

**Zeitschrift:** Technische Mitteilungen / Schweizerische Post-, Telefon- und Telegrafienbetriebe = Bulletin technique / Entreprise des postes, téléphones et télégraphes suisses = Bollettino tecnico / Azienda delle poste, dei telefoni e dei telegrafi svizzeri

**Herausgeber:** Schweizerische Post-, Telefon- und Telegrafienbetriebe

**Band:** 33 (1955)

**Heft:** 1

**Artikel:** Schwingungslehre

**Autor:** Druey, W.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-874215>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 31.03.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

TECHNISCHE MITTEILUNGEN

BULLETIN TECHNIQUE

PTT

BOLLETTINO TECNICO

Herausgegeben von der Schweizerischen Post-, Telegraphen- und Telephonverwaltung. Publié par l'administration des postes, télégraphes et téléphones suisses. Pubblicato dall'amministrazione delle poste, dei telegrafi e dei telefoni svizzeri

## Schwingungslehre

Von W. Druey, Winterthur

538.56

Der Begriff Schwingung ist aus der Mechanik in das Gebiet der elektrischen Stromkreise übernommen worden. Man sagt von einem elektrischen Schwingungskreis, es träten darin Schwingungen auf, oder kurz, er schwinde, wenn die Stromstärke und die Spannung sich in gleicher Weise zeitlich ändern wie die Koordinaten, welche die Lage eines schwingenden Körpers beschreiben. Mit Spannungen sind elektrische Felder, mit Strömen magnetische Felder verknüpft, welche die Schwingungen mitmachen. Schwingungen kombinierter elektromagnetischer Felder treten ferner aber auch losgelöst von elektrischen Leitern in Form von elektromagnetischen Wellen auf. Dazu gehören die Radiowellen, ferner das Licht und beispielsweise die Röntgenstrahlen. Diese Gruppen unterscheiden sich nur durch die Frequenz der Schwingung, mit welcher die Wellenlänge im Zusammenhang steht. Ein mechanisches Analogon zu den elektromagnetischen Wellen sind die Schallwellen in Luft. Hier führen die Luftteilchen Schwingungen um eine feste Mittellage aus, wobei gleichzeitig auch der Luftdruck an jeder Stelle um einen Mittelwert schwingt. Bei den elektromagnetischen Wellen gibt es keine sich bewegendenden Teilchen, lediglich die elektrischen und magnetischen Feldgrößen «schwingen».

### Die harmonische Schwingung

Im Mittelpunkt aller Schwingungsformen steht die sogenannte harmonische Schwingung. Es ist die Schwingung, wie sie ein Pendel unter dem Einfluss der Schwerkraft ausführt (streng genommen nur bei sehr kleinen Amplituden in einer Ebene), oder auch die Schwingung eines punktförmigen Körpers mit einem Freiheitsgrad, der durch eine Feder elastisch in seine Gleichgewichtslage zurückgezogen wird. Elektrisch tritt eine harmonische Schwingung in einem Schwingungskreis aus Spule und Kondensator, wie er in Figur 1 dargestellt ist, auf. Der elek-

trische Schwingungskreis kann mit einem mechanischen, schwingungsfähigen Gebilde verglichen werden. So wie bei einer Feder die Kraft proportional der Längenänderung und die Beschleunigung des Körpers proportional der Kraft ist, hat man beim Schwingungskreis eine der Ladung proportionale Spannung, ferner eine der Spannung proportionale Änderungsgeschwindigkeit des Stromes. Spule und Kondensator wollen wir uns zunächst verlustfrei denken.

Denkt man sich, bevor Spule und Kondensator zusammengeschaltet werden, den Kondensator geladen und den Strom naturgemäss noch Null, so beginnt beim Zusammenschluss der Kondensator sich über die Spule zu entladen. Der Strom steigt aber nur allmählich; gemäss Induktionsgesetz ist durch die Spannung eine bestimmte Wachstumsgeschwindigkeit für den Strom festgelegt. Wenn der Strom seinen Maximalwert erreicht hat, ist der Kondensator gerade entladen. Der Strom kann nun aber aus den gleichen Gründen, die für das nur allmähliche Anwachsen verantwortlich sind, nicht plötzlich verschwinden, so

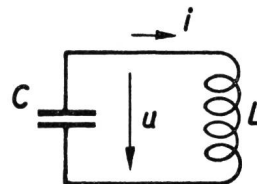


Fig. 1. Schwingungskreis

dass der Kondensator von jetzt an entgegengesetzt aufgeladen wird. In dem Augenblick, in dem der Strom auf Null gekommen ist, hat der Kondensator gerade maximale Ladung und Spannung, jedoch im umgekehrten Sinn wie bei Beginn des Vorganges. In der Fortsetzung entlädt er sich rückwärts über die Spule, wird aber anschliessend sofort wieder im

ursprünglichen Sinne geladen. Schliesslich kann das Spiel von neuem beginnen. Typisch für den Vorgang ist, dass die Energie, die zu Beginn in Form von elektrischer Energie im Kondensator steckt, im Augenblick, in dem die Spannung durch Null geht und der Strom maximal ist, ganz als magnetische Energie in die Spule übergetreten ist. Der Energiebetrag, der im Schwingungskreis steckt, pendelt periodisch zwischen Kondensator und Spule hin und her; die Gesamtenergie bleibt, wenn die Schwingkreiselemente verlustfrei sind, unverändert.

