

Zeitschrift: Bulletin technique de la Suisse romande

Band: 84 (1958)

Heft: 10

Artikel: Étude expérimentale de la répartition des tensions dans les plaques circulaires fléchies en fonction du rapport de l'épaisseur au diamètre

Autor: Favre, Henry / Schumann, Walter

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-63493>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 14.03.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

BULLETIN TECHNIQUE DE LA SUISSE ROMANDE

paraissant tous les 15 jours

ORGANE OFFICIEL

de la Société suisse des ingénieurs et des architectes
de la Société vaudoise des ingénieurs et des architectes (S.V.I.A.)
de la Section genevoise de la S.I.A.
de l'Association des anciens élèves de l'E.P.U.L. (Ecole polytechnique
de l'Université de Lausanne)
et des Groupes romands des anciens élèves de l'E.P.F. (Ecole
polytechnique fédérale de Zurich)

COMITÉ DE PATRONAGE

Président: J. Calame, ing. à Genève
Vice-président: † G. Epitoux, arch. à Lausanne

Membres:

Fribourg: H. Gicot, ing.; M. Waeber, arch.
Genève: Cl. Groscurin, arch.; E. Martin, arch.
Neuchâtel: J. Béguin, arch.; R. Guye, ing.
Valais: G. de Kalbermatten, ing.; D. Burgener, arch.
Vaud: A. Chevalley, ing.; A. Gardel, ing.; E. d'Okolski, arch.;
Ch. Thévenaz, arch.

CONSEIL D'ADMINISTRATION

de la Société anonyme du « Bulletin technique »
Président: A. Stucky, ing.
Membres: M. Bridel; R. Neeser, ing.; P. Waltenspuhl, arch.
Adresse: Ch. de Roseneck 6, Lausanne

RÉDACTION

D. Bonnard, ing.
Rédaction et Edition de la S. A. du « Bulletin technique »
Tirés à part, renseignements
Adresse: Case Chauderon 475, Lausanne

ABONNEMENTS

1 an	Suisse Fr. 26.—	Etranger. . . Fr. 30.—
Sociétaires	» » 22.—	» . . . » 27.—
Prix du numéro	» » 1.60	

Chèques postaux: « Bulletin technique de la Suisse romande »,
N° II. 57 75, Lausanne.

Adresser toutes communications concernant abonnement, changements
d'adresse, expédition, etc., à: Imprimerie La Concorde, Terreaux 29,
Lausanne

ANNONCES

Tarif des annonces:	
1/1 page	Fr. 275.—
1/2 »	» 140.—
1/4 »	» 70.—
1/8 »	» 35.—

Adresse: Annonces Suisses S. A.
Place Bel-Air 2. Tél. (021) 22 33 26. Lausanne et succursales

**SOMMAIRE**

Etude expérimentale de la répartition des tensions dans les plaques circulaires fléchies en fonction du rapport de l'épaisseur au diamètre, par Henry Favre, Dr ès sc. techn., et Walter Schumann, Dr ès sc. nat.

L'ACTUALITÉ AÉRONAUTIQUE VII

Divers: Association Suisse des Electriciens

Bibliographie — Les Congrès — Carnet des concours — Documentation générale — Service de placement

ÉTUDE EXPÉRIMENTALE DE LA RÉPARTITION DES TENSIONS DANS LES PLAQUES CIRCULAIRES FLÉCHIES EN FONCTION DU RAPPORT DE L'ÉPAISSEUR AU DIAMÈTRE

par

HENRY FAVRE
Dr ès sc. techn.
Professeur à l'E.P.F.

et

WALTER SCHUMANN
Dr ès sc. nat.
Assistant de recherches à l'E.P.F.

Introduction

Il est aujourd'hui possible de déterminer expérimentalement les *moments principaux* sollicitant des modèles de plaques minces fléchies. Le Laboratoire de photoélasticité de l'E.P.F. utilise dans ce but une méthode purement optique¹. Mais d'autres techniques sont également applicables, soit dans le cadre de la photoélasticité², soit en dehors de ce domaine, les mesures à l'aide de strain-gages par exemple.

Une fois les moments de flexion principaux M_1 , M_2 déterminés³, il est facile de calculer les tensions normales σ_1 , σ_2 relatives aux éléments de surface perpendiculaires aux trajectoires des moments, ainsi que les tensions tangentielles τ_1 , τ_2 agissant sur ces mêmes éléments et dirigées perpendiculairement aux faces de la plaque. Il suffit, pour cela, d'appliquer les formules bien connues:

$$\sigma_1 = \frac{12M_1}{h^3} \zeta, \quad \sigma_2 = \frac{12M_2}{h^3} \zeta, \quad \tau_1 = \frac{3Q_1}{2h} \left[1 - 4 \left(\frac{\zeta}{h} \right)^2 \right],$$

$$\tau_2 = \frac{3Q_2}{2h} \left[1 - 4 \left(\frac{\zeta}{h} \right)^2 \right], \quad (1)$$

où h désigne l'épaisseur de la plaque, ζ la distance du point considéré au feuillet moyen et Q_1 , Q_2 les efforts tranchants relatifs aux deux directions considérées. Ces efforts tranchants se déduisent des moments M_1 , M_2 par dérivation. On peut ensuite déduire des valeurs obtenues pour σ_1 , σ_2 , τ_1 , τ_2 les tensions relatives à des éléments de surface de directions quelconques.

¹ Voir [1] à [5]. Les chiffres entre crochets se rapportent à la bibliographie placée à la fin de cette étude.

² Voir par exemple [6] et [7].

³ Il s'agit ici de moments — et plus loin d'efforts tranchants — par unité de longueur.

Or les méthodes de mesure dont il a été question plus haut supposent essentiellement — comme les formules (1) — que les tensions σ_1 , σ_2 soient réparties linéairement dans l'épaisseur de la plaque, conformément à la théorie de Kirchhoff, qui admet en outre que les tensions normales σ_z , agissant sur des éléments de surface parallèles aux faces, soient partout nulles. On sait que ces conditions sont remplies si la plaque est très mince et si l'on excepte les zones voisines du contour ainsi que celles voisines des points d'application des forces (supposées toutes normales aux faces).

Mais quelle est l'étendue de ces zones, où la théorie de Kirchhoff n'est donc pas applicable? Comment y varient les tensions? Et surtout, quelle est l'influence de l'épaisseur de la plaque sur la répartition générale des tensions, lorsque le rapport de cette épaisseur aux autres dimensions ne peut plus être considéré comme petit? Il s'agit évidemment là d'un problème d'élasticité tridimensionnelle.

Telles sont les principales questions que nous nous sommes posées dans la présente étude, qui concerne uniquement le cas des plaques circulaires⁴. Nous avons tâché de les résoudre en mesurant les tensions dans différents modèles de plaques à l'aide de la méthode du figage des contraintes et en comparant les valeurs obtenues par cette méthode aux valeurs données par le calcul basé sur la théorie de Kirchhoff. Nous nous sommes limités au cas des plaques circulaires simplement posées le long du contour, au milieu desquelles est appliquée une force perpendiculaire aux faces et répartie sur une très petite surface (l'état de tension est alors symétrique par rapport à l'axe). La principale variable des essais a été le rapport de l'épaisseur au diamètre de la plaque.

Nous avons aussi cherché, dans cette étude, à comparer la répartition des tensions dans les plaques en question à celle des efforts dans les poutres correspondantes — c'est-à-dire dans des poutres de section rectangulaire ayant une portée et une hauteur respectivement égales au diamètre et à l'épaisseur de la plaque — et chargées par des forces analogues.

Après avoir exposé les principes de la méthode utilisée pour la détermination des tensions (§ 1), nous décrivons les appareils de mesure et les modèles (§§ 2 et 3), puis nous donnons les principaux résultats à l'aide de diagrammes (§ 4). Le § 5 est consacré à la discussion de ces résultats et le § 6 aux conclusions.

Les recherches décrites dans ce mémoire ont pu être entreprises grâce à une subvention du *Crédit pour les possibilités de travail*⁵. Notre exposé ne concerne qu'une partie des études faites à l'aide de cette subvention.

La *Société anonyme Ciba*, à Bâle, nous a livré gracieusement l'*Araldite B* avec laquelle ont été fabriqués les modèles des plaques et des poutres correspondantes et nous a donné d'utiles renseignements sur l'emploi de cette matière en photoélasticité. Nous prions cette société de bien vouloir trouver ici l'expression de notre vive reconnaissance.

⁴ Il serait intéressant d'essayer de résoudre les mêmes questions dans le cas beaucoup moins simple de la plaque rectangulaire.

⁵ Subvention n° 557.

§ 1. Principe de la méthode utilisée pour la détermination des tensions.

Dans l'état actuel de nos connaissances en photoélasticité tridimensionnelle, plusieurs méthodes peuvent être utilisées pour déterminer les tensions dans un corps de révolution, sollicité par des forces accusant la même symétrie, ce qui est le cas des plaques étudiées ici. Dans une étude préliminaire, nous avons appliqué successivement quatre de ces méthodes à la mesure des efforts dans un modèle de plaque circulaire et nous avons comparé les résultats, surtout au point de vue de leur exactitude. Nous sommes arrivés à la conclusion que, pour les plaques étudiées, une de ces méthodes est préférable aux trois autres, parce qu'elle est applicable sans difficulté avec une bonne approximation au domaine entier de la plaque, à l'exception du voisinage immédiat des points d'application des forces, où les tensions sont très grandes et varient trop rapidement d'un point à l'autre pour pouvoir être convenablement mesurées.

C'est cette méthode que nous avons adoptée pour la détermination des tensions dans les modèles de plaques. Voici en quoi elle consiste et comment nous l'avons appliquée.

Soient h et b l'épaisseur et le rayon de la plaque, a le rayon, légèrement inférieur à b , du cercle d'appui, P la force appliquée au centre d'une des faces. Cette force est répartie sur un petit cercle de rayon r_0 . Soit encore f la largeur de la surface d'appui, supposée très étroite ($\frac{f}{2} < b - a$). Introduisons le système d'axes indiqué dans la figure 1 et désignons les tensions correspondantes par σ_r , σ_z , σ_t et $\tau_{rz} = \tau_{zr}$ (t désigne la normale au plan méridien passant par le point considéré; τ_{zt} et τ_{rt} sont nulles, par raison de symétrie). Les quatre grandeurs σ_r , σ_z , σ_t et τ_{rz} sont les inconnues du problème.

Pour les déterminer dans chacun des modèles d'*Araldite* étudiés, nous avons d'abord figé les contraintes, en chauffant le modèle à 150°, en lui appliquant ensuite la force P , et en le laissant enfin lentement refroidir jusqu'à la température normale (20°)⁶. Cette opération terminée, nous avons découpé dans la plaque, en prenant de grandes précautions pour ne pas perturber la biréfringence, les lames à faces parallèles suivantes (fig. 2) :

1° Une lame méridienne principale, d'environ 3 mm d'épaisseur et s'étendant sur le diamètre entier $2b$ de la plaque. Cette lame, placée dans un large faisceau de lumière blanche parallèle, entre un polariseur et un analyseur croisés, donne les *isoclines* des directions principales 1, 2 relatives à l'état de tension bidimensionnel défini par σ_r , σ_z et τ_{rz} . Rappelons qu'une telle courbe est le lieu des points où l'angle α formé par une des directions principales, 2 par exemple, avec une direction fixe est constant. Comme direction fixe, nous avons choisi celle des r décroissants. Les isoclines relatives aux valeurs de α égales à 0°, 15°, 30°, ... ($\Delta\alpha = 15^\circ$) ont été successivement photographiées.

⁶ La méthode du figage des contraintes est décrite en détail dans de nombreuses publications et dans la plupart des traités récents de photoélasticité. Voir par exemple [8], t. II, p. 364 et [9], p. 924 et suiv.

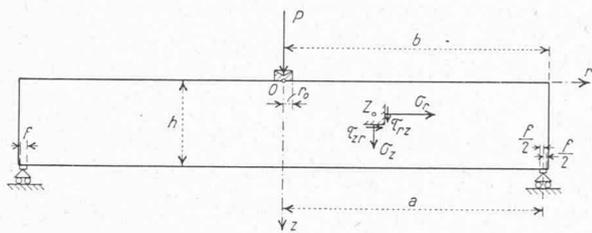


Fig. 1. — Coupe axiale d'une plaque circulaire, simplement appuyée le long du contour et supportant une force P appliquée au centre de la face supérieure.

