

**Zeitschrift:** Bulletin technique de la Suisse romande  
**Band:** 94 (1968)  
**Heft:** 14

**Artikel:** La calculatrice électronique à la disposition de l'ingénieur  
**Autor:** Dupuis, Georges  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-69646>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 31.03.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# BULLETIN TECHNIQUE DE LA SUISSE ROMANDE

Paraissant tous les 15 jours

## ORGANE OFFICIEL

de la Société suisse des ingénieurs et des architectes  
de la Société vaudoise des ingénieurs et des architectes (SVIA)  
de la Section genevoise de la SIA  
de l'Association des anciens élèves de l'EPUL (Ecole polytechnique  
de l'Université de Lausanne)  
et des Groupes romands des anciens élèves de l'EPF (Ecole poly-  
technique fédérale de Zurich)

## COMITÉ DE PATRONAGE

Président: E. Martin, arch. à Genève  
Vice-président: E. d'Okolski, arch. à Lausanne  
Secrétaire: S. Rieben, ing. à Genève

## Membres:

Fribourg: H. Gicot, ing.; M. Waeber, arch.  
Genève: G. Bovet, ing.; Cl. Grosgrin, arch.; J.-C. Ott, ing.  
Neuchâtel: J. Béguin, arch.; M. Chevalier, ing.  
Valais: G. de Kalbermatten, ing.; D. Burgener, arch.  
Vaud: A. Chevalley, ing.; A. Gardel, ing.;  
M. Renaud, ing.; J.-P. Vouga, arch.

## CONSEIL D'ADMINISTRATION

de la Société anonyme du « Bulletin technique »

Président: D. Bonnard, ing.

Membres: Ed. Bourquin, ing.; G. Bovet, ing.; M. Bridel; M. Cosan-  
dey, ing.; J. Favre, arch.; A. Métraux, ing.; A. Rivoire,  
arch.; J.-P. Stucky, ing.

Adresse: Avenue de la Gare 10, 1000 Lausanne

## RÉDACTION

F. Vermeille, rédacteur en chef; E. Schnitzler, ingénieur, et M. Bevi-  
lacqua, architecte, rédacteurs  
Rédaction et Editions de la S.A. du « Bulletin technique »  
Tirés à part, renseignements  
Avenue de Cour 27, 1000 Lausanne

## ABONNEMENTS

1 an . . . . .	Suisse	Fr. 46.—	Etranger	Fr. 50.—
Sociétaires . . . . .	»	» 38.—	»	» 46.—
Prix du numéro . . . . .	»	» 2.30	»	» 2.80

Chèques postaux: « Bulletin technique de la Suisse romande »  
N° 10 - 5775, Lausanne

Adresser toutes communications concernant abonnement, vente au  
numéro, changement d'adresse, expédition, etc., à: Imprimerie  
La Concorde, Terreaux 29, 1003 Lausanne

## ANNONCES

Tarif des annonces:

1/1 page . . . . .	Fr. 450.—
1/2 » . . . . .	» 235.—
1/4 » . . . . .	» 120.—
1/8 » . . . . .	» 62.—

Adresse: Annonces Suisses S.A.

Place Bel-Air 2. Tél. (021) 22 33 26, 1000 Lausanne et succursales



## SOMMAIRE

La calculatrice électronique à la disposition de l'ingénieur, par Georges Dupuis, ingénieur EPUL.

Bibliographie. — Avis à nos abonnés.

Documentation générale. — Documentation du bâtiment. — Informations diverses.

## LA CALCULATRICE ÉLECTRONIQUE À LA DISPOSITION DE L'INGÉNIEUR <sup>1</sup>

par GEORGES DUPUIS, ingénieur EPUL, collaborateur à l'Institut de mathématiques appliquées

### 1. Généralités

Cet exposé ne contient rien d'essentiellement nouveau; il est destiné à montrer à l'ingénieur praticien quelques aspects du traitement automatique des problèmes qui lui sont posés journalièrement. Nous nous limiterons aux problèmes de statique posés à l'ingénieur civil; toutefois, les considérations qui suivent s'appliqueraient également à d'autres disciplines de la technique.

Par suite du développement des calculatrices, de nombreux problèmes, autrefois rebutants, sont devenus aujourd'hui chose courante. C'est en particulier le cas des problèmes d'analyse des structures complexes. Les principales conséquences de cette situation sont les suivantes:

1. L'analyse des structures peut être plus détaillée; il en résulte que les marges de sécurité peuvent être diminuées, d'où une économie de matériaux.
2. Des problèmes qui exigeaient plusieurs semaines de calcul manuel peuvent actuellement être résolus en

quelques minutes. Il s'ensuit que, pour un projet donné, il est possible d'étudier de nombreuses solutions en des temps raisonnables et de choisir ainsi en connaissance de cause.

3. L'ingénieur, libéré des calculs fastidieux, peut se consacrer davantage aux problèmes de construction.

Cette évolution des moyens de calcul n'est toutefois pas sans exigence. En effet, les méthodes de calcul classiques sont inspirées par la préoccupation de donner à ces calculs une forme bien adaptée aux méthodes manuelles. Or, les exigences du calcul électronique sont toutes différentes. En calcul manuel, on cherche des méthodes conduisant à un volume de calcul minimum, qui exigent de nombreuses initiatives du calculateur. Par contre, en calcul automatique, on cherche des méthodes conduisant à des opérations standard, leur nombre n'ayant qu'une importance secondaire. Il est donc nécessaire de reprendre, souvent assez au début, des problèmes que l'on avait l'habitude de résoudre par des méthodes artisanales, afin de se plier aux exigences de l'automatisme. Cette circonstance est en fait la même que celle que l'on rencontre dans bien des questions de fabrication industrielle.