Rechnet man bei der auf die geschilderte Weise entstehenden Schwingung die Zeit vom Augenblick der Vereinigung von Spule und Kondensator an, so hat man für die Spannung  $u$  und den Strom  $i$  zu schreiben:

$$u = \hat{U} \cdot \cos \omega t \quad i = \hat{I} \cdot \sin \omega t$$

Der zeitliche Ablauf dieser Grössen ist in Figur 2 dargestellt; es sind harmonische Funktionen der Zeit. Die Kurvenform ist für beide dieselbe; die zeitliche Versetzung um eine Viertelperiode entspricht einer Phasenverschiebung von  $90^\circ$ . Ganz allgemein wird eine harmonische Schwingung beliebiger Phasenlage durch die Funktionen  $\sin(\omega t + \varphi)$  oder  $\cos(\omega t + \varphi)$  dargestellt. Die Werte  $u$  und  $i$  nennt man die Momentanwerte,  $\hat{U}$  und  $\hat{I}$  die Scheitelwerte oder Amplituden von Spannung und Strom. Erwähnt sei auch, dass sich der quadratische Mittelwert oder Effektivwert bei einer harmonischen Schwingung als Quotient Scheitelwert durch  $\sqrt{2}$  ergibt.  $\omega$  heisst die Kreisfrequenz und hängt mit der eigentlichen Frequenz oder Schwingungszahl  $f$  gemäss  $\omega = 2\pi f$  zusammen. Zwischen der Periode  $T$  und der Frequenz  $f$  besteht die Beziehung:

$$T = \frac{1}{f} \quad f = \frac{1}{T}$$

Überlässt man die Schwingung in einem Schwingungskreis, so wie voranstehend dargestellt, sich selbst, so entsteht die sogenannte Eigenschwingung mit der Eigenfrequenz. Beim verlustfreien Schwingungskreis ist die Eigenfrequenz gleich der Resonanz-

frequenz. Letztere ist diejenige Frequenz, bei der man, auch bei einem mit Verlusten behafteten Schwingungskreis, maximalen Strom erhält, wenn man den Kreis mit einer fremden Schwingung konstanter Spannung in Serie zu Spule und Kondensator erregt. Die Resonanzfrequenz ist durch die Induktivität der Spule und die Kapazität des Kondensators bestimmt, und es betragen:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$$

Zwei Zahlenbeispiele sollen die Grössenordnungen veranschaulichen. Mit  $L = 1 \text{ H}$  und  $C = 1 \mu\text{F}$  ( $1 \text{ F}$  ist ein praktisch nicht vorkommender, sehr grosser Kapazitätswert) beträgt  $T_0 = 6,28 \text{ ms}$ ,  $f_0 = 159 \text{ Hz}$ . Ins Gebiet der Hochfrequenz kommt man mit  $L = 100 \mu\text{H}$ ,  $C = 100 \text{ pF}$ :  $T_0 = 0,628 \mu\text{s}$ ,  $f_0 = 1,59 \text{ MHz}$ .

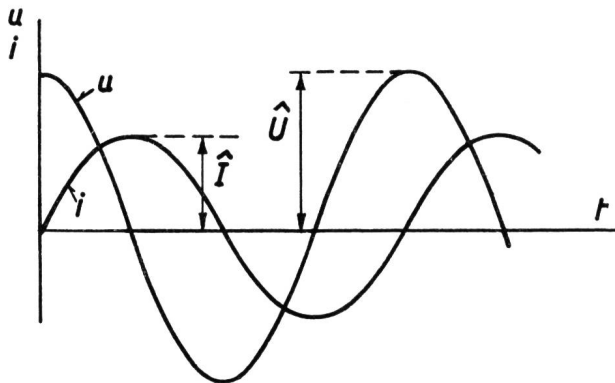


Fig. 2. Verlauf von Spannung  $u$  und Strom  $i$  beim verlustfreien Schwingungskreis (harmonische Schwingungen)

Lage der Zeitachse im Augenblick  $t = 0$

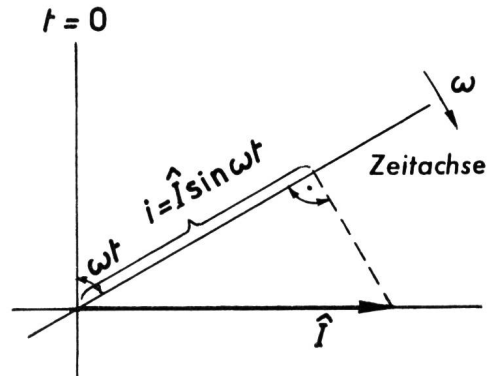


Fig. 3. Zeigerdarstellung für den Strom

Den Ablauf einer harmonischen Schwingung kann man graphisch dadurch erhalten, dass man einen feststehenden Zeiger auf eine mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  rotierende sogenannte Zeitachse projiziert. In Figur 3 ist die Länge der Projektion des Zeigers  $\hat{I}$  gleich dem Momentanwert:  $i = \hat{I} \cdot \sin \omega t$ . Die «Zeitachse» steht im Augenblick  $t = 0$  vertikal, also in Richtung der Ordinatenachse.  $u = \hat{U} \cdot \cos \omega t$

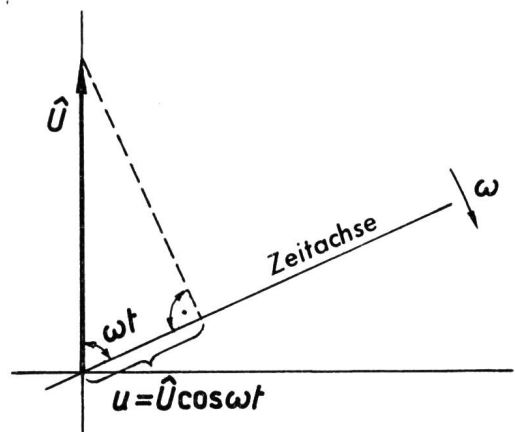


Fig. 4. Zeigerdarstellung für die Spannung

erhält man gemäss Figur 4, indem man den Zeiger der Länge  $\hat{U}$  vertikal stellt, die Zeitachse im übrigen gleich rotieren lässt, wie in Figur 3.