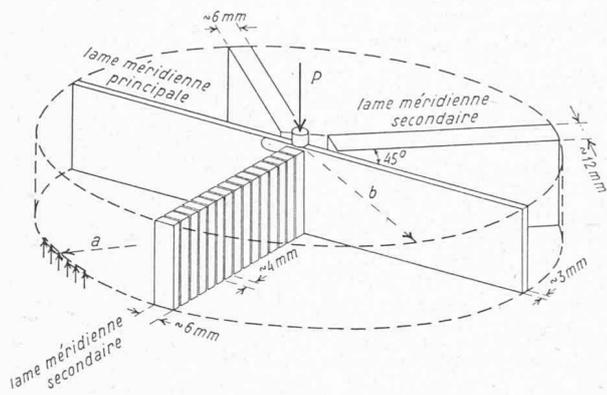


Fig. 2. — Vue perspective d'un modèle de plaque, montrant une lame méridienne principale et trois lames méridiennes secondaires, ainsi que les parallélépipèdes découpés dans l'une de ces dernières.

La partie gauche de la figure 3 est une photographie de la courbe $\alpha = 30^\circ$, la partie droite, une photographie de la courbe $\alpha = 120^\circ$ (la figure 3, ainsi que les figures 5 et 6a, b, c décrites plus loin, sont en réalité des reproductions à l'échelle 1 : 2 de photographies prises lors des essais).

En reportant les isoclines sur une même feuille de papier, il a été ensuite facile de construire graphiquement les trajectoires des tensions principales σ_1, σ_2 relatives au plan méridien (fig. 4).

La même lame méridienne principale, placée dans un large faisceau de lumière monochromatique parallèle, entre un polariseur et un analyseur circulaires, donne les isochromes de l'état de tension bidimensionnel considéré. Une telle courbe est le lieu des points où la variation relative de marche δ , des deux rayons polarisés émergeant de la lame, a la même valeur $k\lambda$, λ désignant la longueur d'onde de la lumière et k un nombre entier quelconque, positif, négatif ou nul. Ces courbes, que nous avons obtenues à l'aide de la lumière émise par la vapeur de sodium ($\lambda = 0,5893 \mu$) ont été photo-

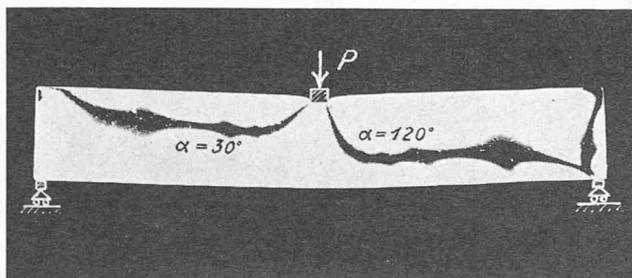


Fig. 3. — Modèle de plaque $h/2a = 1/6$. Photographie des isoclines $\alpha = 30^\circ$ (partie gauche) et $\alpha = 120^\circ$ (partie droite) d'une lame méridienne principale $e = 3,21$ mm, en lumière blanche.

graphiées (fig. 5) ou dessinées au crayon sur un papier transparent. Grâce à elles et en procédant par interpolation, on a pu déterminer δ en un point quelconque de la lame. Cette grandeur étant liée à la différence des tensions principales par la loi de Wertheim :

$$\delta = ce (\sigma_1 - \sigma_2), \quad (2)$$

où e désigne l'épaisseur de la lame et c une constante ⁷, on en a déduit la valeur de $\sigma_1 - \sigma_2$.

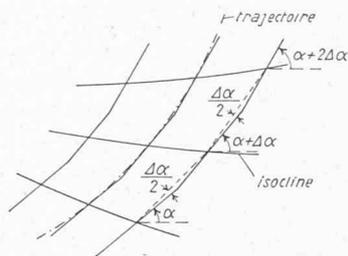


Fig. 4. Construction des trajectoires des tensions à partir des isoclines.

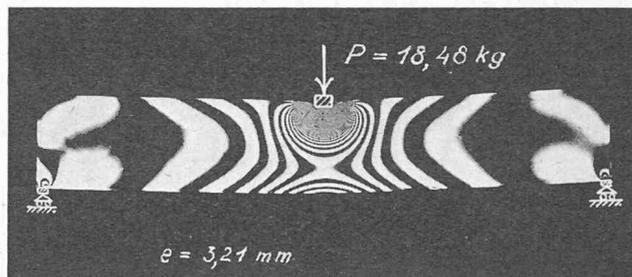


Fig. 5. — Modèle de plaque $h/2a = 1/6$. Photographie des isochromes d'une lame méridienne principale $e = 3,21$ mm, en lumière monochromatique $\lambda = 0,5893 \mu$.

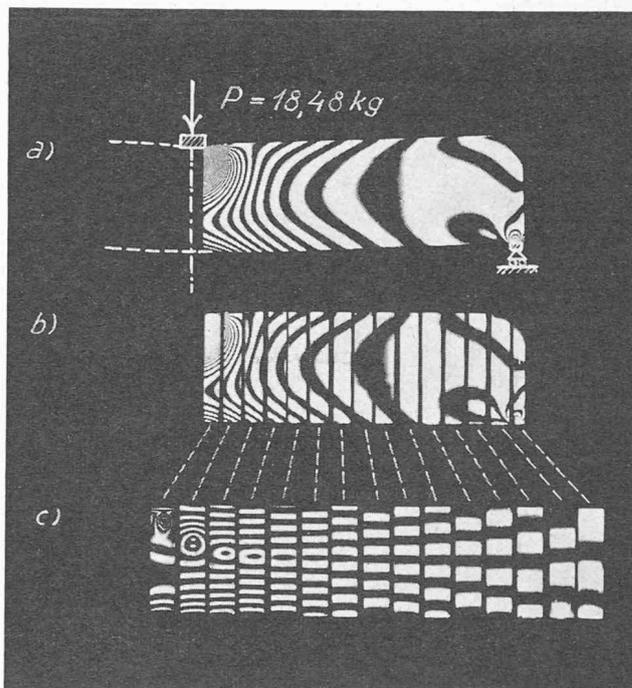


Fig. 6a, b, c. — Modèle de plaque $h/2a = 1/6$.

a) Photographie des isochromes d'une lame méridienne secondaire $e = 6,00$ mm, en lumière monochromatique $\lambda = 0,5893 \mu$.

b) Isochromes d'une lame secondaire identique à la précédente, mais découpée en parallélépipèdes de 4 mm d'épaisseur. Cette photographie montre que le découpage a très peu perturbé la biréfringence figée dans la lame.

c) Isochromes des mêmes parallélépipèdes, mais tournés de 90° autour de la verticale, de façon à ce que les rayons lumineux les traversent dans la direction radiale de la plaque.

Connaissant l'azimut α et la différence des tensions principales $\sigma_1 - \sigma_2$, on a pu alors déterminer τ_{rz} et la différence $\sigma_r - \sigma_z$, soit à l'aide de la construction graphique de Mohr, soit en utilisant des formules élémentaires connues.

Ainsi, cette lame méridienne principale nous a donné l'une des inconnues τ_{rz} et la différence de deux des autres $\sigma_r - \sigma_z$.

2° Nous avons ensuite découpé dans la plaque diverses lames méridiennes secondaires de 6 mm d'épaisseur et s'étendant seulement sur la longueur b du rayon⁸ (fig. 2 et 6 a). Ces lames ont été ensuite découpées perpendiculairement aux plans de leurs faces et parallèlement à l'axe z , en petits parallélépipèdes de 4 mm d'épaisseur, comme le montrent les figures 2 et 6 b. Ces parallélépipèdes, placés dans un large faisceau de lumière monochromatique parallèle ($\lambda = 0,5893 \mu$), entre un polariseur et un analyseur circulaires, donnent des isochromes (voir fig. 6 c, où les rayons lumineux traversent chaque parallélépipède suivant la direction définie par le rayon r passant par le centre de l'élément). De ces courbes, on a déduit la variation relative de marche δ' des deux rayons polarisés émergeant du parallélépipède considéré, en un point quelconque de sa hauteur h . Finalement, $\sigma_t - \sigma_z$ a été donné par l'équation :

$$\delta' = ce' (\sigma_t - \sigma_z), \quad (3)$$

e' désignant l'épaisseur (~ 4 mm) traversée par les rayons et c la constante déjà intervenue dans l'équation (2).

En résumé, les deux sortes de lames nous ont donné la tension τ_{rz} et les différences $\sigma_r - \sigma_z$ et $\sigma_t - \sigma_z$. Pour avoir les tensions σ_r , σ_z et σ_t elles-mêmes, pour « séparer » ces tensions, nous avons procédé par intégration graphique, en utilisant la remarquable méthode de MM. Frocht et Guernsey⁹. Cette méthode a consisté ici à utiliser l'équation obtenue en écrivant que la somme des projections sur l'axe z des forces agissant sur un élément de volume dr , dz , $rd\phi$ doit être nulle :

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0. \quad (4)$$

En intégrant le long d'une parallèle à l'axe z et en remarquant que $(\sigma_z)_{z=0} = 0$, on obtient :

$$\sigma_z = - \int_0^z \left(\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r} \right) dz,$$

ou bien, en procédant par différences finies :

$$\sigma_z = - \sum \left(\frac{\Delta \tau_{rz}}{\Delta r} + \frac{\tau_{rz}}{r} \right) \Delta z. \quad (5)$$

Ayant déterminé τ_{rz} comme nous l'avons dit plus haut, on a pu sans peine obtenir $\Delta \tau_{rz} / \Delta r$ le long de la ligne d'intégration. L'application de l'équation (5) a permis ensuite de calculer σ_z en un point quelconque de cette ligne¹⁰. Connaissant d'autre part les différences $\sigma_r - \sigma_z$ et $\sigma_t - \sigma_z$, on a finalement déduit σ_r de la première de ces différences, puis σ_t de la seconde.

Toutes les inconnues ont été ainsi déterminées.

Remarque I. Dans le cas des plaques étudiées, on doit avoir :

$$(\sigma_z)_{z=h} \equiv 0, \quad \int_{(F)} \sigma_z df = P, \quad 2\pi r \int_0^h \tau_{rz} dz = P. \quad (6)$$

La première de ces relations exprime que la tension normale σ_z doit être nulle en tout point de la face inférieure de la plaque, la seconde, que la somme des petites forces normales $\sigma_z df$ agissant dans une section horizontale F perpendiculaire à l'axe de la plaque doit être égale à la force appliquée P , et la troisième, que la somme des petites forces tangentielles $\tau_{rz} df$, agissant sur la surface d'un cylindre d'axe z et de rayon r , doit être égale à cette même force, si $r_0 < r < a - \frac{f}{2}$.

Les deux premières équations (6) nous ont permis de faire un contrôle des valeurs obtenues pour σ_z , la troisième, un contrôle des valeurs obtenues pour τ_{rz} . Cette dernière équation nous a permis en outre de déterminer la constante c , comme nous le verrons plus loin.

Remarque II. Pour déterminer les tensions dans les poutres simples correspondant aux plaques étudiées,

⁷ Cette constante dépend de la matière du modèle et de la longueur d'onde de la lumière utilisée. On la détermine en général en repérant les isochromes d'une éprouvette où les tensions sont connues, une pièce prismatique de section rectangulaire sollicitée à la flexion pure, par exemple. Dans notre cas, il a été possible d'utiliser le modèle lui-même pour déterminer c , comme nous le verrons plus loin.

⁸ Une de ces lames suffirait théoriquement. Nous en avons pris en général plusieurs, afin de pouvoir obtenir des résultats basés sur des moyennes (d'autres lames secondaires, de 12 mm d'épaisseur, ont été également utilisées, mais dans le même but que celui des lames principales, pour mesurer avec plus d'exactitude la quantité δ dans les parties de la plaque éloignées de l'axe).

⁹ Voir [10].