<sup>1</sup> Exposé présenté lors des journées d'étude du Groupe des ingénieurs des ponts et charpentes de la SIA des 17 et 18 novembre 1967 à Lausanne.

Les problèmes posés par la mécanique des corps déformables sont en général si complexes qu'ils échappent à l'analyse. La méthode générale utilisée en statique appliquée consiste à transformer les problèmes donnés en problèmes plus simples que l'on sait résoudre *exactement*. Il n'existe toutefois pas de technique de transformation ; celle-ci fait essentiellement appel à l'intuition de l'ingénieur. Le développement des calculatrices a fait apparaître une méthode différente qui consiste à résoudre directement les problèmes proposés mais, en général, de manière *approchée*. Les avantages de cette méthode par rapport à la précédente sont au nombre de deux :

1. Il existe des techniques générales d'approximation qui ne font pas appel à l'intuition et peuvent être automatisées.
2. Il est possible d'évaluer les erreurs commises et, au besoin, de les réduire.

Pour fixer les idées, considérons le cas d'une plaque rectangulaire posée sur des appuis ponctuels situés sur son contour. Si ces appuis sont assez rapprochés, on pourra les assimiler à un appui continu et déterminer l'état de contrainte de la plaque en utilisant la solution exacte, connue pour ce cas. Au contraire, en calcul électronique, on considérera le détail des appuis ponctuels mais on résoudra le problème à l'aide d'une méthode approchée, par exemple la méthode des équations aux différences. On pourra se faire une idée de la qualité de l'approximation en reprenant le calcul avec une maille plus fine.

Les problèmes posés à l'ingénieur peuvent être schématiquement décomposés en trois parties :

1. *Choix d'un modèle mathématique.* C'est le passage d'un problème de physique à un problème de mathématique. Par exemple, une plaque est remplacée par un corps déformable à deux dimensions.

2. *Exploitation du modèle.* Il s'agit de résoudre un problème de mathématique parfaitement posé. Par exemple, dans le cas de la plaque, on a à déterminer l'intégrale de l'équation de Lagrange satisfaisant des conditions aux limites. Remarquons que cette partie du problème ne fait appel qu'aux connaissances mathématiques de l'ingénieur. En fait, elle pourrait être confiée à un mathématicien, sans préciser de quel problème physique elle est issue.

3. *Interprétation des résultats.* Cette partie est certainement la plus délicate ; en effet, c'est ici que l'in-

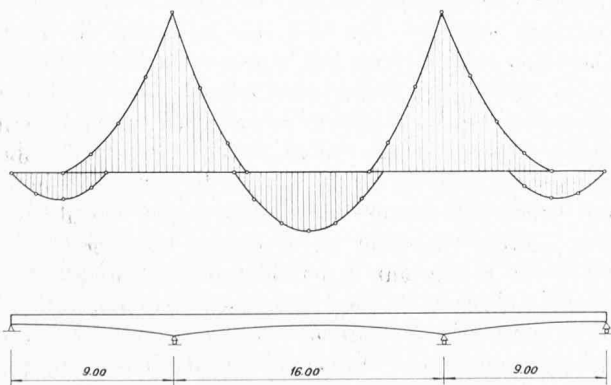


Fig. 1. — Enveloppe des moments d'une poutre continue de section variable.

Charge répartie permanente :  $g = 2 \text{ t/m}$  ; charge répartie mobile :  $p = 0,7 \text{ t/m}$  ; charge concentrée :  $P = 6 \text{ t}$ .

ingénieur doit décider de l'incidence des résultats obtenus à partir d'un modèle, qui ne représente la réalité que de manière imparfaite, sur la forme et les dimensions de l'ouvrage qu'il étudie. Contrairement à l'exploitation du modèle, cette partie fait non seulement appel aux connaissances mathématiques de l'ingénieur, mais aussi à son intuition et à son expérience de constructeur.

Il est très important de bien distinguer le problème physique de son modèle mathématique. Si l'on peut étudier le second avec toute la précision désirable, cette précision est probablement illusoire pour le problème physique. Cette remarque ne doit toutefois pas nous autoriser à n'étudier le modèle mathématique que de manière grossière, on cumulerait ainsi les difficultés du problème.

L'usage d'une calculatrice permet de résoudre entièrement, et en des temps très brefs, la seconde partie du problème, c'est-à-dire l'étude du modèle mathématique. D'autre part, elle peut aussi contribuer aux deux autres parties. En effet, le moyen puissant que constitue une calculatrice permet de faire, en peu de temps, de nombreuses expériences numériques propres à démontrer si tel ou tel effet joue un rôle sensible et doit être pris en compte dans les calculs. Enfin, certaines techniques permettent de déterminer les dimensions ou la forme optimum d'une structure ; la grandeur à minimiser étant, par exemple, le poids de la structure.

Dans ce qui suit, nous nous limiterons au problème de l'étude d'un modèle mathématique. On peut classer en deux catégories les problèmes qu'il convient de traiter à l'aide d'une calculatrice :

1. Des problèmes relativement élémentaires qui conduisent à un volume de calcul important.
2. Des problèmes plus complexes pour lesquels l'ingénieur ne peut obtenir que des ordres de grandeur, s'il ne dispose que de sa règle à calcul et des abaques habituels.