Die harmonische Schwingung verdankt ihre zentrale Bedeutung der Tatsache, dass sie die Schwingungsform ist, mit der ein verlustfreier Schwingungskreis, bestehend aus nur einer Spule und einem Kondensator, schwingt. Ein Schwingungskreis ist nur mit einer einzigen harmonischen Schwingung ganz bestimmter Frequenz in Resonanz. Dazu ist die harmonische Schwingung durch eine besondere geometrische und mathematische Eigenschaft gekennzeichnet: die Steilheit der Kurve, für alle Kurvenpunkte über der jeweiligen Abszissenstelle aufgetragen, ergibt wiederum einen harmonischen Kurvenverlauf. Mathematisch ausgedrückt ist der Differentialquotient der harmonischen Funktion ebenfalls eine harmonische Funktion. Das Analoge gilt naturgemäss für das Integral. Dieser Umstand hat zur Folge, dass beim Anlegen einer harmonisch verlaufenden Spannung an eine beliebige Kombination linearer Schaltelemente (Widerstände, Spulen und Kondensatoren) im eingeschwungenen Zustand immer ein harmonischer Strom entsteht und, umgekehrt, bei harmonischem Strom die Spannung ebenfalls harmonische Kurvenform besitzt.

### Frequenz und Wellenlänge

Bei den elektromagnetischen Schwingungen in Form von Wellen ist der Zusammenhang zwischen Frequenz bzw. Schwingungsdauer, Wellenlänge und Ausbreitungsgeschwindigkeit festzuhalten. Besonders einfach ist das Bild bei der ungedämpften ebenen Welle harmonischer Form. Eine ebene Welle ist eine solche, bei welcher im selben Zeitmoment für alle Punkte von Ebenen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung jeweils der gleiche Feldzustand besteht. Variiert an jedem Ort die Feldgrösse, zum Beispiel die elektrische Feldstärke  $E$ , in Funktion der Zeit harmonisch, so ergibt sich unter der Wirkung der konstanten Wellenfortpflanzungsgeschwindigkeit eine harmonische örtliche Verteilung der betreffenden Feldgrösse. Figur 5 stellt eine solche örtliche Verteilung für einen bestimmten Zeitmoment dar. Die Welle laufe mit der Geschwindigkeit  $c$  in Richtung der wachsenden Koordinate  $x$ . An jedem Ort ist jeweilen

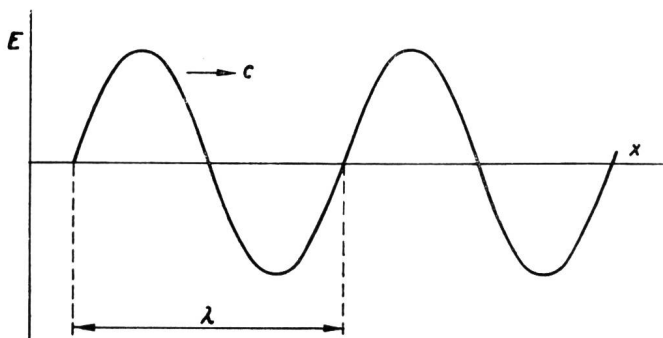


Fig. 5. Harmonische Welle  
 $c$  = Wellengeschwindigkeit  
 $\lambda$  = Wellenlänge

gerade eine Periode abgelaufen, wenn das Wellenbild um die Strecke  $\lambda$ , die Wellenlänge, weitergewandert ist. Daraus erhält man den Zusammenhang:

$$c \cdot T = \lambda \quad \text{oder} \quad \lambda = \frac{c}{f}, \quad f = \frac{c}{\lambda}, \quad f \cdot \lambda = c$$

Man kann auf Grund der letzten Formel auch so überlegen: pro Zeiteinheit, pro Sekunde, gehen  $f$  Wellenlängen an einer bestimmten Stelle hindurch, wobei die Welle gerade die Strecke entsprechend der Zahl  $c$  zurückgelegt hat.

Für die meisten praktischen Zwecke setzt man für die Lichtgeschwindigkeit mit genügender Genauigkeit  $c = 300\,000$  km/s. Einer Frequenz von 1 MHz entspricht daher eine Wellenlänge von 300 m, und bei 1000 MHz errechnet man 0,3 m. Eine elektromagnetische Strahlung mit einer Wellenlänge von  $600 \text{ nm} = 600 \cdot 10^{-9} \text{ m}$  ist orangefarbiges Licht, die entsprechende Frequenz beträgt  $500 \cdot 10^{12} \text{ Hz} =$  Fünfhundertmillionen MHz.

Der erläuterte Zusammenhang zwischen Frequenz und Wellenlänge gilt für jede Art Wellen, insbesondere also auch für Schallwellen. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Schallwellen beträgt in Luft bei  $20^\circ \text{ C}$  rund 340 m/s, so dass zu einer Frequenz von 1000 Hz eine Wellenlänge von 0,34 m gehört.