¹⁰ La condition d'équilibre (4) et le chemin d'intégration utilisés ici sont très favorables pour obtenir la tension σ_z dans notre cas, les quantités $\Delta \tau_{rz} / \Delta r$ et τ_{rz} / r pouvant être déterminées avec exactitude et les longueurs d'intégration étant faibles ($\leq h$).

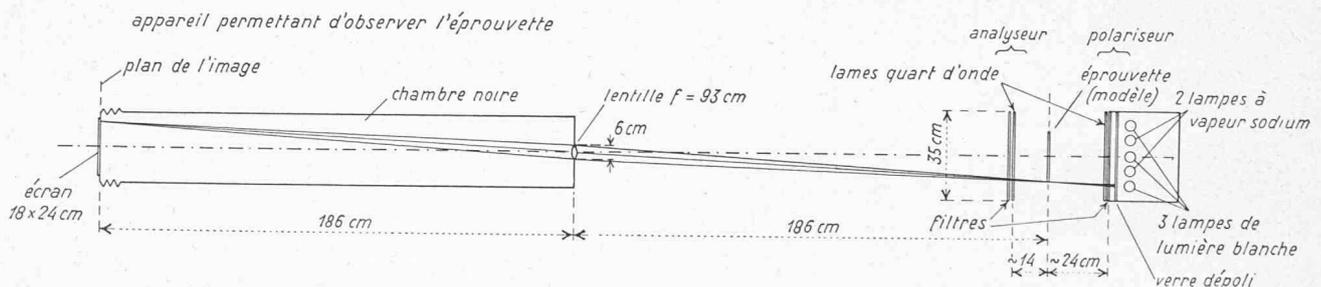


Fig. 7. — Schéma (vue en plan) des appareils, alignés sur le même banc optique, utilisés pour les essais (la lumière se propage de droite à gauche).

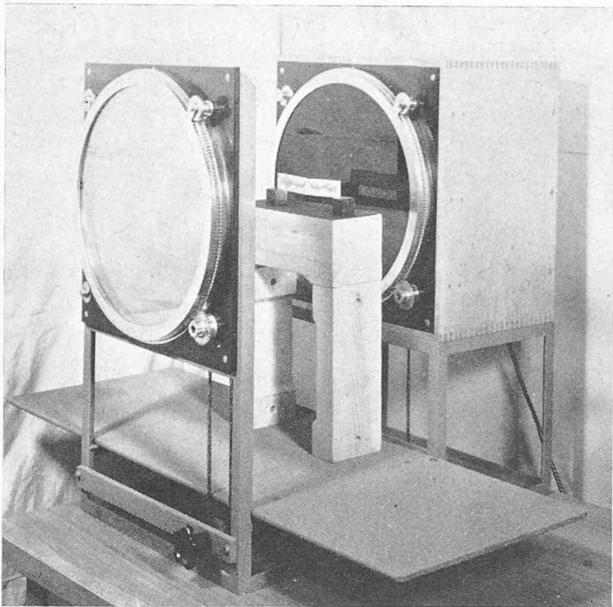
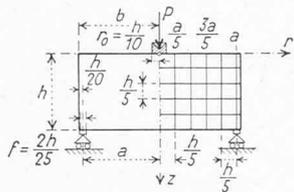
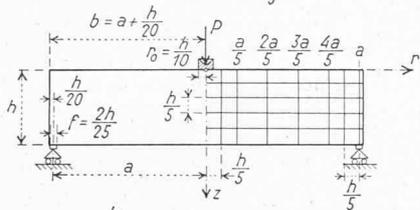


Fig. 8. — Vue d'une partie des appareils utilisés pour les essais (partie droite de la figure 7).

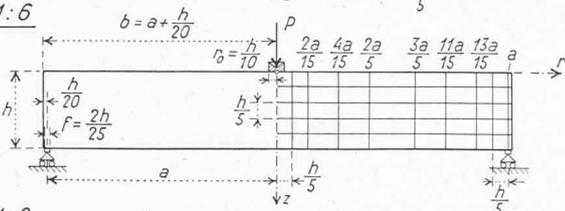
$h : 2a = 1 : 2$



$h : 2a = 1 : 4$



$h : 2a = 1 : 6$



$h : 2a = 1 : 8$

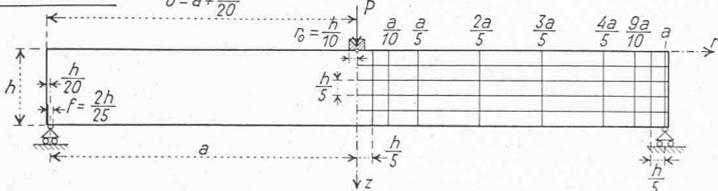


Fig. 9. — Coupe axiale des quatre modèles de plaques étudiés (respectivement vue des modèles des poutres correspondantes), précisant également les points où les tensions ont été déterminées.

nous avons également utilisé des modèles d'Araldite et procédé selon la même technique que pour les plaques. Il n'aurait pas été nécessaire ici de figer les contraintes, puisqu'il s'agit d'un problème d'élasticité bidimensionnelle. Nous avons cependant préféré le faire, pour nous placer exactement dans les mêmes conditions d'essais que pour les plaques.

Désignons par x, z les axes correspondant à r, z (comparer les figures 10 et 11, où la première représente

la coupe axiale d'une plaque et la seconde la vue de la poutre correspondante).

Les tensions à déterminer dans les modèles de poutre se réduisent à trois : σ_x, σ_z et τ_{xz} , car $\sigma_t = \tau_{zt} = \tau_{xt} = 0$. Il a suffi de mesurer α et δ pour l'épaisseur totale des modèles, à l'aide des isoclines et des isochromes, pour en déduire τ_{xz} et $\sigma_x - \sigma_z$, puis d'intégrer le long de parallèles à l'axe z l'équation $\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = 0$, analogue à (4), pour obtenir σ_z et séparer les tensions normales. Des équations analogues à (6) ont permis de faire le contrôle des valeurs obtenues et de déterminer la constance c .

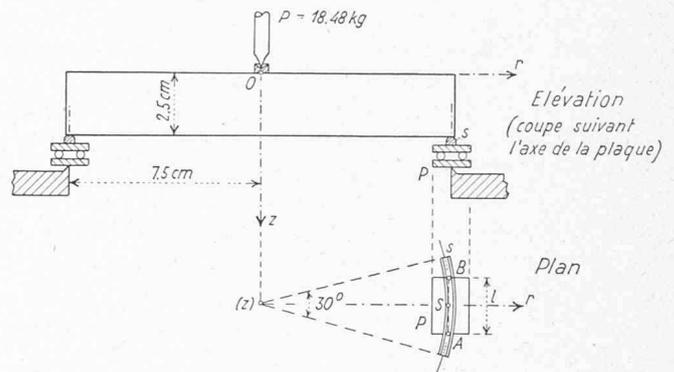


Fig. 10. — Appuis des modèles de plaques circulaires.

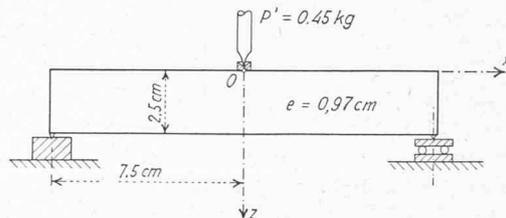


Fig. 11. — Appuis des modèles de poutres simples.

§ 2. Description des appareils de mesure.

Ces appareils sont alignés sur le même banc optique. La figure 7 en donne le schéma, la figure 8, une vue partielle. De droite à gauche, nous observons :

1° Une boîte contenant deux lampes de 80 watts, à vapeur de sodium, émettant une lumière sensiblement monochromatique, de longueur d'onde $\lambda \cong 0,5893 \mu$.

Cette boîte contient également trois lampes de 40 watts émettant de la lumière blanche. Un interrupteur permet d'allumer l'un ou l'autre de ces deux groupes de lampes. Cinq des six faces de cette boîte sont opaques. La sixième, celle qui regarde vers la gauche dans les figures 7 et 8, est par contre formée par un verre dépoli. Ce verre est traversé par une partie des rayons envoyés par les lampes et émet de la lumière diffuse.

2° Nous observons ensuite deux groupes de deux lames transparentes, entre lesquels est placée l'éprouvette ou la lame à étudier. Dans chaque groupe, une des lames est un filtre ne laissant passer que de la lumière polarisée rectilignement, l'autre lame est un quart d'onde. Chacune de ces lames n'a que 1 mm d'épaisseur environ.

11 On sait que le spectre de la lumière émise par la vapeur de sodium comprend les deux raies $\lambda_1 = 0,5896 \mu$ et $\lambda_2 = 0,5890 \mu$. Ces raies sont suffisamment voisines pour pouvoir être souvent confondues en une seule de longueur d'onde $\lambda = 0,5893 \mu$. Cette lumière permet d'observer convenablement des différences relatives de marche inférieures à 100λ environ, condition remplie dans nos essais.

Elle est placée entre deux glaces protectrices de 3 mm, de façon à former un agrégat ayant la forme d'un disque circulaire de 7 mm d'épaisseur et de 35 cm de diamètre. Les quatre disques sont placés dans des montures métalliques. Le diamètre du champ lumineux est de 34 cm.

Les axes optiques des deux lames ou disques de chaque groupe peuvent former un angle quelconque entre eux. Ces deux lames peuvent être fixées dans une monture commune et tourner ensemble autour de l'axe du système. *Si l'on place les lames quart d'onde en face l'une de l'autre*, de part et d'autre de l'éprouvette, et si l'axe de chacune d'elles forme avec l'axe du filtre le plus voisin un angle de 45° , on obtient, à droite, un polariseur circulaire et, à gauche, un analyseur circulaire. L'éprouvette est donc, dans ce cas, analysée à l'aide d'un faisceau de lumière polarisée circulairement. C'est ce schéma que l'on utilise pour déterminer les *isochromes*, en lumière monochromatique¹². Grâce à la polarisation circulaire, les *isoclines* sont éliminées (fig. 5).

Par contre, *si l'on place les filtres en face l'un de l'autre*, de part et d'autre de l'éprouvette, et si leurs axes optiques sont croisés à 90° , les lames quart d'onde n'ont aucune influence sur la polarisation de la lumière et l'on obtient, à droite, un polariseur rectiligne et à gauche, un analyseur rectiligne. L'éprouvette est alors analysée à l'aide d'un faisceau de lumière polarisée rectilignement. Pour faciliter les observations, on peut, dans ce cas, grâce à une transmission par chaînes et roues dentées, accoupler le polariseur et l'analyseur de façon à les faire tourner ensemble dans leurs plans respectifs, les deux axes optiques restant constamment croisés. C'est ce schéma que l'on utilise pour déterminer les *isoclines*, en lumière blanche¹³. La lecture de l'orientation des axes se fait à l'aide de deux échelles graduées, gravées sur les cercles des montures des deux lames les plus éloignées l'une de l'autre.

Les quatre lames étant interchangeable, il est possible de faire d'autres montages, ce qui permet, en particulier, de mesurer aussi les variations relatives de marche δ et δ' par la méthode des azimuts¹⁴.

³⁰ En regardant encore la figure 7, nous voyons finalement, à gauche, l'appareil permettant d'observer l'éprouvette. Il comprend une lentille achromatique de 6 cm de diamètre et de 93 cm de distance focale, une chambre noire de 186 cm de longueur et un écran rectangulaire, large de 24 cm et haut de 18 cm, où l'on peut placer soit un verre dépoli, soit une plaque sensible. Cet instrument est en somme un appareil photographique, où l'objectif est constitué par une simple lentille¹⁵. En plaçant l'appareil à 186 cm de l'éprouvette, mesurés à partir de la lentille, on peut observer ou

¹² Les isochromes que l'on obtient en lumière blanche sont très belles, parce que colorées, mais impropres à la détermination exacte des variations relatives de marche.

¹³ En lumière blanche, les isochromes viennent peu perturber les isoclines. En procédant par photographie, on peut d'ailleurs toujours s'arranger de façon à faire presque complètement disparaître les isochromes (fig. 3).

¹⁴ Voir par exemple [11], p. 59 et suiv.