Comme exemple de problème du premier type, considérons une poutre continue de section variable. On se propose de déterminer l'enveloppe des moments et efforts tranchants, sous l'effet d'une charge répartie permanente, d'une charge répartie mobile et d'une charge concentrée par travée. La figure 1 représente une telle poutre et l'enveloppe des moments correspondante. Un programme, assez élémentaire, écrit pour la calculatrice de l'EPUL, permet de résoudre ce problème en quelques minutes.

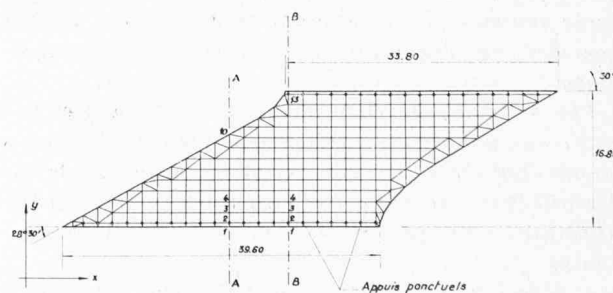


Fig. 2. — Exemple de plaque calculée par la méthode des éléments finis et étudiée sur modèle par le Laboratoire de statique de l'EPUL. Auteurs du projet : P. Kipfer et H. Wazenried.

Caractéristiques : Epaisseur  $e = 0,90 \text{ m}$  ; module d'élasticité  $E = 2\,000\,000 \text{ t/m}^2$  ; coefficient de Poisson  $\nu = 0,38$  ; charge uniformément répartie  $p = 1 \text{ t/m}^2$ .

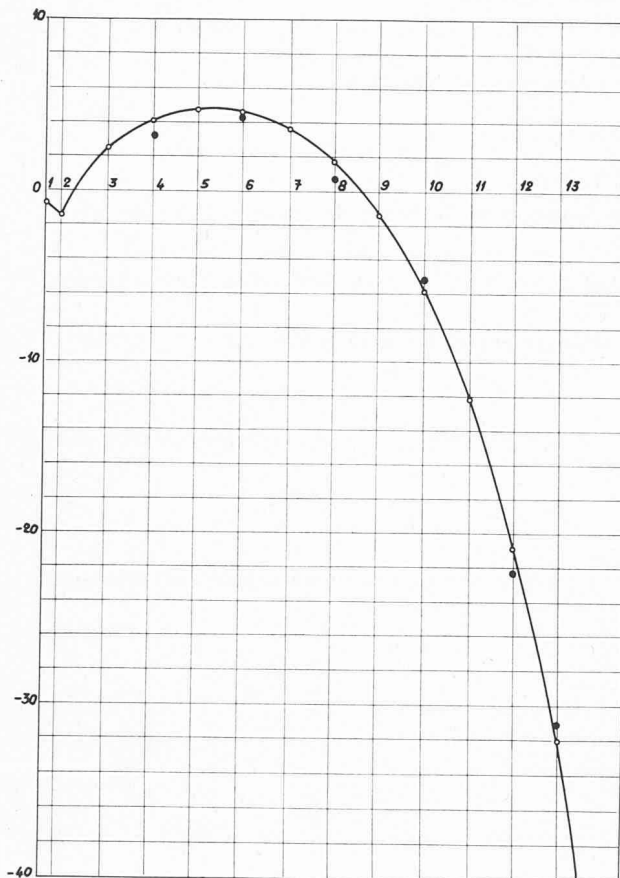


Fig. 3. — Moments  $M_x$  en tm/m le long de la ligne B-B (cf. fig. 2).

○ Valeur calculée.  
● Valeur mesurée.

Comme exemple de problème du second type, considérons la plaque représentée à la figure 2, sollicitée par une charge uniformément répartie. On se propose de déterminer les déplacements, les efforts intérieurs et les réactions d'appuis<sup>1</sup>. La résolution de ce problème sur la calculatrice de l'EPUL, par la méthode des éléments finis, exige environ une heure de calcul. Nous avons comparé quelques résultats obtenus par le calcul avec des mesures effectuées au Laboratoire de statique de l'EPUL<sup>2</sup>. Les figures 3 et 4 montrent les moments calculés et mesurés suivant deux lignes verticales. Les courbes représentent les valeurs calculées ; les points sont les résultats de mesure. Ces figures montrent que la concordance des résultats est très satisfaisante. Il y a lieu de remarquer que dans cette comparaison, nous avons implicitement superposé les différences entre les solutions approchée et exacte du modèle mathématique d'une part et entre le modèle et la réalité d'autre part. On pourrait tenter de séparer ces deux influences en reprenant le calcul de la plaque avec un réseau plus fin. En fait, c'est bien ce type de comparaison qui intéresse l'utilisateur.

<sup>1</sup> Cet exemple est extrait de la thèse de doctorat de J.-J. Goël, présentée à l'EPUL, intitulée : « Utilisation numérique de la méthode de Ritz. Application aux plaques ».