### Gedämpfte harmonische Schwingung

Die Verluste bei den Schaltelementen eines Schwingungskreises bewirken, dass die Eigenschwingung mehr oder weniger rasch abklingt; es entsteht in Wirklichkeit also keine rein harmonische, sondern

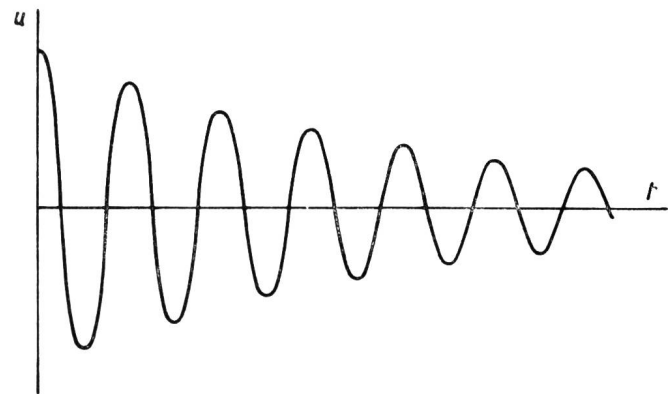


Fig. 6. Gedämpfte harmonische Schwingung

eine gedämpfte harmonische Schwingung. Ein Beispiel ist in Figur 6 dargestellt. Der mathematische Ausdruck für die abklingende Schwingung ist:

$$u = \hat{U} \cdot e^{-at} \cdot \cos \omega_e t$$

Die Dämpfungskonstante  $a$  ist um so grösser, je grösser die Verluste des Schwingungskreises sind.

Die Schwingung ist nicht mehr periodisch, weil ja die Amplitude dauernd abnimmt. Wegen der jedoch nach wie vor periodischen Nulldurchgänge ist trotzdem eine Eigenfrequenz  $f_e$  definiert. Die Verluste bewirken, dass die Eigenfrequenz etwas niedriger als

die Resonanzfrequenz ist, bei geringen Verlusten aber nur verschwindend wenig. Sind die Verluste allerdings sehr gross, so entsteht überhaupt keine Schwingung mehr; eine einmal eingetretene Störung hat im Stromkreis einen sogenannten aperiodischen Ausgleichsvorgang zur Folge.

#### Fourier-Zerlegung nichtharmonischer Schwingungen

Neben den harmonischen Schwingungen sind periodische Schwingungen beliebiger anderer Form denkbar. Eine harmonische Schwingung kann z. B. in einem Verstärker verzerrt werden und gegenüber ihrer ursprünglichen Form mehr oder weniger deformiert sein. Es ist praktisch übrigens gar nicht möglich, eine absolut reine harmonische Schwingung herzustellen. Von grosser Bedeutung sind einige besondere geometrische Formen, deren Idealverlauf praktisch allerdings ebenfalls nicht realisierbar ist. Die beiden wichtigsten sind die in Figur 7 dargestellte Sägezahnform und die Impulsform in Figur 8.

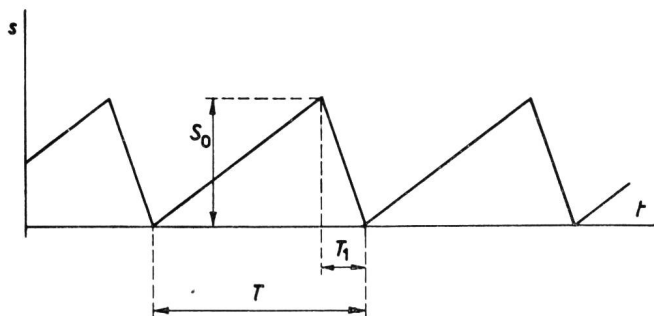


Fig. 7. Sägezahnschwingung

Das Hauptanwendungsgebiet sägezahnförmiger Signale ist die zeitlineare Ablenkung und Wiederrückführung von Elektronenstrahlen in Kathodenstrahlröhren (Oszillographen, Fernsehbildröhren usw.). Impulse werden bei der Impulsmodulation verwendet, wovon das Radar eine Anwendung ist, ferner als Synchronisiersignale, zum Beispiel beim Fernsehen.

Beide Signalformen können, wie erwähnt, nicht in reiner Form erzeugt werden. Bei den Rechteckimpulsen sind die Flanken nicht unendlich steil zu erhalten, die Ecken sind in Wirklichkeit abgerundet. Bei der Sägezahnschwingung wird der Anstieg nicht linear erhalten, wie er häufig sein sollte. Dass keine unendlich steilen Flanken auftreten können, wird sofort klar, wenn man bedenkt, dass bei einer plötzlich springenden Spannung die immer vorhandenen Streukapazitäten unendlich schnell aufgeladen werden

$$\text{Für die Impulsform wird mit } a = \frac{T_1}{T}, \omega_1 = 2\pi f_1, f_1 = \frac{1}{T}: s(t) = \frac{2}{\pi} S_0 \left( \frac{\pi}{2} a + \sin \pi a \cdot \cos \omega_1 t + \frac{1}{2} \sin 2\pi a \cdot \cos 2\omega_1 t + \frac{1}{3} \sin 3\pi a \cdot \cos 3\omega_1 t + \dots \right)$$

Für die Sägezahnschwingung, und zwar im Spezialfall mit  $T_1 = 0$ , gilt:

$$s(t) = \frac{S_0}{\pi} \left( \frac{\pi}{2} + \sin \omega_1 t - \frac{1}{2} \sin 2\omega_1 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_1 t - \frac{1}{4} \sin 4\omega_1 t + \dots \right)$$