¹⁵ Le fait d'utiliser une lentille plutôt qu'un objectif tel qu'on le conçoit actuellement en photographie entraîne certaines erreurs dans la formation de l'image. Ces erreurs sont cependant négligeables dans l'étude présentée ici, comme on peut le démontrer. Il en est de même de l'erreur de *parallaxe*, due au petit angle formé par les rayons avec la normale aux faces de l'éprouvette (voir [12]).

photographier l'objet à l'échelle 1:1, ce qui est commode pour le repérage des isoclines et des isochromes.

L'installation que nous venons de décrire a donné satisfaction. Les parties 1^o et 2^o ont été livrées par M. Schiltknecht, ingénieur à Zurich, à l'exception des lames quart d'onde de 7 mm, qui ont été fabriquées par M. Tiedemann, ingénieur à Munich.

§ 3. Description et préparation des modèles. Valeurs de la constante $-1/c$.

Quatre modèles de plaques circulaires et les modèles de poutres simples correspondantes ont été étudiés. Chaque plaque et la poutre correspondante étaient caractérisées, non par leurs dimensions absolues, mais par le rapport $h : 2a$ de l'épaisseur au diamètre du cercle d'appui (respectivement de la hauteur de la section à la portée). Les rapports $h : 2a$ avaient les valeurs suivantes : 1 : 2, 1 : 4, 1 : 6 et 1 : 8. Les sections axiales des plaques (respectivement les vues des poutres) sont représentées figure 9. Cette figure précise également la position et la grandeur des petites surfaces d'application des forces. Elle montre encore le réseau de lignes horizontales et verticales à l'intersection desquelles étaient les points où l'on a évalué les tensions. On remarquera qu'au voisinage des appuis et de l'axe de symétrie z les lignes verticales ont été choisies en fonction de h (tandis qu'elles l'ont été en fonction de a dans les zones intermédiaires), ceci afin de permettre une bonne comparaison des tensions au voisinage des forces appliquées.

Les dimensions absolues des huit modèles et les grandeurs des forces effectives appliquées P , P' sont données dans le tableau I ci-dessous :

TABLEAU I

Dimensions absolues des modèles de plaques circulaires et des poutres simples correspondantes, et grandeurs effectives des forces appliquées P , P'

Rapport $h : 2a$	Plaques circulaires			Poutres simples correspondantes			
	Epaisseur h	Diamètre $2a$	Force effect. P	Hauteur h	Portée $2a$	Epaisseur e	Force effect. P'
1 : 2	5	10	40,000	2,5	5	1,00	0,900
1 : 4	2,5	10	10,000	2,5	10	1,00	0,450
1 : 6	2,5	15	18,480	2,5	15	0,97	0,450
1 : 8	2,5	20	10,000	2,5	20	1,00	0,450

Tous ces modèles ont été fabriqués avec de l'*Araldite B*¹⁶. Cette matière a été préparée suivant les indications de la S.A. Ciba, puis coulée à la température de 130° dans des moules d'aluminium, dont toutes les dimensions étaient d'environ 5 mm supérieures à celles des modèles que l'on désirait obtenir. Les surfaces intérieures des moules étaient préalablement enduites d'huile de silicone. Après une période de durcissement (20 heures à 100° ou 14 heures à 120°), on a laissé chaque bloc se refroidir jusqu'à la température normale

¹⁶ Pour la poutre simple 1 : 8, on a également utilisé un modèle de verre optique, en choisissant $h = 1,81$ cm, $2a = 14,48$ cm, $e = 0,941$ cm, $P' = 28$ kg et en mesurant les tensions à l'aide de la méthode purement optique.

(20°), puis on l'a travaillé à froid, en utilisant la scie à ruban et la fraise, avec de grandes précautions pour éviter des échauffements locaux, jusqu'à ce que ses dimensions correspondent à celles de l'objet désiré.

Les appuis des modèles de plaques sont précisés dans la figure 10, ceux des modèles de poutres dans la figure 11. Une plaque reposait sur douze segments métalliques circulaires s , indépendants les uns des autres. Chacun de ces segments était solidaire d'une plaque rectangulaire d'aluminium de longueur l , reposant, par l'intermédiaire de deux cylindres, sur une autre plaque d'acier, de dimensions identiques à celles de la première. Cette plaque inférieure reposait elle-même sur le couteau d'un cercle d'appui fixe. Par suite de la déformation de l'Araldite due à la mise en charge du modèle, les plaques d'acier inférieures s'inclinaient très légèrement vers l'axe des z et ne reposaient plus qu'en deux points A, B sur le couteau du cercle d'appui. On a remédié à cet inconvénient en choisissant la longueur l telle que le milieu S du segment AB coïncide avec le centre de gravité de l'arc défini par le segment s : les réactions ont pu ainsi se répartir uniformément le long de cet arc. Les contrôles effectués sur les valeurs obtenues pour les tensions ont confirmé ce fait.

Les appuis des modèles de poutres ne donnent lieu à aucune remarque particulière.

Pour appliquer les forces P, P' , on a utilisé un levier et des poids métalliques. Levier et poids étaient placés en dehors du thermostat à température réglable où l'on enfermait le modèle pour les opérations du figeage des contraintes, de sorte que le modèle pouvait être chargé ou déchargé à volonté de l'extérieur (fig. 12).

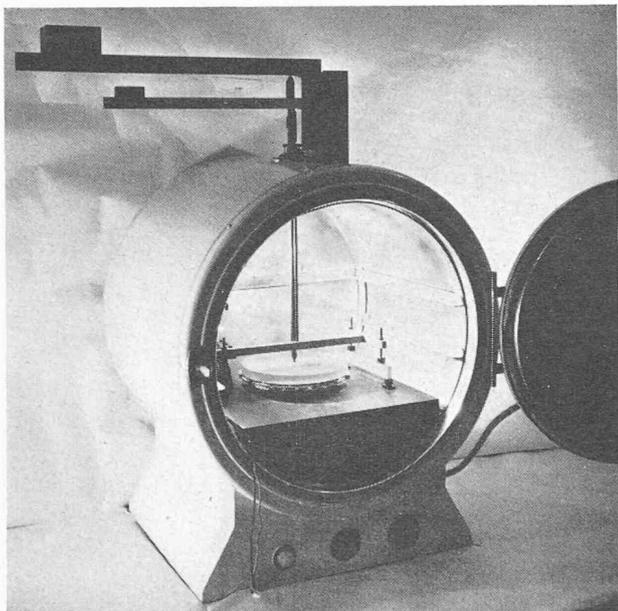


Fig. 12. — Vue d'un modèle de plaque et de l'appareil permettant de lui appliquer une force P au centre de la face supérieure. Le tout est placé dans le thermostat.

Donnons encore quelques précisions sur la technique du figeage des contraintes. Après avoir été préparé comme nous l'avons dit plus haut, chaque modèle a été chauffé jusqu'à 150°, dans le thermostat, puis refroidi lentement. Cette opération a permis d'éliminer les

tensions latentes (tolérance : $1/10$ de frange par centimètre d'épaisseur traversé par les rayons lumineux). Le modèle a été ensuite posé sur ses appuis et préparé à être chargé, puis chauffé à nouveau jusqu'à 150°. Après avoir attendu un certain temps pour être sûr que toutes ses parties soient à une température uniforme, on lui a appliqué la force P (ou P'), puis on a abaissé lentement la température t à raison de 5° par heure dans les domaines $150^\circ > t > 120^\circ$ et $80^\circ > t > 20^\circ$, et plus lentement encore, à raison de 2,5° par heure, dans le domaine instable $120^\circ > t > 80^\circ$ ¹⁷.

Pendant la nuit, la température était laissée constante et l'abaissement était continué le lendemain.

Les lames méridiennes principales et secondaires ont été d'abord découpées à la scie à ruban, puis travaillées à la fraise et finalement polies et huilées à la main. Toutes ces opérations ont été faites à la main pour la préparation des petits parallélépipèdes, à partir des lames secondaires.

Nous avons déterminé la constante c de l'Araldite à l'aide des modèles mêmes. Voici comment. Prenons d'abord le cas des plaques. Considérons les équations :

$$\delta = ce (\sigma_1 - \sigma_2), \quad (2) \quad 2\pi r \int_0^h \tau_{rz} dz = P,$$

$$\text{et } \tau_{rz} = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha$$

(la seconde est l'une des formules (6) et la troisième est une équation connue d'élasticité plane). On en déduit par substitution :

$$-\frac{\pi r}{ce} \int_0^h \delta \sin 2\alpha dz = P, \quad \text{d'où } -\frac{1}{c} = \frac{Pe}{\pi r \int_0^h \delta \sin 2\alpha dz} \quad (7)$$

Pour obtenir la constante $-\frac{1}{c}$ — que pour de simples raisons pratiques nous avons préféré utiliser plutôt que la constante c elle-même — il a donc suffi de prendre les valeurs de α et δ mesurées comme nous l'avons exposé dans le § 1, de calculer par différences finies l'intégrale figurant dans la formule (7) et d'appliquer cette formule.

Nous avons obtenu de la même façon les valeurs de $-\frac{1}{c}$ pour les modèles de poutres, en utilisant la formule suivante, analogue à (7) :

$$-\frac{1}{c} = \frac{P'}{\int_0^h \delta \sin 2\alpha dz} \quad (7')$$

Le tableau II ci-dessous donne, pour chaque modèle, la moyenne des valeurs obtenues pour $-\frac{1}{c}$ le long de trois ou quatre parallèles à z :

¹⁷ La température ne variait pas, dans chaque domaine, selon une fonction linéaire du temps, le thermostat ne permettant de régler t que de 5° en 5°. Toutefois, comme il s'écoulait deux heures après chaque réglage avant que la température se stabilise, on peut admettre que cette fonction était quasi linéaire.

TABLEAU II

Valeurs de la constante $-\frac{1}{c}$ pour les modèles d'Araldite

Rapport $h : 2a$	Plaques circulaires	Poutres simples correspondantes
	$\text{kg}\lambda^{-1} \text{ cm}^{-1}$	$\text{kg}\lambda^{-1} \text{ cm}^{-1}$
1 : 2	0,2615	0,2708
1 : 4	0,2665	0,2820
1 : 6	0,2545	0,2443
1 : 8	0,2485	18

Remarque : Dans tous les essais, les valeurs obtenues pour les tensions étaient affectées d'une erreur due au poids propre du modèle. On a chaque fois éliminé cette erreur en retranchant des valeurs mesurées les tensions correspondantes dues au poids propre, calculées d'après la théorie de Kirchhoff.

§ 4. Résultats des mesures et exactitude des valeurs obtenues.

Tous les résultats ont été résumés dans deux groupes de figures : le premier comprend les trajectoires des tensions principales σ_1, σ_2 , le second les diagrammes des tensions $\sigma_r, \sigma_z, \sigma_t, \tau_{rz}$ (plaques) et $\sigma_x, \sigma_z, \tau_{xz}$ (poutres), le long des parallèles à l'axe z définies dans la figure 9.

Les figures 13 a à 13 d et 14 a à 14 d, qui sont placées au verso d'une même page, les premières à gauche, les secondes à droite, concernent respectivement les plaques 1 : 2 et 1 : 4. Les figures 15 a à 15 c et 16 a à 16 c, qui sont mises dans la page d'en face, se rapportent aux deux poutres correspondantes. Une disposition analogue a été adoptée dans les deux pages suivantes, où sont représentés, dans la première, les résultats relatifs à la plaque 1 : 8 (fig. 17 a à 17 d) et dans la seconde, en face, ceux relatifs à la poutre correspondante (fig. 18 a à 18 c). En haut de chaque page figurent les trajectoires des tensions principales, en dessous, les diagrammes des tensions. Ces diagrammes ont été dessinés à l'aide de lignes continues, interrompues par de petits cercles ou de petites croix représentant les valeurs mesurées.

On peut ainsi comparer aisément les résultats relatifs à chaque plaque et à la poutre correspondante, dans les cas où $h/2a = 1 : 2, 1 : 4$ et $1 : 8$. Nous n'avons pas jugé utile de reproduire les résultats concernant les cas où $h/2a = 1 : 6$, ces résultats s'étant révélés moins caractéristiques que les autres. Il va de soi que nous en avons cependant tenu compte dans les conclusions.