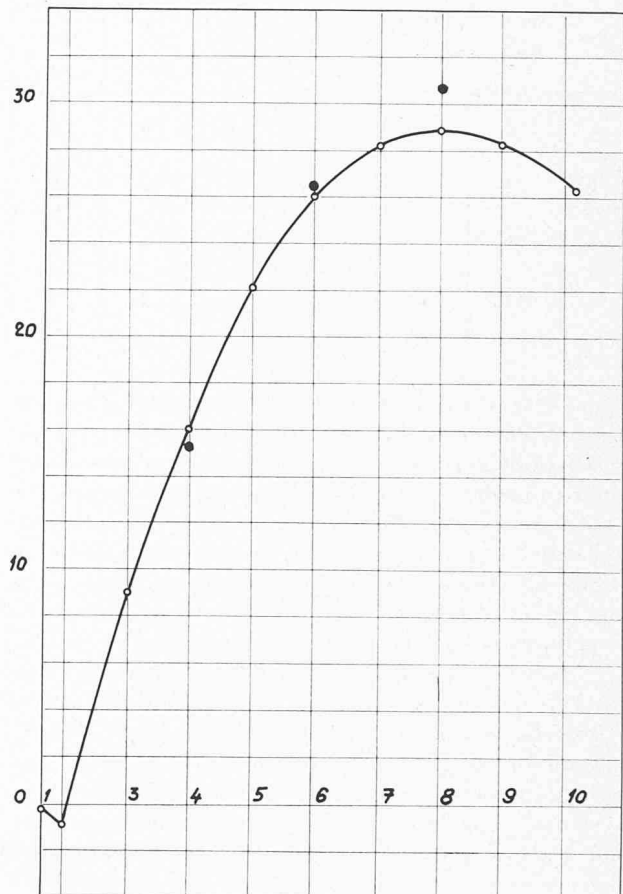


Fig. 4. — Moments  $M_y$  en tm/m le long de la ligne A-A (cf. fig. 2).

○ Valeur calculée.  
● Valeur mesurée.

## 2. Choix d'une méthode de calcul

Nous avons dit plus haut que les méthodes habituellement utilisées en calcul manuel sont généralement mal adaptées au calcul électronique. Nous allons étayer cette affirmation par un exemple tout à fait élémentaire.

Considérons le problème des systèmes triangulés ; il s'agit de déterminer les efforts dans les barres, sous l'effet de forces extérieures données.

Pour résoudre ce problème, on utilise habituellement la méthode de forces ; on choisit comme inconnues les réactions d'appui et les efforts dans les barres et l'on écrit l'équilibre des nœuds. Plusieurs cas peuvent se présenter. La figure 5 représente les quatre circonstances possibles. Dans le premier cas, les équations d'équilibre sont suffisantes pour déterminer les efforts dans les barres ; dans le second, il faut leur adjoindre deux équations de déformation ; dans le troisième, il faut leur adjoindre une condition de déplacement ; enfin, le quatrième cas nécessite des équations des trois types. Le tableau 1 résume ces quatre circonstances.

Les équations à écrire sont donc, en général, de trois

<sup>2</sup> Nous tenons à remercier M. le professeur F. Panchaud, directeur du Laboratoire de statique, qui nous a aimablement fourni ces résultats.

TABLEAU 1

Cas	Nombre de barres	Nombre de réactions	Nombre d'inconnues	Nombre d'équations d'équilibre	Nombre d'équations de déformation	Nombre d'équations de déplacement
a	9	3	12	12	0	0
b	11	3	14	12	2	0
c	9	4	13	12	0	1
d	11	4	15	12	2	1

types différents, ce qui n'est pas favorable à l'automatisation des calculs. De plus, les opérations à effectuer seront différentes selon que le système est isostatique, intérieurement ou extérieurement hyperstatique. Par contre, on sait que la méthode des forces aboutit à un système d'équations séparable en plusieurs systèmes de dimensions réduites, ce qui constitue un avantage essentiel en calcul manuel. (C'est cette circonstance qui est exploitée dans la méthode de Cremona, par exemple.)

Si l'on veut traiter ce problème à l'aide d'une calculatrice, on ne se contentera pas de résoudre les équations automatiquement, on demandera également au programme de les poser. Dans cette optique, on accepte volontiers un surcroît de travail dans la résolution du système si l'on imagine une méthode permettant d'établir ces équations à l'aide d'opérations standard. C'est bien ce à quoi conduit la méthode des déplacements.

Choisissons comme variables, non plus les efforts dans les barres et les réactions d'appuis, mais les déplacements des nœuds. Nous allons exprimer les efforts intérieurs à l'aide de ces variables et écrire les douze équations d'équilibre des nœuds. Ces équations seront identiques pour les cas (a) et (c) respectivement (b) et (d) de la figure 5, à la différence près que certaines variables (qui expriment les déplacements des appuis) seront nulles a priori. Lorsqu'on impose une condition de liaison, une variable de déplacement disparaît ; elle est remplacée par la réaction d'appui correspondante. Pour les quatre cas de la figure 5, on aura ainsi douze inconnues.

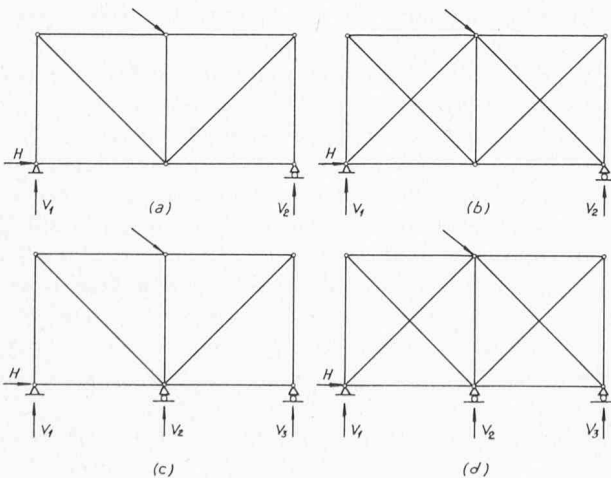


Fig. 5. — Systèmes triangulés : a) isostatique ; b) intérieurement hyperstatique ; c) extérieurement hyperstatique ; d) intérieurement et extérieurement hyperstatique.