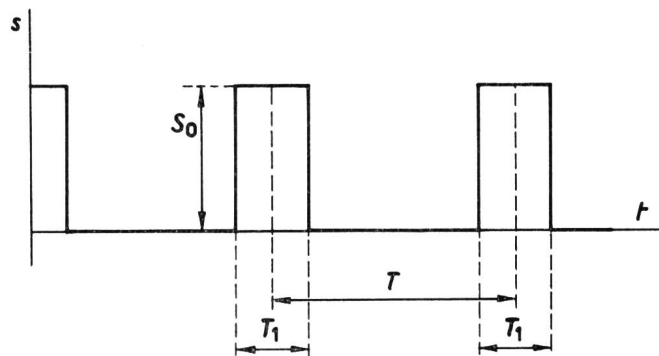


Fig. 8 Rechteckimpulsschwingung

$T$  = Periode  
 $T_1$  = Impulsdauer  
 $\frac{T_1}{T} = a$

müssten, was einen unendlich grossen Strom erforderte. Müsste andererseits ein Strom plötzlich von einem Wert auf einen anderen wechseln, so würde das infolge der unvermeidbaren Kreisinduktivitäten eine unendlich grosse Spannung bedingen. Die Unmöglichkeit, die Idealform herzustellen, geht aber auch aus den folgenden eminent wichtigen Betrachtungen hervor.

Der Mathematiker Fourier (1768...1830) hat gezeigt, dass man jede periodische Funktion, sofern sie eindeutig und stetig ist, in eine Reihe von harmonischen Komponenten zerlegen kann, oder dass man umgekehrt eine periodische nicht harmonische Funktion als Summe von harmonischen Komponenten erhalten kann. Die Frequenzen dieser Komponenten sind eine Grundfrequenz und deren ganzzahlige Vielfache. Die Grundfrequenz entspricht der Periode des zu analysierenden Vorganges:

$$f_1 = \frac{1}{T}$$

Die oberen Harmonischen oder Oberwellen haben die Frequenzen  $2f_1, 3f_1, \dots, nf_1, \dots$ . Um die letzten Feinheiten wiederzugeben, würde es in der Regel unendlich viele Oberwellen brauchen, deren Frequenzen also bis  $f = \infty$  gehen müssten. Das ist die andere Formulierung für den Grund, warum die geometrische Idealform der Rechteckimpuls- und Sägezahnschwingungen praktisch nicht erreichbar ist. Neben den harmonischen Komponenten ist noch der Mittelwert anzuführen, dessen Grösse von der Lage des Signalbildes in bezug auf die Abszissenachse abhängt.

Die Analyse der beiden Signalformen in den Figuren 7 und 8 führt zu den folgenden Fourier-Reihen.



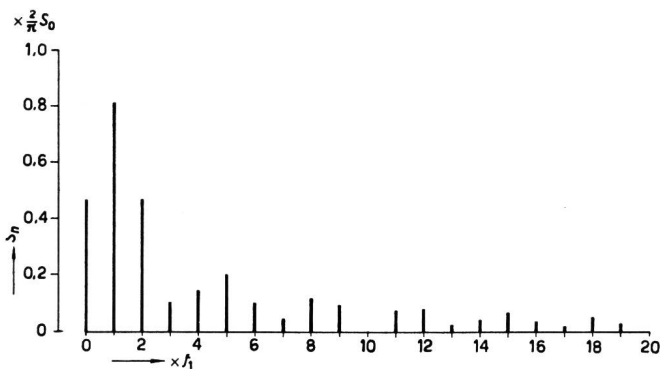


Fig. 9. Amplitudenspektrum der Rechteckimpulsschwingung nach Figur 8 mit  $\alpha = \frac{T_1}{T} = 0,3$  bis  $20 f_1$ , wobei  $f_1 = \frac{1}{T}$

Die Fourier-Zerlegung zeigt, dass ein nicht harmonisches Signal aus einem ganzen Spektrum harmonischer Schwingungen zusammengesetzt ist. In Figur 9 ist ein solches Amplitudenspektrum, analog den Linienspektren in der Optik, für das Rechteckimpulssignal mit  $\alpha = 0,3$  bis zur 20. Harmonischen aufgetragen. Die Höhe der vertikalen Striche entspricht der Amplitude der betreffenden Komponenten. Man folgert aus der Fourieranalyse auch, dass bei der Übertragung, Verstärkung, Wiedergabe usw. eines solchen Signals alle die zugehörigen Komponenten amplituden- und phasentreu verarbeitet werden müssen, wenn das Signal keine Verformung erleiden soll. Das ganze Spektrum kann ein sehr weites Frequenzgebiet umfassen; durch die Übertragung wird daher unter Umständen ein sehr breites Frequenzband belegt.

Figur 10 zeigt, wie das Signal aussieht, wenn von der Reihe der Fourierkomponenten bei der Rechteckimpulsschwingung mit  $T_1 = T/2$  bloss diejenigen bis  $f = 5f_1$  berücksichtigt werden. In diesem Fall von  $\alpha = 0,5$  werden übrigens alle Komponenten mit geradzahligem Vielfachen der Grundfrequenz Null, es verbleiben also nur die ungeraden Harmonischen.

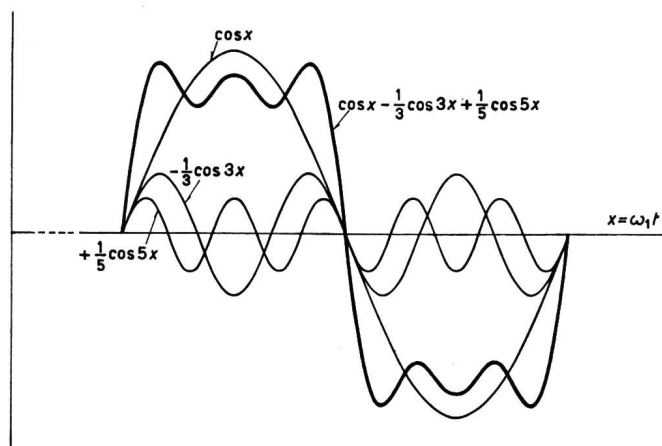


Fig. 10. Ausschau der Rechteckimpulsschwingung mit  $\alpha = \frac{T_1}{T} = 0,5$ , wenn von den *Fourier*-Komponenten nur diejenigen bis  $f_n = 5f_1$  berücksichtigt werden

Auch die Schwingungen, die in der Musik als Klänge bezeichnet werden, lassen sich nach Fourier zerlegen. Die oberen Harmonischen heissen hier Obertöne; ihr Vorkommen und ihre Stärke machten die Klangfarbe aus. Ebenso unterscheiden sich die Vokale der Sprache durch ihren relativen Gehalt an Grundton und Obertönen.