Les valeurs des tensions $\sigma_r, \sigma_z, \sigma_t$ et τ_{rz} figurant dans les diagrammes concernant les plaques ont été reportées en choisissant P/h^2 comme unité. Le choix de cette unité présente l'avantage de donner, pour chacune des tensions σ_r, σ_t calculées à l'aide de la théorie de Kirchhoff, des valeurs indépendantes de la plaque considérée. Ces valeurs ne dépendent en effet que des rapports r/a et z/h , si nous supposons la surface de répartition de la

¹⁸ La valeur de $-\frac{1}{c}$ relative à la poutre 1/8 manque, les tensions ayant été mesurées pour cette poutre à l'aide d'un modèle de verre (voir note 16), en utilisant la méthode purement optique. Les constantes de ce modèle, déterminées à l'aide d'une éprouvette sollicitée à la compression pure, avaient les valeurs $a = 0,0360, b = 0,0850, c = -0,0490 \lambda/\text{kg mm}^{-1}$.

force P très petite, c'est-à-dire $r_0 \cong 0$, comme le montrent les deux premières formules (8) données plus loin.

Pour dessiner les diagrammes des tensions σ_x, σ_z et τ_{xz} relatives aux poutres, on a supposé qu'une force $P' = \frac{Pe}{\pi a}$ agissait au milieu de la portée, P désignant toujours la force appliquée au centre d'une des faces de la plaque correspondante. Ceci présente l'avantage suivant : dans les deux objets, les réactions des appuis par unité de longueur ont la même valeur, de sorte que, si l'on prend également P/h^2 comme unité pour représenter les tensions de la poutre, les valeurs des tensions tangentielles τ_{rz} (plaque) et τ_{xz} (poutre correspondante) seront les mêmes en deux points homologues au voisinage des appuis, si on calcule ces tensions en les supposant réparties paraboliquement le long d'une parallèle à l'axe z ¹⁹.

Il serait d'autre part facile de montrer que, dans les conditions admises, les tensions normales σ_r (plaque) et σ_x (poutre) ont des valeurs égales en deux points homologues de la verticale $\frac{r}{a} = 0,53$, si l'on calcule ces tensions en les supposant réparties linéairement le long d'une parallèle à l'axe z ¹⁹ et si l'on pose $v = 0,48$ (Araldite)²⁰.

Ce sont là les deux points de comparaison quantitatifs des diagrammes relatifs aux plaques et aux poutres correspondantes. Les autres points de comparaison ne peuvent être, par la nature même du problème, que qualitatifs.

Il est difficile d'estimer le degré d'exactitude des trajectoires dessinées et celui des valeurs indiquées pour les tensions dans les diagrammes. En nous basant cependant sur les contrôles qu'ont permis de faire les formules (6) (plaques) et les formules analogues relatives aux poutres, ainsi que sur les fluctuations des valeurs mesurées, nous pensons que les trajectoires donnent en général les valeurs de l'azimut α à 1° près, et les diagrammes les valeurs des tensions à 3 % près, en définissant cette erreur relative comme le quotient de l'erreur absolue par la valeur de $(\sigma_r)_{\max}$ (respectivement $(\sigma_x)_{\max}$) pour $r/a = 0,5$. Au voisinage des points d'application des forces, les erreurs peuvent même dépasser ces valeurs. C'est la raison pour laquelle certains diagrammes estimés trop peu précis, n'ont pas été dessinés.

§ 5. Discussion des résultats. Leur comparaison aux valeurs calculées.

Considérons tout d'abord le cas de la plaque très épaisse 1 : 2. La figure 13 a montre que les trajectoires des tensions principales sont en général des lignes régulières ; il y a cependant un point singulier répulsif S_r et deux points attractifs S_a . Mais ces lignes ne présentent aucune symétrie, à part celle relative à l'axe des z . D'autre part, les diagrammes des tensions $\sigma_r, \sigma_z, \tau_{rz}, \sigma_t$ varient considérablement d'une verticale à l'autre, et

¹⁹ Ce qui revient à appliquer la théorie de Kirchhoff à la plaque et celle de Navier à la poutre.

²⁰ Le mode de représentation adopté pour les poutres présente en outre l'avantage que les valeurs de σ_x , calculées par la théorie de Navier dans une section déterminée $x/a = \text{const.}$, sont indépendantes de la poutre considérée, ce qui est également le cas pour les plaques, comme nous l'avons vu.

ne semblent pas suivre des lois simples (fig. 13 b, c, d).

Si nous considérons maintenant la plaque moins épaisse 1 : 4, nous constatons qu'il y existe un domaine $0,55a < r < 0,7a$ jouissant approximativement des quatre propriétés suivantes :

1° les trajectoires des tensions sont symétriques deux à deux par rapport à la droite horizontale $z = \frac{h}{2}$, équidistante des faces (fig. 14 a) ²¹ ;

2° les tensions normales σ_r et σ_t varient linéairement en fonction de z le long d'une verticale et sont nulles dans le plan $z = \frac{h}{2}$ (fig. 14 b et d) ;

3° le diagramme des tensions tangentielles τ_{rz} le long d'une verticale est une parabole (fig. 14 c) ;

4° les tensions normales σ_z sont identiquement nulles (fig. 14 c).

Nous désignerons dorénavant par *I* tout domaine ou zone jouissant de ces quatre propriétés. Nous dirons plus loin sur quel critère nous nous sommes basés pour définir pratiquement ses limites. Pour l'instant, constatons que, dans le cas de la plaque 1 : 4, cette zone est très étroite ($0,15 a = 0,3 h$).

Les deux domaines restants de la plaque, qui ne possèdent pas ces quatre propriétés, seront désignés respectivement par *II* (voisinage de la surface de répartition de la force *P*) et *III* (voisinage des réactions des appuis). Ce sont les domaines où les tensions sont sous l'influence directe des forces appliquées. Ils existent également dans le cas de la plaque 1 : 2, où la zone *I* est absente. La limite des zones *II* et *III* n'est alors pas définie.

Considérons enfin la plaque beaucoup moins épaisse 1 : 8 (fig. 17 a à d). On y retrouve les trois domaines ou zones que nous venons de définir. Mais si les zones *II* et *III* sont légèrement moins étendues que dans le cas précédent, le domaine *I* ($0,25 a < r < 0,89 a$) a par contre considérablement augmenté ($0,64 a$ au lieu de $0,15 a$).

Il est intéressant de constater qu'il y a une ressemblance frappante entre les trajectoires des tensions dans les zones *II* des trois plaques 1 : 2, 1 : 4 et 1 : 8. La même remarque est applicable aux trajectoires des zones *III* voisines des appuis. On constate également que la répartition des valeurs des tensions ne change pas énormément d'une plaque à l'autre, dans la zone *II* voisine du centre. Cela montre que, dans cette dernière zone, les tensions dépendent avant tout de la singularité créée par la force quasi concentrée *P*. Elles dépendent donc surtout de la grandeur de cette force, du diamètre $2r_0$ de sa petite surface circulaire de répartition et de l'épaisseur *h* de la plaque. Par contre, elles dépendent peu du diamètre $2a$. Cette constance de la répartition des tensions au voisinage du centre explique l'invariance des trajectoires dans la même zone. Quant à l'invariance des trajectoires au voisinage des appuis, elle provient du fait que les rapports des tensions σ_r , σ_z , τ_{rz} entre elles sont, en tout point de cette zone, sensiblement indépendants du rapport $h : 2a$, comme le montrent les diagrammes.

Revenons à la zone *I*. Les quatre conditions la définissant sont précisément celles qui sont requises pour

²¹ Cet axe de symétrie, lorsqu'il existe, n'a pas été indiqué dans les figures, pour ne pas gêner la vue des trajectoires. Mais le lecteur le situera facilement.

l'application de la théorie de Kirchhoff. Dès lors, en calculant σ_r , σ_t et τ_{rz} d'après cette théorie, c'est-à-dire d'après les formules ²² :

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{3P}{\pi h^3} \left(z - \frac{h}{2} \right) \left[(1 + \nu) \log \frac{r}{a} + \right. \\ &\quad \left. + (1 - \nu) \frac{r_0^2}{4} \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{r^2} \right) \right], \\ \sigma_t &= -\frac{3P}{\pi h^3} \left(z - \frac{h}{2} \right) \left[(1 + \nu) \log \frac{r}{a} + \right. \\ &\quad \left. + (1 - \nu) \frac{r_0^2}{4} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{r^2} \right) + \nu - 1 \right], \\ \tau_{rz} &= \frac{3P}{4\pi hr} \left[1 - 4 \left(\frac{z}{h} - \frac{1}{2} \right)^2 \right], \end{aligned} \right\} (8)$$

il faut s'attendre à ce que, dans la zone en question, les valeurs obtenues coïncident avec celles données par l'expérience. Les diagrammes à traits interrompus des figures 14 b, c, d, et 17 b, c, d, qui représentent les résultats des calculs pour $\nu = 0,48$ (Araldite), montrent que c'est bien le cas, de sorte qu'on peut aussi définir cette zone comme étant celle où la théorie de Kirchhoff est applicable.

Pour permettre de déterminer sans ambiguïté dans chaque cas les limites du domaine *I* — et conséquemment celles des domaines *II* et *III* — nous avons en définitive adopté la définition pratique suivante : la zone *I* est celle où les différences entre les tensions mesurées et celles calculées par la théorie de Kirchhoff sont inférieures à $0,048 P/h^2$, ce qui correspond à 10 % de la valeur de $(\sigma_r)_{\max}$ pour $r/a = 0,5$.

Ce sont les limites obtenues sur la base de cette définition qui ont été indiquées dans toutes les figures ²³.

Ces diverses limites sont reproduites dans la figure 19, où l'on a également indiqué celles relatives à la plaque 1 : 6. La comparaison des quatre cas étudiés montre que les dimensions de chacune des zones *II* et *III* sont respectivement les mêmes pour les deux plaques les moins épaisses 1 : 6 et 1 : 8, ce qui permet d'affirmer que les étendues des domaines *II* et *III* des plaques deviennent indépendantes de la valeur du rapport $h : 2a$ dès que ce rapport est égal ou inférieur à 1 : 6. Elles prennent respectivement les valeurs constantes $1,0 h$ et $0,45 h$.

Les diagrammes montrent que c'est dans la zone *II*, voisine du centre de la plaque, que se produisent les plus grandes tensions, dont dépend la rupture éventuelle de la matière. Immédiatement en dessous de la petite surface de répartition de la force *P* existe une zone fortement comprimée, où il n'a malheureusement pas été possible de mesurer les tensions, celles-ci y variant beaucoup trop rapidement d'un point à l'autre.

²² Pour les deux premières formules (8), voir [13], p. 72. La troisième relation se déduit de la condition d'équilibre d'un cylindre d'axe z et de rayon r , en supposant les tensions tangentielles τ_{rz} réparties paraboliquement dans l'épaisseur de la plaque. Les trois formules (8) supposent $r_0 < r < a - \frac{h}{2}$.

²³ Nous admettons implicitement que ces limites sont des segments de droite parallèles à l'axe des z . Il s'agit là d'une approximation, suffisante pour les applications. Une étude plus précise montrerait probablement que ces limites sont des lignes courbes. D'autre part, les limites indiquées dans les figures ont été obtenues en supposant $\nu = 0,48$ (Araldite à une température élevée). On peut cependant admettre que les limites en question sont pratiquement indépendantes de la valeur de ce coefficient, donc de la matière choisie pour la plaque.