Considérons une barre limitée par les nœuds  $i$  et  $j$  et soient  $(x_i, y_i)$ ,  $(x_j, y_j)$  les coordonnées initiales de ces nœuds, dans un système cartésien de référence. Nous désignons par  $(u_i, v_i)$ ,  $(u_j, v_j)$  les composantes du déplacement des nœuds dans le même système (voir fig. 6). La longueur initiale de la barre vaut

$$l = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2};$$

la longueur de la barre déformée est donnée par

$$l' = \sqrt{[(x_j + u_j) - (x_i + u_i)]^2 + [(y_j + v_j) - (y_i + v_i)]^2};$$

l'allongement de la barre vaut

$$w = l' - l$$

et si l'on suppose que les déplacements sont petits, on peut écrire

$$w = \frac{1}{l} [(x_j - x_i)(u_j - u_i) + (y_j - y_i)(v_j - v_i)]. \quad (1)$$

L'effort normal qui sollicite la barre est donné par

$$N = \frac{EF}{l} w, \quad (2)$$

où  $E$  est le module d'élasticité et  $F$  est l'aire de la section de la barre. On en déduit l'expression des forces appliquées aux nœuds :

$$\left. \begin{aligned} P_{ji} &= N \cos \alpha = \frac{EF}{l^3} [(x_j - x_i)^2 (u_j - u_i) + (x_j - x_i)(y_j - y_i)(v_j - v_i)], \\ Q_{ji} &= N \sin \alpha = \frac{EF}{l^3} [(x_j - x_i)(y_j - y_i)(u_j - u_i) + (y_j - y_i)^2 (v_j - v_i)]. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

On remarquera que l'on a bien

$$P_{ij} = -P_{ji}, \quad Q_{ij} = -Q_{ji},$$

comme le veut l'équilibre de la barre.

La géométrie et la physique de la barre sont entièrement caractérisées par les trois nombres

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{EF}{l^3} (x_j - x_i)^2; \quad C_2 = \frac{EF}{l^3} (y_j - y_i)^2; \\ C_3 &= \frac{EF}{l^3} (x_j - x_i)(y_j - y_i). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

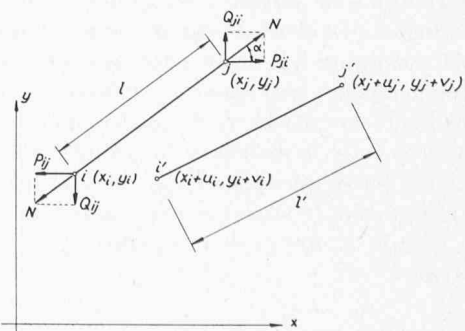


Fig. 6. — Barre de triangulation typique.

Avec ces définitions, les formules (3) prennent la forme

$$\left. \begin{aligned} P_{ji} &= C_1(u_j - u_i) + C_3(v_j - v_i), \\ Q_{ji} &= C_3(u_j - u_i) + C_2(v_j - v_i). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Désignons par  $X_j, Y_j$  les composantes de la force extérieure appliquée au nœud  $j$ ; les équations d'équilibre de ce nœud s'écrivent alors :

$$\left. \begin{aligned} \sum_i P_{ji} &= X_j, \\ \sum_i Q_{ji} &= Y_j, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

où les sommes portent sur toutes les barres qui aboutissent au nœud  $j$ .

Nous allons montrer maintenant que l'on peut obtenir le même résultat à partir du théorème du minimum de l'énergie potentielle. L'énergie de déformation de la barre considérée ci-dessus vaut

$$\frac{1}{2} Nw = \frac{1}{2} \frac{EF}{l} w^2;$$

compte tenu de la relation (1) et des notations (4), cette énergie peut se mettre sous la forme

$$\frac{1}{2} \left[ C_1 (u_j - u_i)^2 + C_2 (v_j - v_i)^2 + 2C_3 (u_j - u_i) (v_j - v_i) \right].$$

L'énergie de déformation totale du système vaut

$$U_1 = \frac{1}{2} \sum \left[ C_1 (u_j - u_i)^2 + C_2 (v_j - v_i)^2 + 2C_3 (u_j - u_i) (v_j - v_i) \right],$$

où la sommation est à effectuer sur toutes les barres du système. Le potentiel des forces extérieures appliquées à la structure est donné par

$$U_2 = \sum_j (X_j u_j + Y_j v_j);$$

l'énergie potentielle  $U = U_1 - U_2$  peut donc s'écrire

$$U = \frac{1}{2} \sum_{\text{barres}} \left[ C_1 (u_j - u_i)^2 + C_2 (v_j - v_i)^2 + 2C_3 (u_j - u_i) (v_j - v_i) \right] - \sum_j (X_j u_j + Y_j v_j). \quad (7)$$

Les déplacements de la position d'équilibre rendent minimum la fonction (7); on doit donc avoir

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial u_j} &= \sum \left[ C_1 (u_j - u_i) + C_3 (v_j - v_i) \right] - X_j = 0, \\ \frac{\partial U}{\partial v_j} &= \sum \left[ C_3 (u_j - u_i) + C_2 (v_j - v_i) \right] - Y_j = 0, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

où les sommes portent sur les barres pour lesquelles l'énergie de déformation fait intervenir les déplacements du nœud  $j$ ; c'est-à-dire sur toutes les barres qui aboutissent en ce nœud. En comparant les équations (6) et (8), on constate qu'il s'agit bien du même système.