Geräusche sind keine periodischen Schwingungen mehr. Man kann sie zwar ebenfalls noch in ein Spektrum von harmonischen Teilschwingungen zerlegen. Es zeigt sich jedoch, dass man unendlich viele Komponenten unendlich kleiner Amplituden braucht, wobei alle Frequenzen eines gewissen Bereiches mehr oder weniger gleichmässig beansprucht werden. Man erhält mit anderen Worten ein kontinuierliches Spektrum, an Stelle eines solchen von diskreten Schwingungen, ganz analog dem kontinuierlichen Spektrum zum Beispiel des weissen Lichtes in der Optik. Die Phänomene sind eben auch, vom Standpunkt der Schwingungen aus betrachtet, die gleichen.

Die Verzerrung von harmonischen Signalen bei der Übertragung durch nichtlineare Schaltelemente, wie etwa die Elektronenröhren in den Verstärkern, bewirkt das Entstehen von Oberwellen. Man kann die Stärke ihres Auftretens als Mass für die Verzerrung benutzen. Das Verhältnis des Effektivwertes der Gesamtheit aller entstehenden Oberwellen zum Effektivwert des übertragenen Signales selbst heisst Klirrfaktor. Dieser Klirrfaktor darf bei Übertragungsanlagen für Sprache und Musik nicht zu gross sein, wenn die Wiedergabe als gut gelten soll. Er ist allerdings nicht das einzige Kriterium für die Güte.

### Modulierte Schwingungen

Von einer modulierten Schwingung spricht man, wenn einem Trägersignal, einer ursprünglich harmonischen Schwingung, eine Nachricht aufgedrückt wird. Das kann auf zwei grundsätzlich verschiedene Arten erfolgen. Bei der Amplitudenmodulation wird die Amplitude der Schwingung in der gewünschten Weise variiert, im einfachsten Fall so, dass die Amplitudenänderung proportional dem Ablauf des niederfrequenten Nachrichtensignals ist. Bei der Frequenz- bzw. Phasenmodulation beeinflusst man die Frequenz oder die Phase der Trägerschwingung in analoger Weise, wobei die Amplitude konstant bleibt.

Figur 11 stellt ein mit einer harmonischen Schwingung amplitudenmoduliertes Signal dar. Der mathematische Ausdruck dafür ist:

$$s = \hat{S} (1 + m \cdot \sin \mu t) \sin \omega t$$

Es bedeuten darin:  $\omega = 2 \pi f$   $f$  = Trägerfrequenz  
 $\mu = 2 \pi \nu$   $\nu$  = Modulationsfrequenz  
 $m$  = Modulationsgrad

Der Modulationsgrad kann naturgemäss nur Werte zwischen 0 und 1 besitzen.

Um zu zeigen, dass ein so moduliertes Signal in drei harmonische Komponenten aufgelöst werden kann, führen wir folgende trigonometrische Umformung durch:

$$s = \hat{S} (1 + m \cdot \sin \mu t) \sin \omega t = \hat{S} \cdot \sin \omega t + m\hat{S} \cdot \sin \mu t \cdot \sin \omega t$$

$$= \hat{S} \cdot \sin \omega t + \frac{m\hat{S}}{2} \left[ \cos (\omega - \mu) t - \cos (\omega + \mu) t \right]$$

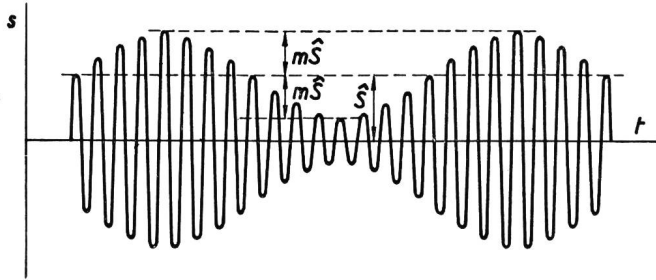


Fig. 11. Harmonisch amplitudenmodulierte Schwingung

Die drei Komponenten sind die Trägerschwingung mit der Trägerfrequenz  $f = \frac{\omega}{2\pi}$  und die beiden Seitenschwingungen mit den Seitenfrequenzen  $f - \nu = \frac{\omega - \mu}{2\pi}$  und  $f + \nu = \frac{\omega + \mu}{2\pi}$ . In Figur 12 sind sie als Spektrum aufgetragen. Die Frequenzen der Seitenschwingungen liegen symmetrisch unterhalb und oberhalb der Trägerfrequenz, von dieser um die Modulationsfrequenz  $\nu$  entfernt.