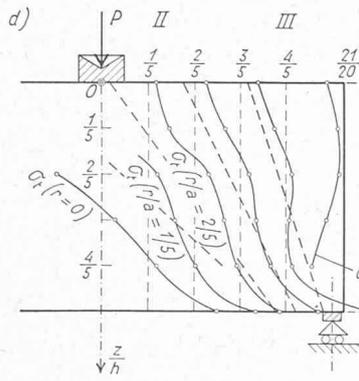
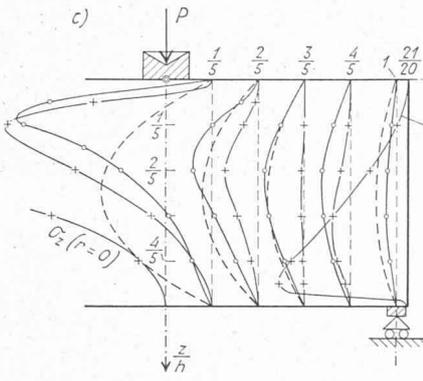
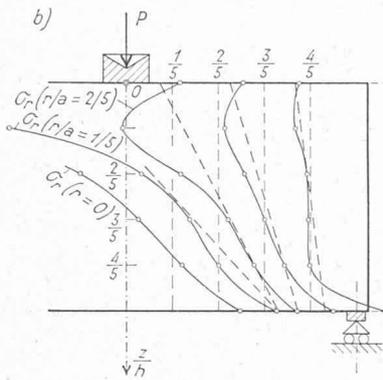
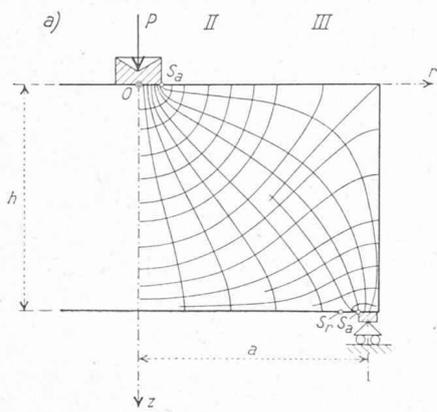


Fig. 13 a, b, c, d. — Modèle de plaque $h/2a = 1/2$.
 a) Trajectoires des tensions principales
 b), c), d) Diagrammes des tensions σ_r , σ_z , τ_{rz} et σ_t .

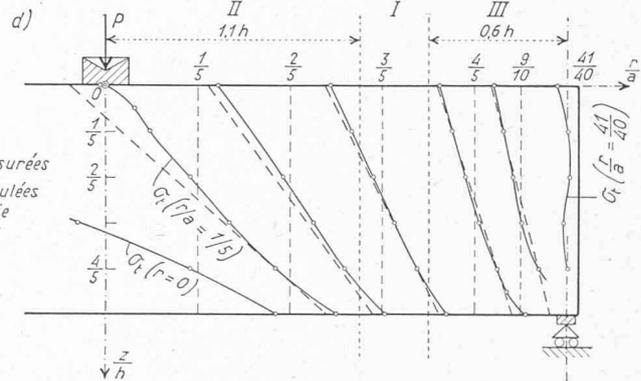
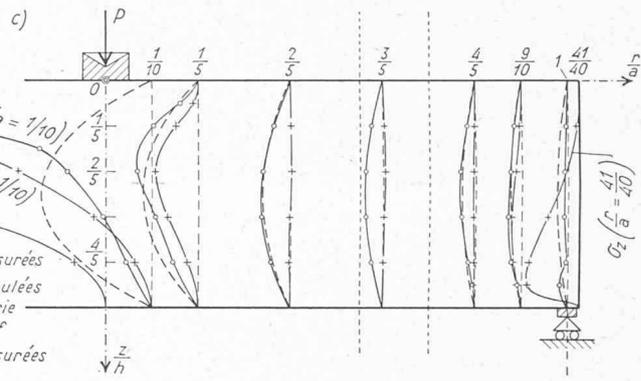
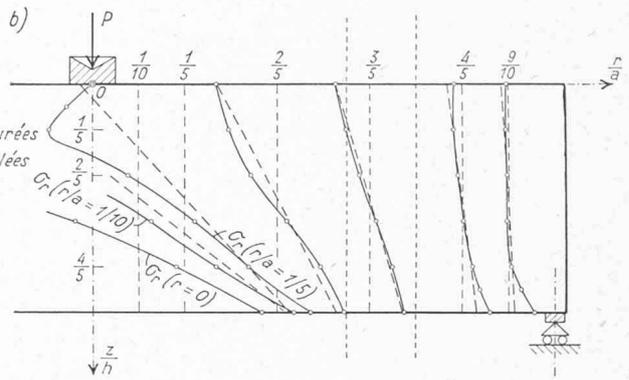
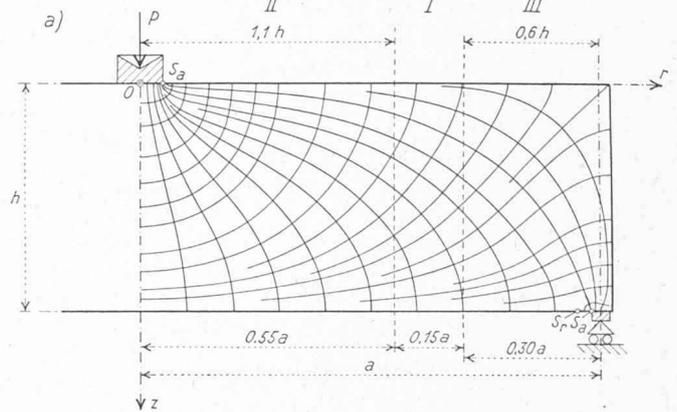


Fig. 14 a, b, c, d. — Modèle de plaque $h/2a = 1/4$.
 a) Trajectoires des tensions principales
 b), c), d) Diagrammes des tensions σ_r , σ_z , τ_{rz} et σ_t .

Cette petite zone est cependant en général moins dangereuse pour les risques de rupture que le point d'intersection de l'axe z avec la face inférieure de la plaque, où se produit la plus grande traction σ_{\max} ²⁴.

La théorie de Kirchhoff donne pour cette traction une valeur beaucoup trop grande, comme il est possible de le vérifier en appliquant une formule analogue

à la première des formules (8), mais valable dans le domaine $0 < r < r_0$. Par contre, comme nous allons le voir, une théorie plus poussée, celle de Woinowsky-Krieger, permet de calculer σ_{\max} assez exactement, à l'aide de la formule²⁴ :

²⁴ Voir par exemple [13], p. 76 et suiv.

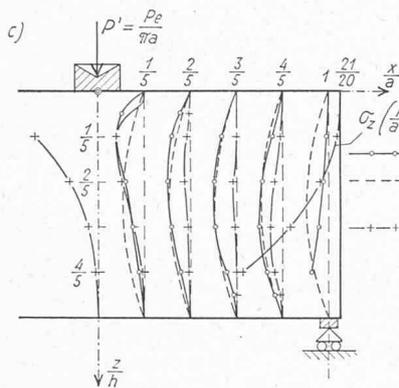
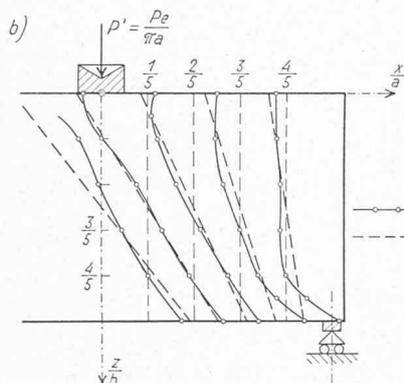
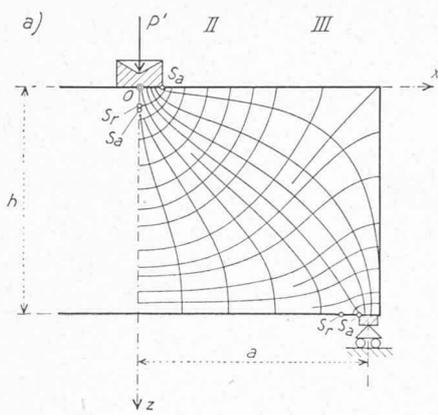


Fig. 15 a, b, c. — Modèle de poutre simple $h/2a = 1/2$.

a) Trajectoires des tensions principales
b), c) Diagrammes des tensions σ_x , σ_z et τ_{xz} .

$$\sigma_{\max} = (\sigma_r)_{r=0} = (\sigma_t)_{r=0} =$$

$$\left[(1 + \nu) \left(0,485 \log \frac{a}{h} + 0,52 \right) + 0,48 \right] \frac{P}{h^2} \quad (9)$$

La figure 21 est une représentation graphique des valeurs données par cette formule, pour $\nu = 0,48$ (Araldite) en fonction du rapport $h : 2a$.

Les cinq points isolés représentent, dans la même figure, les valeurs mesurées sur les quatre modèles de plaques $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$ et $\frac{1}{8}$, ainsi que sur un modèle complémentaire $\frac{h}{2a} = \frac{1}{12}$, où l'on s'est contenté de mesurer σ_{\max} . On voit qu'aux fluctuations près, dues probablement à l'inexactitude des mesures, nos expériences confirment bien la formule (9) dans le domaine $\frac{1}{12} \leq \frac{h}{2a} \leq \frac{1}{2}$.

Cette formule peut donc être utilisée pour le choix des dimensions des plaques circulaires simplement posées le

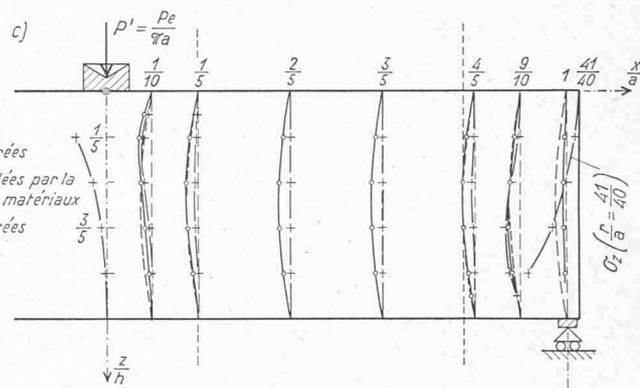
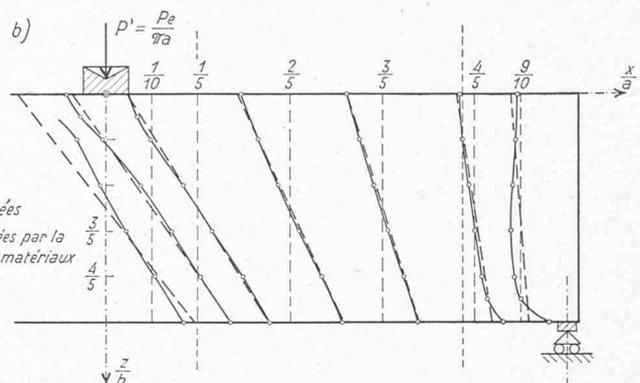
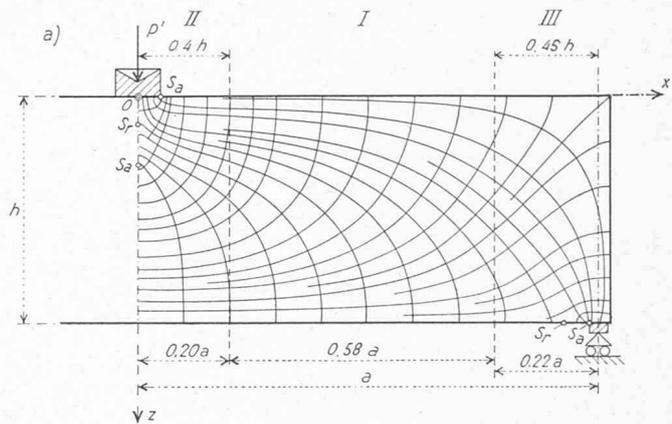


Fig. 16 a, b, c. — Modèle de poutre simple $h/2a = 1/4$.

a) Trajectoires des tensions principales
b), c) Diagrammes des tensions σ_x , σ_z et τ_{xz} .

long du contour et supportant une force appliquée au centre, lorsque $\frac{1}{12} \leq \frac{h}{2a} \leq \frac{1}{2}$ ²⁵. Il est d'ailleurs possible que cette formule soit encore applicable à des plaques où le rapport $\frac{h}{2a}$ est inférieur à 1/12 ou supérieur à 1/2.