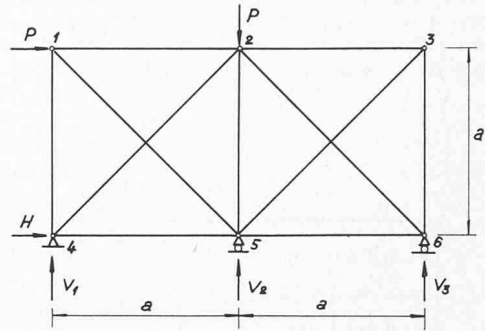


Fig. 7. — Exemple illustratif : système triangulé formé de onze barres de sections identiques.

Pour le problème qui nous occupe ici, il est indifférent d'obtenir les équations (8) à partir de l'équilibre des nœuds ou à partir du minimum de l'énergie potentielle. Par contre, dans le cas d'un problème continu, la première méthode n'est que l'interprétation intuitive de la seconde et présente parfois des difficultés essentielles.

#### Exemple numérique

Considérons le système triangulé représenté à la figure 7. Les conditions de liaison sont ici

$$u_4 = v_4 = v_5 = v_6 = 0.$$

Ecrivons les équations d'équilibre du nœud 1; il faut considérer toutes les barres qui aboutissent en ce nœud. On obtient successivement, en utilisant les formules (4) et (5) :

Barre 1-2 :  $l = a, C_1 = \frac{EF}{a}, C_2 = C_3 = 0$ , d'où

$$\left. \begin{aligned} P_{12} &= \frac{EF}{a} (u_1 - u_2), \\ Q_{12} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Barre 1-4 :  $l = a, C_1 = 0, C_2 = \frac{EF}{a}, C_3 = 0$ , d'où

$$\left. \begin{aligned} P_{14} &= 0, \\ Q_{14} &= \frac{EF}{a} (v_1 - v_4). \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Barre 1-5 :  $l = a\sqrt{2}, C_1 = C_2 = -C_3 = 0,354 \frac{EF}{a}$ , d'où

$$\left. \begin{aligned} P_{15} &= 0,354 \frac{EF}{a} [(u_1 - u_5) - (v_1 - v_5)], \\ Q_{15} &= 0,354 \frac{EF}{a} [-(u_1 - u_5) + (v_1 - v_5)]. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Les équations d'équilibre du nœud 1 s'écrivent :

$$\left. \begin{aligned} P_{12} + P_{14} + P_{15} &= P, \\ Q_{12} + Q_{14} + Q_{15} &= 0, \end{aligned} \right\}$$

c'est-à-dire, compte tenu des relations (9) à (11),

$$\left. \begin{aligned} \frac{EF}{a} (1,354 u_1 - 0,354 v_1 - u_2 - 0,354 u_5 + \\ + 0,354 v_5) &= P, \\ \frac{EF}{a} (-0,354 u_1 + 1,354 v_1 - v_4 + 0,354 u_5 - \\ - 0,354 v_5) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

On formerait de même les dix autres équations qui expriment l'équilibre des nœuds 2, 3, ... 6. Ce système de douze équations linéaires peut se mettre sous la forme matricielle

$$A_0 \vec{u}_0 = \vec{f}_0, \quad (13)$$

$$\text{où } \vec{u}_0^T = (u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3 \ u_4 \ v_4 \ u_5 \ v_5 \ u_6 \ v_6), \\ \vec{f}_0^T = (P, 0, 0, -P, 0, 0, H, V_1, 0, V_2, 0, V_3)$$

et  $A_0$  est la matrice de dimensions  $12 \times 12$  (13 b). On comparera les deux premières lignes de cette matrice avec les équations (12). En vertu des conditions de liaison, on peut supprimer les colonnes relatives aux variables  $u_4, v_4, v_5, v_6$ .

Nous obtenons ainsi un système de douze équations pour les douze inconnues  $u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3, u_5, v_5, H, V_1, V_2, V_3$ . Permutons ces équations en écrivant les trois relations où interviennent les réactions d'appui, à la fin du système, on obtient :

$$A_0 = \frac{EF}{a} \begin{matrix} \text{Nœud 1} \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \begin{matrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 & u_4 & v_4 & u_5 & v_5 & u_6 & v_6 \\ \hline \begin{matrix} 1,354 & -0,354 & -1 & & & & & & -0,354 & 0,354 & & \\ -0,354 & 1,354 & & & & & & -1 & 0,354 & -0,354 & & \\ -1 & & 2,707 & & -1 & & -0,354 & -0,354 & & & -0,354 & 0,354 \\ & & & 1,707 & & & -0,354 & -0,354 & & -1 & 0,354 & -0,354 \\ & & -1 & & 1,354 & 0,354 & & & -0,354 & -0,354 & & \\ & & & & 0,354 & 1,354 & & & -0,354 & -0,354 & & -1 \\ & & -0,354 & -0,354 & & & 1,354 & 0,354 & -1 & & & \\ & -1 & -0,354 & -0,354 & & & 0,354 & 1,354 & & & & \\ -0,354 & 0,354 & & & -0,354 & -0,354 & -1 & & 2,707 & & -1 & \\ 0,354 & -0,354 & & -1 & -0,354 & -0,354 & & & & 1,707 & & \\ & & -0,354 & 0,354 & & & & & -1 & & 1,354 & -0,354 \\ & & 0,354 & -0,354 & & -1 & & & & & -0,354 & 1,354 \end{matrix} \end{matrix} \quad (13b)$$