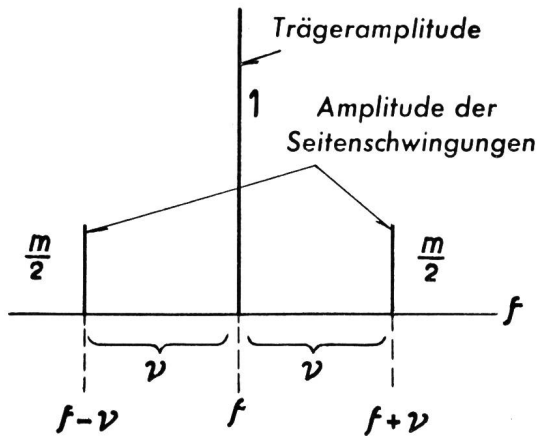


Fig. 12. Spektrum der harmonisch amplitudenmodulierten Schwingung

Das Zusammenspiel der drei Teilschwingungen zur modulierten Schwingung erkennt man sehr anschaulich mit Hilfe eines Zeigerdiagramms. In Figur 13 stellt  $\hat{S}$  den Zeiger für die Trägerschwingung dar. Die Zeitachse rotiere entsprechend der Trägerfrequenz  $f$  mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ . Zum Trägerzeiger sind vektoriell die Zeiger für die Seitenschwingungen zu addieren. Da diese letzteren jedoch nicht die gleiche Frequenz wie der Träger besitzen, lässt man ihre Zeiger relativ zum Trägerzeiger mit der Winkelgeschwindigkeit  $\mu = 2\pi\nu$  umdrehen, den einen im

Uhrzeiger-, den andern im Gegenuhrzeigersinn. Gegenüber der Zeitachse entstehen so die Winkelgeschwindigkeiten  $\omega - \mu$  und  $\omega + \mu$ . Die Lage der Seitenschwingszeiger für den Augenblick  $t = 0$  ergibt sich aus den entsprechenden Gliedern der Schwingungssumme; sie ist in Figur 13 eingezeichnet. Die beiden heben sich in diesem Moment gegenseitig auf. Im Ablauf der Zeit bilden sie jedoch einen veränderlichen Zusatzzeiger gleicher Richtung zum Trägerzeiger. Der resultierende Zeiger variiert seine Länge dadurch in harmonischer Weise im Rhythmus der Modulation, und auf der mit Trägerfrequenz entsprechend rasch rotierenden Zeitachse entsteht durch Projektion in üblicher Weise der Momentanwert.

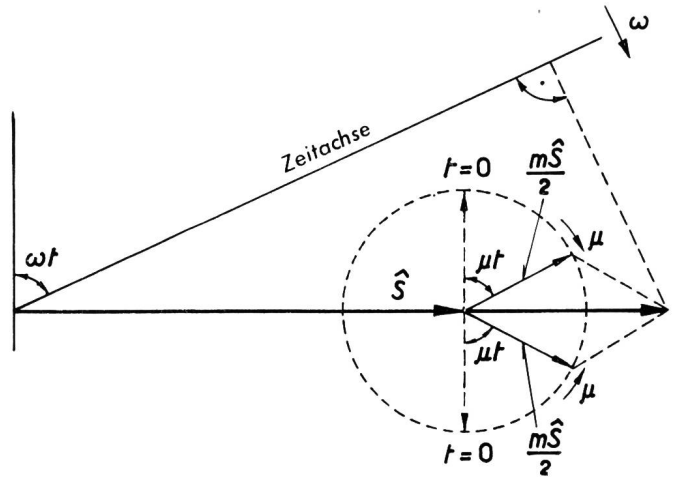


Fig. 13. Zeigerdiagramm der harmonisch amplitudenmodulierten Schwingung

Ist das Modulationssignal kein reiner Ton, sondern wird mit Sprache, Musik oder Schwingungen, wie sie beim Abtasten von Bildern beim Fernsehen entstehen, moduliert, so liegt die Gesamtheit aller Seitenschwingungen, entsprechend den Komponenten im Modulationsfrequenzbereich, in den Seitenbändern unterhalb und oberhalb der Trägerfrequenz. Figur 14 vermittelt davon ein Bild. Die Amplitude der Komponenten in den Seitenbändern ist natürlich von Fall zu Fall sehr verschieden, in der Figur ist die Höhe willkürlich gezeichnet. Das amplitudenmodulierte Signal beansprucht eine totale Frequenzbandbreite, die das Doppelte der höchsten Modulationsfrequenz beträgt.

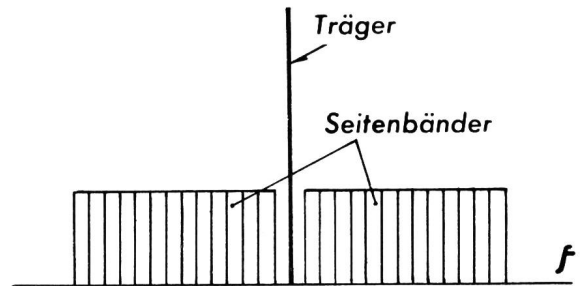


Fig. 14. Spektrum der mit einem Tongemisch amplitudenmodulierten Schwingung

Der Nachrichteninhalte ist im Grunde schon durch ein Seitenband und die Kenntnis der Trägerfrequenz gegeben. Beim Einseitenbandverfahren, das hauptsächlich bei der Trägerfrequenztelefonie und der drahtlosen Telephonie Verwendung findet, wird dementsprechend nur ein isoliertes Seitenband übertragen. Der Träger wird am Empfangsort wieder zugesetzt, und spezielle Schaltungen gestatten es, die Nachricht völlig unverzerrt zurückzugewinnen. Durch dieses Verfahren spart man die Hälfte der für normale Modulation benötigten Frequenzkanalbreite ein. Ausserdem wird weniger Sendeleistung benötigt. Auch beim Fernsehen wendet man nach den CCIR-Normen, obwohl weniger rigoros, dieses Verfahren an, indem zur Einsparung von Bandbreite ein Seitenband wenigstens teilweise unterdrückt wird. Trotzdem ist die erforderliche Bandbreite noch sehr gross, und man versteht, dass man solche Nachrichtenschwingungen nur entsprechend hohen Trägerfrequenzen aufmodulieren kann.