Considérons maintenant les résultats obtenus pour les poutres simples correspondantes. L'étude comparative de figures 15 a, b, c, 16 a, b, c et 18 a, b, c permet de formuler diverses conclusions analogues à celles relatives aux plaques. On peut en particulier définir une zone I — et conséquemment des zones II et III — en se basant sur les quatre propriétés énoncées plus haut, en y remplaçant simplement σ_r par σ_x , τ_{rz} par

²⁵ D'autres théories, également plus poussées que celle de Kirchhoff, permettent aujourd'hui de calculer la traction maximum σ_{\max} au centre de la face inférieure de la plaque. En comparant les valeurs qu'elles donnent aux résultats de nos expériences, nous n'avons pas cependant obtenu une aussi bonne coïncidence qu'avec les valeurs données par la formule (9).

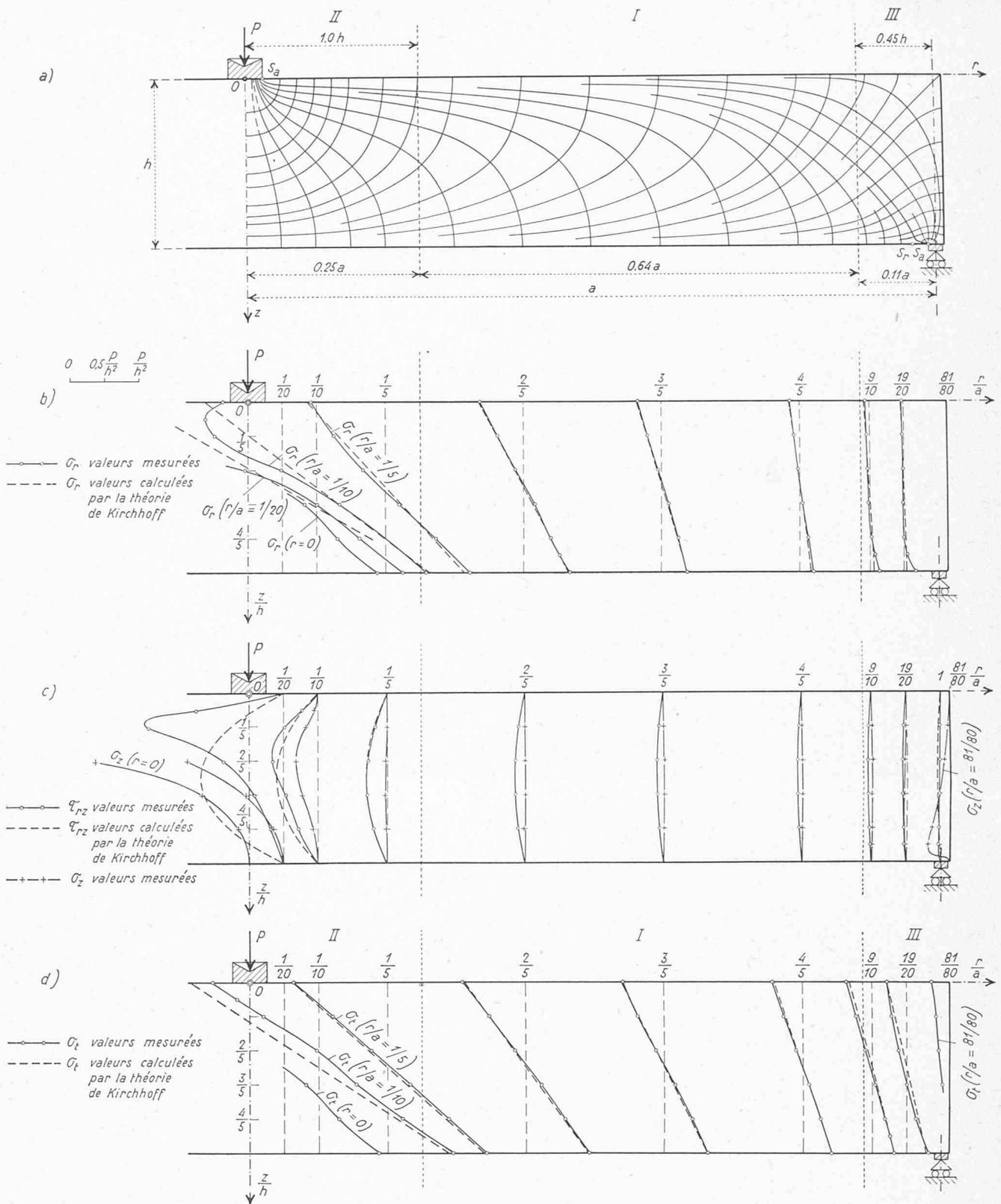


Fig. 17 a, b, c, d. — Modèle de plaque $h/2a = 1/8$.

a) Trajectoires des tensions principales
 b), c), d) Diagrammes des tensions σ_r , σ_z , τ_{rz} et σ_t .

τ_{xz} et en posant $\sigma_t \equiv 0$. Ces propriétés étant précisément celles requises pour l'application de la théorie de la flexion de Navier, on peut définir aussi la zone I pour les poutres comme étant le domaine où les différences entre les valeurs des tensions calculées d'après cette théorie et les tensions obtenues expérimentalement sont inférieures à $0,048 P/h^2$, c'est-à-dire à 10 % de la tension $(\sigma_x)_{\max}$ pour $x/a = 0,5$.

Les limites de ces zones sont indiquées dans les figures 16 a, b, c et 18 a, b, c. La zone I n'existe pas dans le cas de la poutre 1 : 2 (fig. 15 a, b, c).

Examinons le domaine II voisin du milieu des poutres. On remarque que les trajectoires des tensions n'y sont plus invariantes comme dans le cas des plaques, mais dépendent considérablement du rapport $h : 2a$.

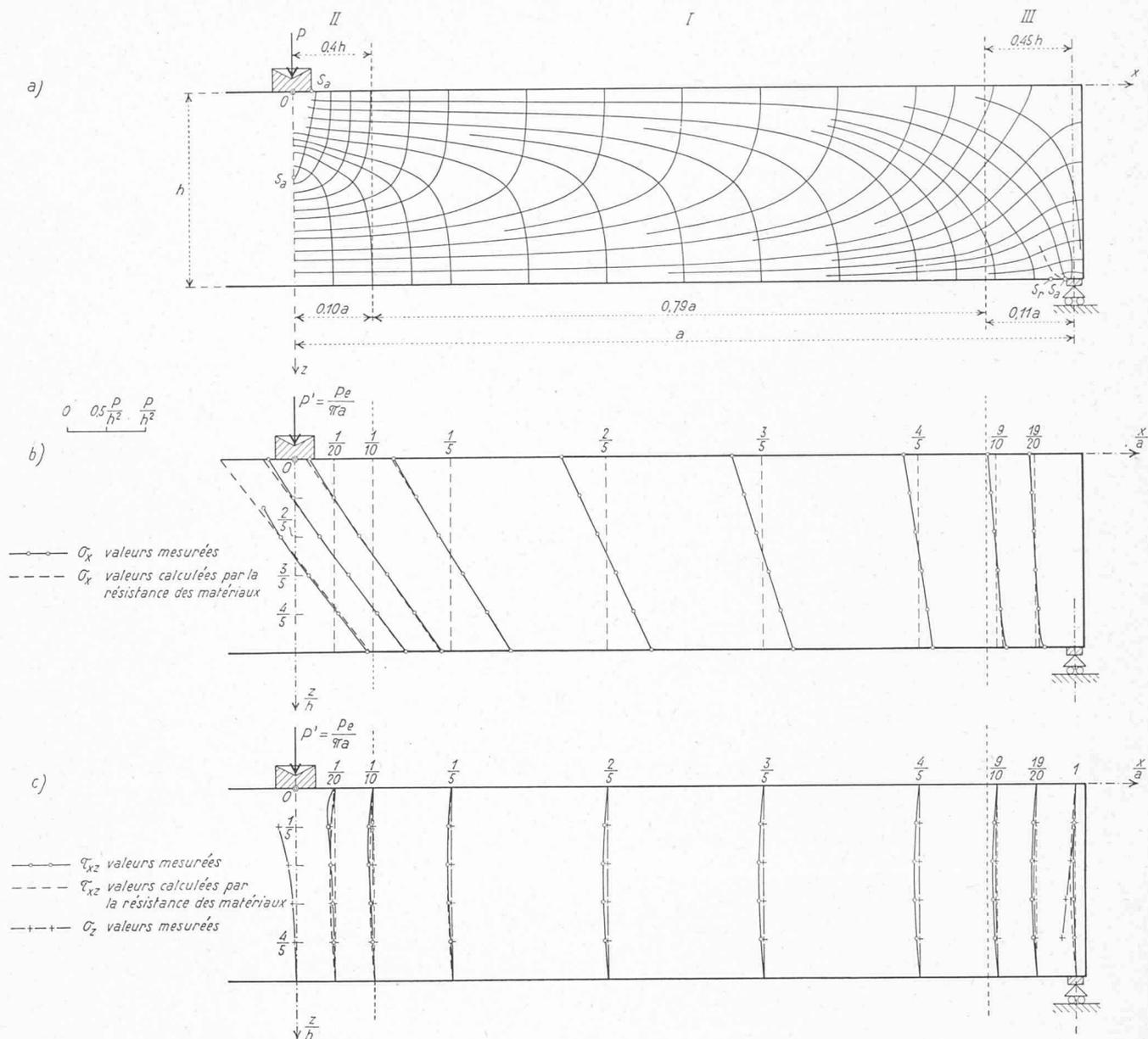


Fig. 18 a, b, c. — Modèle de poutre simple $h/2a = 1/8$.

a) Trajectoires des tensions principales
b), c) Diagrammes des tensions σ_x , σ_z et τ_{xz} .

En particulier, les positions des points singuliers attractif S_a et répulsif S_r , tous deux situés sur l'axe des z , dépendent de $h : 2a$ ²⁶. Cela est dû au fait qu'en chaque point, les rapports des tensions σ_x , σ_z , τ_{xz} entre elles dépendent eux-mêmes de $h : 2a$, comme on peut le reconnaître à l'aide des diagrammes. Par contre, les trajectoires des tensions de la zone III voisine des appuis sont invariantes, les rapports des tensions y étant indépendants de $h : 2a$.

Les limites des zones I, II, III sont reproduites dans la figure 20, où l'on a également indiqué les limites relatives à la poutre 1 : 6. On constate que les étendues respectives des zones II et III sont sensiblement les mêmes pour les poutres 1 : 4, 1 : 6 et 1 : 8.

²⁶ Un point S_r n'a pas pu être décelé au voisinage de la petite surface d'application de la force P dans le cas de la figure 18 a. Cela est probablement dû à l'inexactitude des mesures dans cette zone. Le lecteur trouvera d'intéressants renseignements sur les points singuliers qui existent au voisinage des points d'application des forces, dans [8], T. I, p. 196.

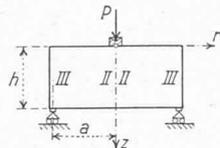
Les étendues des domaines II et III des poutres deviennent donc indépendantes de la valeur du rapport $h : 2a$, dès que ce rapport est égal ou inférieur à 1 : 4. Les longueurs de ces domaines prennent respectivement les valeurs constantes 0,4 h et 0,45 h.

Comme dans le cas des plaques, c'est également dans la zone II, voisine du milieu de la poutre, qu'existent les plus fortes tensions. Parmi celles-ci, la plus grande traction σ_{\max} — qui est en général la plus dangereuse — se produit au milieu de la face inférieure. La comparaison des diagrammes des valeurs de σ_x mesurées et calculées montre que la théorie de Navier donne pour σ_{\max} des valeurs approchées de cette traction, valeurs qui sont systématiquement un peu trop grandes²⁷.

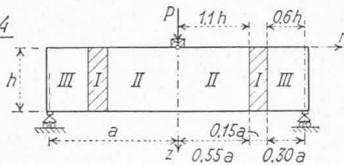
Si nous comparons maintenant les trajectoires et les diagrammes relatifs à chaque plaque, à ceux de la

²⁷ Ce fait a déjà été signalé en 1891 par C. Wilson, à la suite d'expériences sur un modèle de verre. G. G. Stokes en a donné plus tard une explication théorique (voir par exemple [14], p. 96).

