Zeitschrift: Technische Mitteilungen / Schweizerische Post-, Telefon- und Telegrafenbetriebe = Bulletin technique / Entreprise des postes, téléphones et télégraphes suisses = Bollettino tecnico / Azienda delle poste, dei telefoni e dei telegrafi svizzeri

Herausgeber: Schweizerische Post-, Telefon- und Telegrafenbetriebe

Band: 45 (1967)

Heft: 6

Artikel: Elemente der Vektoranalysis

Autor: Carnal, Henri

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-874884

Elemente der Vektoranalysis[1]

Henri CARNAL, Bern

512.942

Zusammenfassung. *Die Grundoperatoren der Vektoranalysis, Gradient, Divergenz, und Rotor, werden definiert. Die Hauptsätze der Vektoranalysis sind der Gausssche Integralsatz und der Satz von Stokes, deren Beweise hier nur skizziert werden. Sodann wird der Operator 2. Ordnung △ (Laplacescher Operator) definiert. Schliesslich werden die Operatoren grad, div und △ durch partielle Ableitungen in rechtwinkligen, krummlinigen (anstatt nur in euklidischen) Koordinatensystemen ausgedrückt.*

Eléments de l'analyse vectorielle

Résumé. *Les opérateurs fondamentaux de l'analyse vectorielle, gradient, divergence et rotation sont définis. Les théorèmes fondamentaux de cette analyse sont ceux de Gauss et de Stokes dont nous ne faisons qu'esquisser la démonstration. L'opérateur d'ordre 2 △ (opérateur de Laplace) est ensuite défini. Finalement, les opérateurs grad, div et △ sont exprimés par des dérivées partielles dans des systèmes généraux de coordonnées orthogonales (non euclidiennes).*

Elementi di analisi vettoriale

Riassunto. *Si definiscono gli operatori fondamentali dell'analisi vettoriale e cioè: gradiente, divergenza e rotovettore. I teoremi fondamentali dell'analisi vettoriale, il lemma di Gauss e il teorema di Stokes, vengono qui dimostrati soltanto con degli schizzi. Viene inoltre definito l'operatore di secondo grado △ («Delta due» – operatore di Laplace). Da ultimo gli operatori gradiente, divergenza e △ vengono anche espressi con derivate parziali in sistemi di coordinate ortogonali e curvilinee (e non unicamente in sistemi euclidei).*

1. Summen und Produkte von Vektoren

Viele physikalische Grössen (z. B. Geschwindigkeiten, elektrische oder magnetische Feldstärken) werden durch eine einzige Zahl noch nicht definiert, sondern erst durch die Angabe eines Betrages *und* einer Richtung. Solche Grössen nennt man Vektoren. Zeichnerisch werden sie dargestellt durch Pfeile, deren Länge gleich dem Betrag der physikalischen Grösse ist und deren Richtung die Richtung der physikalischen Grösse gibt. Es ist üblich, solche Vektoren, etwa ***a***, ***b***, ..[2], in Komponenten, etwa a_1, a_2, a_3 oder b_1, b_2, b_3,.., zu zerlegen, nachdem man sich im Raum drei feste, aufeinander senkrechte Richtungen, zum Beispiel durch die Koordinatenachsen x_1, x_2, x_3, gegeben hat *(Fig. 1)*.

Man schreibt $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ und berechnet die Länge $|\boldsymbol{a}|$ des Vektors, nach dem pythagoräischen Lehrsatz, wie folgt:

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Ist λ eine beliebige Zahl, so wird $\boldsymbol{a}\lambda$ definiert durch:

$$\boldsymbol{a}\lambda = (a_1\lambda, a_2\lambda, a_3\lambda) \tag{1}$$

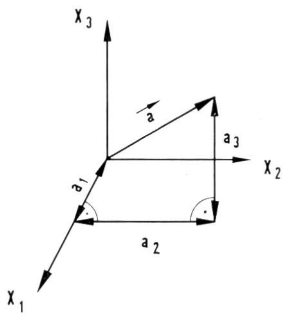

Fig. 1

Die Summe von zwei Vektoren ***a*** und ***b*** ist:

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) \tag{2}$$

In der Vektorrechnung werden zweierlei Produkte von Vektoren verwendet:

a) Das skalare (oder innere) Produkt definiert durch

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \tag{3}$$

Man kann leicht zeigen, dass dieses Produkt auch gleich $|\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cos\alpha$ ist, wobei α der Winkel zwischen den Richtungen von ***a*** und ***b*** bedeutet *(Fig. 2)*. Demnach verschwindet das skalare Produkt genau dann, wenn ***a*** und ***b*** senkrecht aufeinander stehen.

b) Das vektorielle (oder äussere) Produkt definiert durch

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) \tag{4}$$

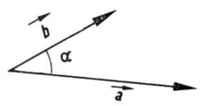

Fig. 2

Der Betrag $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|$ dieses Vektors ist $|\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cdot |\sin\alpha|$, das heisst gleich der Fläche des in *Fig. 3* gezeichneten Parallelogramms π, und seine Richtung bildet sowohl mit der Richtung von ***a*** als auch mit der von ***b*** einen rechten Winkel. Der Sinn ist so gewählt, dass ***a***, ***b*** und $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ eine Rechtsschraube bilden. Es gilt $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$, und das vektorielle Produkt verschwindet genau dann, wenn ***a*** und ***b*** dieselbe Richtung haben.

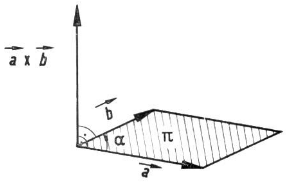

Fig. 3

[1] Nach einem Vortrag, gehalten am Kolloquium über die Theorie der elektromagnetischen Wellen, an der Universität Bern (Oktober–Dezember 1966).

[2] Im Druck werden Vektoren als kursive, fette Buchstaben – in diesem Beispiel ***a***,***b*** – dargestellt. Diese satztechnisch einfachere Lösung wird auch im vorliegenden Beitrag angewendet.

Schliesslich wird auch ein Produkt von drei Vektoren, das gemischte Produkt $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$, definiert durch

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \tag{5}$$

Dies ist das Volumen des Parallelipipeds mit den Seiten $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{c}$, positiv gerechnet, wenn $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{c}$ (wie in *Fig. 4*) eine Rechtsschraube bilden, und sonst negativ. Es ist also:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}) = -(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) = \ldots \tag{6}$$

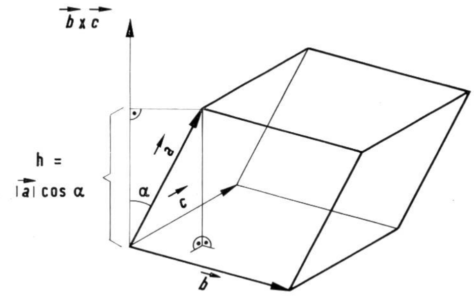

Fig. 4

2. Der Gradient eines skalaren Feldes

Wird in einem räumlichen Gebiet eine skalare Grösse u (zum Beispiel die Temperatur) als Funktion des Ortes gegeben, so entsteht ein sogenanntes skalares Feld. Es stellt sich oft die folgende Frage: Wie ändert sich die Funktion u, wenn man von einem Punkt P zu einem benachbarten Punkt P' übergeht? Dies lässt sich so beantworten:
Man zerlegt den Vektor $\boldsymbol{ds}$ *(Fig. 5)* in Komponenten dx_1, dx_2, dx_3. Es ist

$$u(P') - u(P) = [u(Q) - u(P)] + [u(R) - u(Q)] + [u(P') - u(R)]$$

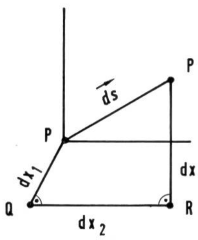

Fig. 5

Nach der Definition der partiellen Ableitung ist aber

$$u(Q) - u(P) = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1, \text{ usw.,}$$

wenn wir uns $\boldsymbol{ds}$ unendlich klein denken. Also

$$du = u(P') - u(P) = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u}{\partial x_3} dx_3$$

Definiert man jetzt einen Vektor grad u durch

$$\text{grad } u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial u}{\partial x_3}\right) \tag{7}$$

so gilt

$$du = \text{grad } u \cdot \boldsymbol{ds} \tag{8}$$

Dieses Produkt verschwindet, wenn grad u senkrecht auf $\boldsymbol{ds}$ steht. Der Vektor grad u muss also senkrecht auf den Niveauflächen u = const. stehen. Er zeigt in die Richtung des steilsten Anstieges (für festes $|\boldsymbol{ds}|$ ist du maximal, falls der Winkel zwischen grad u und $\boldsymbol{ds}$ Null ist) und gibt mit seinem Betrag die Grösse dieses maximalen Anstieges an.