Ein impulsförmig modulierte Signal beansprucht naturgemäss ebenfalls eine grosse Bandbreite, besonders wenn die Flanken der Impulse sehr steil sein sollen. In gewissen Nachrichtensystemen wird mit Hilfe der Impulsmodulation eine Art doppelte Modulation durchgeführt. Der Träger wird mit Impulsen moduliert, die ihrerseits bereits durch die Nachricht moduliert sind, indem ihre Amplitude, ihre Breite, ihre Lage oder ihre Häufigkeit (Impulswiederholungsfrequenz) vom Momentanwert des niederfrequenten Nachrichtensignals abhängig ist.

Frequenz- und Phasenmodulation sind beide durch die Frequenzabhängigkeit der Phase  $\varphi$  im Ausdruck

$$s = \hat{S} \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

gekennzeichnet.

Die Nenn- oder Trägerkreisfrequenz  $\omega$  ist auch bei Frequenzmodulation konstant. Die Verhältnisse und insbesondere der Unterschied zwischen Frequenz- und Phasenmodulation lassen sich wiederum am einfachsten anhand eines Zeigerdiagramms erläutern. In Figur 15 bleibt die Länge des Zeigers  $\hat{S}$  unverändert, er pendelt aber um seine Mittellage, so dass  $\varphi$  eine Funktion der Zeit ist. Dadurch variiert auch die relative Winkelgeschwindigkeit zur Zeitachse, die mit der Nennkreisfrequenz rotiert. Man erkennt, dass Phasen- und Frequenzmodulation immer miteinander verknüpft auftreten. Der Unterschied zwischen den beiden besteht darin, dass bei der Phasenmodulation der Ablauf des Phasenwinkels  $\varphi$  direkt dem Modulationssignal proportional ist, während bei Frequenzmodulation die Abweichung des Momentanwertes der Frequenz von ihrem Mittelwert (Nennwert) proportional dem Momentanwert der Modulationsschwingung sein soll. Letzteres bedingt eine entsprechende Winkelgeschwindigkeit des Zeigers gegenüber seiner Ruhelage. Betrachtet man nur Modulation mit harmonischen Schwingungen, so ist bei Phasenmodulation der Ausschlag des Zeigers, der

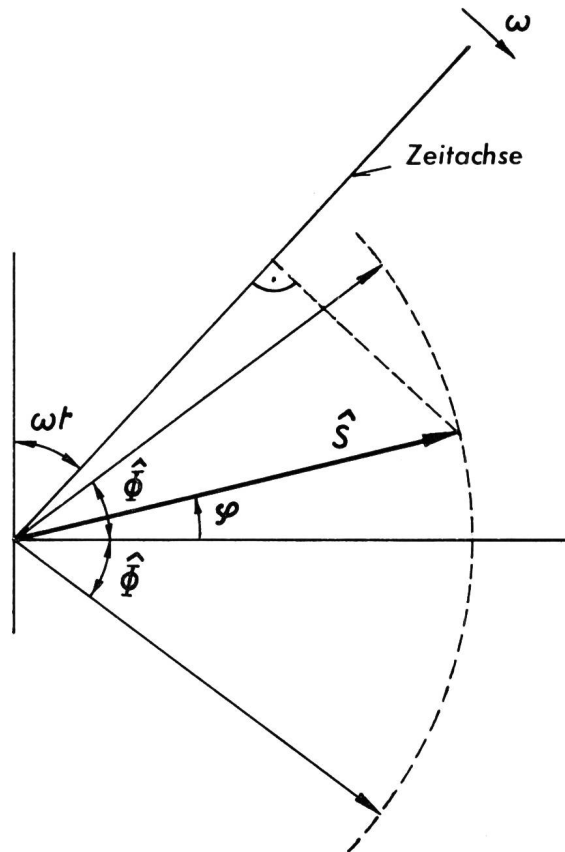


Fig. 15. Zeigerdiagramm für frequenz- und phasenmodulierte Schwingungen

Phasenhub  $\hat{\varphi}$ , von der Modulationsfrequenz unabhängig. Bei Frequenzmodulation hingegen würde bei konstantem Phasenhub der Zeiger mit höherer Modulationsfrequenz immer rascher schwingen, was auch eine grössere Frequenzabweichung, einen proportional höheren Frequenzhub ergäbe. Damit der Frequenzhub der gleiche bleibt, muss also mit wachsender Modulationsfrequenz der Phasenhub entsprechend kleiner sein.

Ein harmonisch frequenz- oder phasenmoduliertes Signal lässt sich auch wieder in eine Summe von harmonischen Komponenten zerlegen. Die Analyse ist aber nicht so einfach wie bei der amplitudenmodulierten Schwingung. Es zeigt sich, dass unendlich viele Komponenten, deren gegenseitiger Abstand gleich der Modulationsfrequenz ist, auf beiden Seiten der Trägerfrequenz nötig sind. Ihre Amplituden besitzen in grösserem Abstand als etwa 1,3mal den Frequenzhub jedoch nur noch sehr kleine Werte, so dass man die weiter weg liegenden Teilschwingungen praktisch vernachlässigen kann. Man kann also sagen, dass ein frequenz- bzw. phasenmoduliertes Signal einen Frequenzkanal beansprucht, dessen Breite etwa um ein Drittel grösser ist als das Doppelte des höchsten vorkommenden Frequenzhubes.

Adresse des Verfassers: Prof. Dr. W. Druey, Büelweg 5, Winterthur.