$$\frac{EF}{a} \begin{matrix} 1,354 & -0,354 & -1 & & & & -0,354 & \\ -0,354 & 1,354 & & & & & 0,354 & \\ -1 & & 2,707 & & -1 & & & -0,354 \\ & & & 1,707 & & & & 0,354 \\ & & -1 & & 1,354 & 0,354 & -0,354 & \\ & & & & 0,354 & 1,354 & -0,354 & \\ -0,354 & 0,354 & & & -0,354 & -0,354 & 2,707 & -1 \\ & & -0,354 & 0,354 & & & -1 & 1,354 \end{matrix} \times \begin{matrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_5 \\ u_6 \end{matrix} = \begin{matrix} P \\ 0 \\ 0 \\ -P \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}, \quad (14)$$

$$\frac{EF}{a} \begin{bmatrix} & & -0,354 & -0,354 & & & -1 & \\ & -1 & -0,354 & -0,354 & & & & \\ 0,354 & -0,354 & & -1 & -0,354 & -0,354 & & \\ & & 0,354 & -0,354 & & -1 & & -0,354 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} \quad (15)$$

Sous forme matricielle, ce système peut s'écrire

$$\left. \begin{array}{l} A \vec{u} = \vec{f}, \\ B \vec{u} = \vec{R}. \end{array} \right\} \quad (16)$$

La matrice  $A$  est obtenue à partir de  $A_0$ , en supprimant les lignes et colonnes relatives aux variables nulles. La matrice  $B$  est formée des lignes de  $A_0$  relatives aux variables nulles, dans lesquelles on a supprimé les colonnes correspondantes (termes encadrés en trait plein dans la matrice  $A_0$ ). La résolution de ce système ne présente aucune difficulté, on calcule tout d'abord les déplacements à l'aide de la première équation (16) :

$$\vec{u} = A^{-1} \vec{f},$$

puis on obtient les réactions d'appui à l'aide de la seconde :

$$\vec{R} = B \vec{u}.$$

La matrice inverse  $A^{-1}$  s'écrit ici :

$$A^{-1} = \frac{a}{EF} \begin{bmatrix} 1,878 & 0,325 & 1,203 & -0,172 & 1,085 & -0,118 & 0,635 & 0,828 \\ & 0,839 & 0,163 & 0 & 0,118 & -0,046 & -0,058 & 0 \\ & & 1,366 & -0,172 & 1,203 & -0,163 & 0,578 & 0,828 \\ & & & 0,657 & -0,172 & 0 & -0,172 & -0,343 \\ & & & & 1,878 & -0,325 & 0,635 & 0,828 \\ & & & & & 0,839 & 0,058 & 0 \\ & & & & & & 0,856 & 0,828 \\ & & & & & & & 1,657 \end{bmatrix},$$

Symétrique

on en déduit le vecteur déplacement  $\vec{u}$  :

$$\vec{u}^T = \frac{Pa}{EF} (2,050 \quad 0,325 \quad 1,375 \quad -0,828 \quad 1,257 \quad -0,118 \quad 0,807 \quad 1,172),$$

et les réactions d'appui

$$H = -P; \quad V_1 = -0,518 P; \quad V_2 = 1,036 P; \\ V_3 = 0,482 P.$$

Il reste enfin à déterminer les efforts dans les barres, au moyen de la relation

$$N = \frac{EF}{l^2} [(x_j - x_i)(u_j - u_i) + (y_j - y_i)(v_j - v_i)].$$

Pour notre exemple, on obtient les résultats donnés au tableau 2.

TABLEAU 2

Barre (i-j)	$\frac{N}{P}$
1-2	-0,675
2-3	-0,118
1-4	0,325
2-5	-0,828
3-6	-0,118
4-5	0,807
5-6	0,365
1-5	-0,459
2-4	0,273
2-6	-0,516
5-3	0,166



Le problème est ainsi complètement résolu.

La méthode des déplacements que nous venons d'exposer à propos d'un exemple particulier est en fait très générale. Dans tous les cas, on retrouve le schéma de calcul de l'exemple ci-dessus, que l'on peut résumer comme suit :

1. Formation de la matrice de rigidité de la structure, sans tenir compte des conditions de liaison (la matrice  $A_0$  dans notre exemple).
2. Suppression des lignes et colonnes relatives aux variables nulles de la matrice ainsi formée ; on obtient ainsi la matrice  $A$  qui lie les variables de déplacement  $\vec{u}$  aux forces extérieures  $\vec{f}$ .
3. Formation de la matrice  $B$ , à partir des lignes relatives aux variables nulles de la matrice initiale. Cette matrice exprime les réactions d'appui  $\vec{R}$  en fonction des déplacements  $\vec{u}$ .
4. Calcul des déplacements solution du système  $A \vec{u} = \vec{f}$ .
5. Obtention des réactions d'appui définies par l'équation  $\vec{R} = B \vec{u}$ .
6. Détermination des efforts intérieurs à l'aide des déplacements.

Dans le paragraphe suivant, nous montrerons comment utiliser la même technique pour résoudre de manière *approchée* un problème d'élasticité plane.

