire d'hydrométrie et de travaux hydrauliques.

M. Stucky nous permettra de rappeler, à l'occasion de cet anniversaire, quelques traits de sa brillante carrière :

Né en 1892 à La Chaux-de-Fonds, M. Stucky fit ses études à l'Ecole polytechnique fédérale, dont il obtint le diplôme d'ingénieur civil en 1915, et le doctorat ès sciences techniques en 1921 par une thèse fort remar-

quée sur le calcul des barrages arqués. En 1915 déjà, à 23 ans, il fut chargé d'une mission scientifique au Portugal. Entré ensuite au bureau d'études Gruner de Bâle, il en devient bientôt l'associé et y élabore entre autres le projet de barrage de la Jogne, dont le type, à l'époque, constituait pour l'Europe une audacieuse nouveauté.

Dès sa nomination à notre Ecole, M. Stucky s'établit à Lausanne et va mener de front son enseignement et son propre bureau technique. Il est immédiatement appelé à collaborer à des travaux importants. D'emblée, il s'impose comme constructeur de barrages. Son activité, loin de se borner à la Suisse, s'étend rapidement dans tous les pays voisins et hors d'Europe, en Afrique du Nord, au Katanga, au Pérou, au Venezuela par exemple. Jusqu'à ce jour, il a participé à l'édification de trente-quatre barrages.

Dans chacune de ses entreprises, le professeur Stucky apporte sa note personnelle, innovant constamment, perfectionnant sans cesse les techniques de construction et les méthodes de calcul. Ses deux activités de professeur et d'ingénieur-conseil se développent parallèlement et s'enrichissent l'une l'autre : ses étudiants récoltent les fruits de ses expériences pratiques, tandis que ses collaborateurs bénéficient des études théoriques destinées à son enseignement.