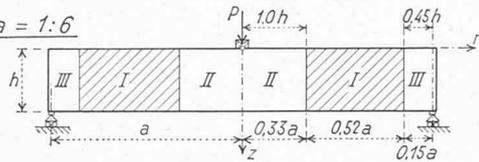
$$h : 2a = 1 : 2$$



$$h : 2a = 1 : 4$$



$$h : 2a = 1 : 6$$



$$h : 2a = 1 : 8$$

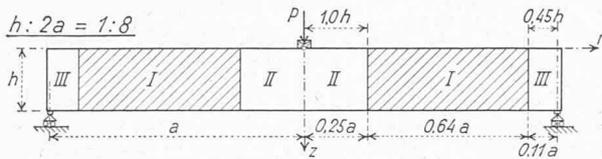


Fig. 19. — Plaques $h/2a = 1/2, 1/4, 1/6, \text{ et } 1/8$. Domaines I, où la théorie de Kirchhoff est applicable et domaines II et III, où cette théorie n'est pas valable.

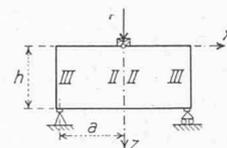
poutre correspondante, nous pouvons faire les remarques suivantes :

1° Dans la zone I, les trajectoires des tensions relatives aux plaques ont une courbure qui varie très régulièrement, beaucoup plus régulièrement que la courbure des trajectoires des poutres correspondantes. Dans ces dernières, chaque trajectoire, après être restée longtemps voisine d'une horizontale, passe assez brusquement, en traversant l'axe horizontal $z = \frac{h}{2}$ de la poutre, dans un second domaine où elle est voisine d'une verticale (comparer par exemple les figures 17 a et 18 a). Cela provient du fait que dans la plaque, le rapport de l'effort tranchant Q au moment de flexion M_r est beaucoup plus grand que le rapport Q/M_x dans le profil homologue de la poutre correspondante, comme le montre facilement la comparaison des valeurs données par les théories de Kirchhoff et de Navier. Ainsi, les efforts tranchants jouent, dans la zone I, un rôle plus considérable dans le cas des plaques que dans celui des poutres.

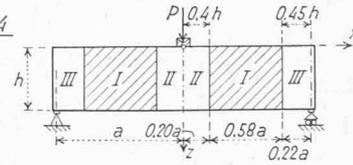
2° Dans la zone II, les trajectoires et les valeurs des tensions relatives aux plaques sont très différentes de celles relatives aux poutres correspondantes. Dans les premières, elles sont pratiquement invariantes, c'est-à-dire quasi indépendantes de la valeur du rapport $h : 2a$; dans les secondes, au contraire, elles dépendent considérablement de ce rapport, comme nous l'avons vu plus haut.

3° Dans la zone III, les trajectoires des tensions sont sensiblement les mêmes pour les quatre plaques et les quatre poutres étudiées (comparer les figures 13 a, 14 a, ..., 18 a). Cela provient du fait que les rapports des tensions entre elles sont les mêmes en des points homologues de ces huit modèles, dans la zone en question. Dans cette zone, les tensions ont d'ailleurs des valeurs

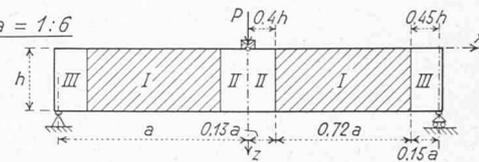
$$h : 2a = 1 : 2$$



$$h : 2a = 1 : 4$$



$$h : 2a = 1 : 6$$



$$h : 2a = 1 : 8$$

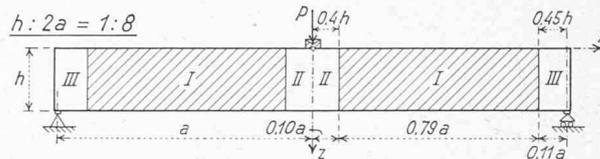


Fig. 20. — Poutres simples $h/2a = 1/2, 1/4, 1/6 \text{ et } 1/8$. Domaines I, où la théorie de Navier est applicable et domaines II et III, où cette théorie n'est pas valable.

respectives sensiblement égales, en deux points homologues de chaque plaque et de la poutre correspondante.

4° Si l'on compare les étendues des diverses zones I, II, III dans les plaques et dans les poutres correspondantes, on constate que le domaine II voisin du centre a une étendue beaucoup plus grande dans le cas des plaques (fig. 19) que dans celui des poutres (fig. 20)²⁸. Cela prouve que la singularité engendrée par la force concentrée P a une influence beaucoup plus marquante sur la répartition des tensions dans le premier cas que dans le second.

D'autre part, l'étendue du domaine III des plaques est légèrement supérieure ou égale à celle du même domaine des poutres correspondantes.

La conséquence de ces deux faits est que la zone I des plaques, où la théorie de Kirchhoff est applicable, est notablement moins étendue que le domaine I des poutres correspondantes, où la théorie de Navier est valable. Une plaque relativement épaisse se comporte ainsi beaucoup moins « linéairement » que la poutre simple correspondante.

§ 6. Conclusions.

L'application de la méthode du figeage des contraintes, complétée par une intégration graphique, nous a permis d'étudier la répartition complète²⁹ des tensions dans quatre modèles de plaques simplement posées le long du contour et supportant au centre une force P , répartie sur une très petite surface circulaire. Les quatre modèles étaient caractérisés par les rapports 1 : 2, 1 : 4, 1 : 6 et 1 : 8 de l'épaisseur h de la plaque au diamètre $2a$

²⁸ Dans le premier cas, ce domaine augmente légèrement lorsque $h/2a$ croît ; dans le second, il reste constant, si $h/2a \leq \frac{1}{4}$.

²⁹ A l'exception d'une petite zone située immédiatement en dessous de la surface de répartition de la force appliquée P .

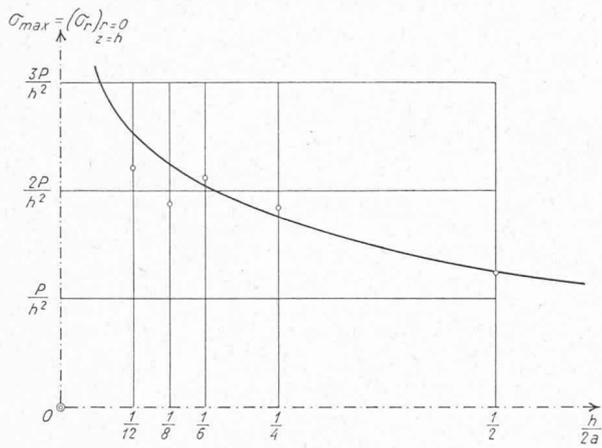


Fig. 21. — Valeurs de la traction dangereuse dans une plaque circulaire $\sigma_{\max} = (\sigma_r)_{r=0} = (\sigma_t)_{r=0}$ d'après la formule de Woinowsky-Krieger (9) (ligne continue) et d'après les essais (petits cercles), en fonction du rapport $h/2a$.

du cercle d'appui (le diamètre $2b$ de la plaque elle-même était très légèrement supérieur à $2a$).

Cette étude a permis de déterminer les domaines (I) où la théorie de Kirchhoff est applicable au calcul de toutes les tensions et ceux (II, III) où elle ne l'est pas. Elle a également permis de mettre en évidence l'influence du rapport $h : 2a$ sur les étendues de ces domaines et sur la répartition générale des tensions. Enfin, elle a montré que la formule de Woinowsky-Krieger :

$$\sigma_{\max} = \frac{(\sigma_r)_{r=0} = (\sigma_t)_{r=0}}{z=h} = \frac{(\sigma_r)_{r=0} = (\sigma_t)_{r=0}}{z=h} = \left[(1 + \nu) \left(0,485 \log \frac{a}{h} + 0,52 \right) + 0,48 \right] \frac{P}{h^2} \quad (9)$$

donne une valeur approchée de la traction dangereuse σ_{\max} lorsque $\frac{1}{12} \leq \frac{h}{2a} \leq \frac{1}{2}$ (cette traction se produit au centre de la face inférieure de la plaque).

Tous les résultats obtenus ont été comparés à ceux des poutres correspondantes, qui ont été étudiées par la même méthode expérimentale que celle utilisée pour les plaques.

Notre principale conclusion est que la théorie de Kirchhoff pour le calcul des plaques a un domaine d'application moins étendu que celui de la théorie de Navier pour le calcul des poutres. Cette dernière théorie présente en outre l'avantage de donner des valeurs approchées de σ_{\max} pour les poutres, alors qu'il faut faire appel à une théorie beaucoup plus poussée que celle de Kirchhoff, la théorie de Woinowsky-Krieger, pour déterminer la valeur de σ_{\max} relative à une plaque. En d'autres termes, une plaque circulaire chargée symétriquement est beaucoup plus rebelle aux méthodes élémentaires de la résistance des matériaux que ne l'est une poutre mince, de section rectangulaire, fléchée parallèlement au plan de ses deux plus grandes dimensions.

Insistons sur le fait que la nouveauté de cette étude ne réside aucunement dans les résultats obtenus pour les poutres, qui sont en principe connus depuis long-

temps. La nouveauté réside essentiellement dans les résultats des mesures systématiques de tensions faites sur des modèles de plaques circulaires, ainsi que dans la comparaison de ces résultats 1° aux valeurs données par le calcul ; 2° aux valeurs mesurées dans les poutres correspondantes.

Il serait intéressant de faire, pour les plaques rectangulaires, une étude analogue à celle que nous venons de décrire, en se proposant d'atteindre les mêmes buts. C'est ce que nous espérons pouvoir entreprendre dans la suite.

Zurich, le 5 décembre 1957.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] H. FAVRE et B. GILG : *Sur une méthode purement optique pour la mesure directe des moments dans les plaques minces fléchies*. Schweizerische Bauzeitung, 13 et 20 mai 1950.
- [2] B. GILG : *Experimentelle und theoretische Untersuchungen an dünnen Platten*. Publication n° 5 du Laboratoire de photoélasticité de l'E.P.F., Editions Leemann, Zurich 1952.
- [3] H. FAVRE et W. SCHUMANN : *Etude expérimentale des moments dans une plaque oblique fléchie en fonction de l'angle formé par les côtés*. Bulletin de la Société française des mécaniciens, n° 9, 1953.
- [4] H. FAVRE et W. SCHUMANN : *Quelques applications récentes de la méthode purement optique à l'étude des plaques fléchies*. Bulletin technique de la Suisse romande, n° 20, 2 octobre 1954.
- [5] W. SCHUMANN : *Theoretische und experimentelle Untersuchungen über das de Saint-Venantsche Prinzip, speziell mit Anwendung auf die Plattentheorie*. Publication n° 6 du Laboratoire de photoélasticité de l'E.P.F., Editions Leemann, Zurich 1955.
- [6] H. SCHWIEGER : *Ein Auswerteverfahren bei der spannungsoptischen Untersuchung elastischer Platten*. Bauplanung und Bautechnik, 8. Jg., Heft 4, April 1954.
- [7] R. HILTSCHER : *Spannungsoptische Untersuchung der Momentenverteilung in dünnen Platten unter Verwendung eines Lateralextensometers*. Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, Bd. 23, 1957, Heft 1/2.
- [8] M. M. FROCHT : *Photoelasticity*, T. I et II. John Wiley and Sons Inc., New York, and Chapman and Hall Limited, London, 1948.
- [9] M. HETÉNYI : *Handbook of experimental stress analysis*. John Wiley and Sons Inc., New York, and Chapman and Hall Limited, London, 1954.
- [10] M. M. FROCHT and R. GUERNSEY : *A special investigation to develop a general method for three-dimensional photoelastic stress analysis*. Nat. Adv. Com. for Aeronautics. Techn. Note 2822, 1952 (voir aussi Report 1148, 1953).
- [11] G. MESMER : *Spannungsoptik*. Julius Springer, Berlin, 1939.
- [12] R. HILTSCHER : *Spannungsoptischer Apparat für das Forschungs- und Industrielaboratorium*. Trans. Instr. and Measurements Conf., Stockholm, 1952.
- [13] S. TIMOSHENKO : *Theory of plates and shells*. McGraw-Hill Book Company Inc., New York and London, 1940.
- [14] S. TIMOSHENKO : *Theory of Elasticity*. McGraw-Hill Book Company Inc., New York and London, 1934.