#### Remarques

1. La matrice  $A$ , qui lie les déplacements aux forces extérieures, est appelée *matrice de rigidité* de la structure ; cette matrice est toujours *symétrique*, en vertu du théorème de réciprocité de Betti.
2. La matrice de rigidité *ne dépend pas du cas de charge considéré*. Dans la première relation (16), la géométrie et les propriétés physiques de la structure sont représentées par la matrice  $A$ , les forces extérieures sont exprimées par le vecteur  $\vec{f}$ . Cette matrice peut donc être formée et inversée une fois pour toutes. Pour un second cas de charge, il suffit de multiplier la matrice  $A^{-1}$  par le nouveau vecteur  $\vec{f}$ . Le

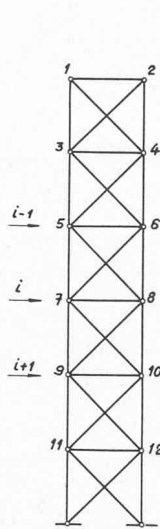


Fig. 8. — Numérotation des nœuds d'un treillis.

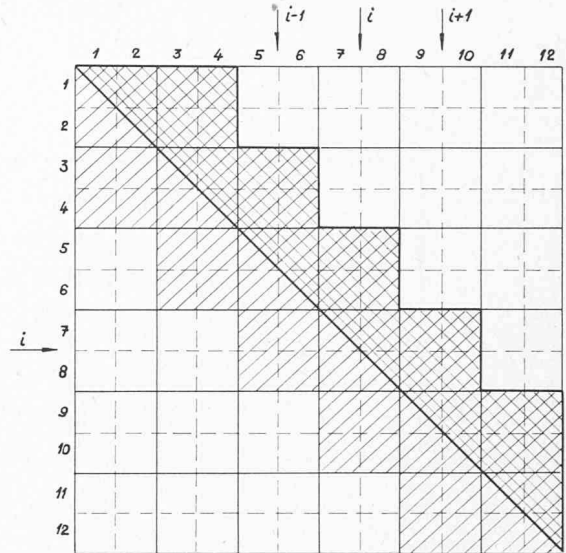


Fig. 9. — Forme tridiagonale par blocs de la matrice du système triangulé de la figure 8.

nombre de cas de charge ne joue ainsi qu'un faible rôle sur le temps total de calcul. C'est là un des avantages des méthodes de résolution directes par rapport aux méthodes itératives.

3. Dans l'exemple traité ci-dessus, nous avons résolu le système (16) en inversant la matrice  $A$ . En fait, dès qu'il s'agit d'un grand système d'équations, l'inversion de la matrice exige un temps de calcul considérable et il est beaucoup plus avantageux de résoudre ce système par élimination, c'est-à-dire en triangulant la matrice  $A$ . De plus, on tient compte de manière essentielle d'une circonstance favorable, liée à la forme de la matrice  $A$ . Considérons le système triangulé représenté à la figure 8 ; si l'on numérote les nœuds comme indiqué sur cette figure, la matrice des coefficients se présente alors comme le montre la figure 9. Seuls les blocs hachurés contiennent des termes non nuls. En effet, les nœuds de la ligne  $i$  ne sont couplés qu'aux nœuds des lignes  $(i - 1)$  et  $(i + 1)$ , d'où la forme tridiagonale. Compte tenu de la symétrie de la matrice, il suffit de mémoriser les termes contenus dans la partie doublement hachurée. Actuellement, on résout fréquemment des systèmes de trois ou quatre mille équations. Sans tenir compte de cette remarque, le nombre de termes à traiter serait donc de l'ordre de dix millions !

(A suivre.)

## BIBLIOGRAPHIE

**Pompes hydrauliques et appareils élévatoires**, par L. Ducros, ancien élève diplômé de l'Ecole d'électricité et de mécanique industrielles. Paris, Dunod, 1967. — Un volume 15 x 24 cm, xiv + 296 pages, 164 figures. Prix : broché, 56 F.

Ce livre définit succinctement les limites entre lesquelles se situent le choix et l'utilisation rationnelle des pompes centrifuges en regard de leurs applications les plus courantes. En possession de ces éléments de base et à l'intérieur des limites ainsi définies, l'utilisateur est donc capable de résoudre lui-même les innombrables cas d'espèce dont certains, les plus typiques, sont évoqués.

Compte tenu des particularités d'un service bien déterminé, le lecteur trouvera concrétisées les règles essentielles d'ordre général conditionnant le choix, la mise en place et l'exploitation : des groupes électropompes centrifuges, des béliers hydrauliques, des éjecteurs, des pompes volumétriques ainsi que de leurs accessoires et appareils de mise en route, de protection et de contrôle.

Une place importante est réservée à l'entraînement des pompes au moyen de moteurs électriques. Il faut

voir là le fait que ce mode d'attaque a considérablement élargi le champ d'utilisation des pompes centrifuges. En particulier, et grâce à la technique moderne, la commande automatique constitue, dans ce domaine, un élément de souplesse et de sécurité, donc d'économie.

A signaler encore des développements sur les éjecteurs à vide ou à pression d'air et béliers hydrauliques, ainsi que sur le pompage en milieu visqueux (choix de la pompe, pompes volumétriques, calcul des pertes de charge, etc.).

Autant de points particuliers dont la connaissance est utile à l'ingénieur, à l'élève ingénieur et au technicien appelés à se spécialiser dans la mise en pratique des problèmes de pompage en milieux liquides. L'ingénieur trouvera un bref aperçu des méthodes utilisées aux essais des pompes centrifuges, ainsi qu'au calcul des tolérances admises relativement aux performances de ces machines.

#### Sommaire :

1. Les groupes électropompes centrifuges : 1. Pompes centrifuges. — 2. Conduites. — 3. Choix d'une pompe centrifuge. — 4. Choix du moteur d'entraînement. — 5. Commande automatique des pompes centrifuges. — 6. Installation, mise en route et incidents de fonctionnement. —