Ein Vektorfeld wird definiert durch die Angabe einer vektoriellen Grösse $\boldsymbol{v}$ als Funktion des Ortes P. Ein Beispiel dafür liefert das Feld $\boldsymbol{v}$ = grad u (dieser Vektor muss in jedem Punkt berechnet werden). Es besitzt folgende Eigenschaft *(Fig. 6)*: Ist C eine Raumkurve mit Anfangspunkt in P und Endpunkt in Q, so folgt aus (8):

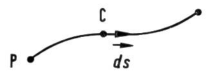

Fig. 6

$$\int_C \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{ds} = \int_C \text{grad } u \cdot \boldsymbol{ds} = \int_C du = u(Q) - u(P) \tag{9}$$

Das heisst: der Wert des Integrals hängt nur vom Anfangs- und Endpunkt ab, nicht aber von der Kurve C. Insbesondere gilt für eine geschlossene Kurve C (P = Q):

$$\oint_C \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{ds} = u(P) - u(P) = 0 \tag{10}$$

Umgekehrt kann man zeigen, dass ein Vektorfeld mit der Eigenschaft (10) ein Gradientenfeld ist: $\boldsymbol{v}$ = grad u für eine bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmte Funktion u. Ein derartiges Feld wird auch Potentialfeld genannt und die Funktion $-u = \varphi$ das Potential dieses Feldes.

3. Begriff der Divergenz

Ist ein Vektorfeld $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ gegeben, so wird seine Divergenz definiert durch:

$$\text{div } \boldsymbol{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \tag{11}$$

Einer der wichtigsten Sätze der Vektoranalysis ist der sogenannte Gausssche Integralsatz:

$$\int_B \text{div } \boldsymbol{v} \cdot dV = \int_{\text{Rand } B} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{df} \tag{12}$$

Dabei ist B ein beliebiges räumliches Gebiet, in welchem $\boldsymbol{v}$ und div $\boldsymbol{v}$ definiert sind, dV das Volumenelement und $\boldsymbol{df}$ das orientierte Flächenelement, das heisst, für jedes Element der Oberfläche von B ein Vektor, dessen Richtung die Richtung der äusseren Normalen $\boldsymbol{n}$ und dessen Betrag der Flächeninhalt des betreffenden Elementes ist *(Fig. 7)*. Die absoluten

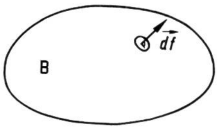

Fig. 7

Beträge der Komponenten df_1, df_2, df_3 von $\boldsymbol{df}$ sind die Flächen der Projektionen des Flächenelementes auf die (x_2, x_3) — beziehungsweise (x_3, x_1) — und (x_1, x_2) — Ebene.

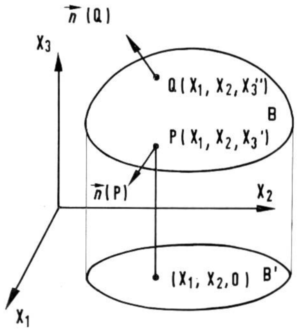

Fig. 8

Der Beweis des Satzes sei hier kurz angedeutet. Wir berechnen für das Gebiet B *(Fig. 8)* und eine beliebige Funktion u das Integral

$$\int_B \frac{\partial u}{\partial x_3} dV = \int_B \frac{\partial u}{\partial x_3} dx_1 \cdot dx_2 \cdot dx_3 =$$

$$= \int_{B'} dx_1 \cdot dx_2 \int_{X'_3}^{X''_3} \frac{\partial u}{\partial x_3} dx_3 = \int_B dx_1 \cdot dx_2 \, [u\,(Q) - u\,(P)]$$

Nun ist $dx_1 . dx_2$ der Inhalt der Projektion eines Flächenelementes um P beziehungsweise Q auf die (x_1, x_2)-Ebene. Da die Normale in Q nach oben, in P nach unten zeigt, ist $dx_1 dx_2 = +df_3\,(Q) = -df_3\,(P)$. Also kann man das Integral schreiben:

$$\int_{B'} [u\,(Q)\, df_3\,(Q) + u\,(P)\, df_3\,(P)]$$

Lässt man (x_1, x_2) in B′ variieren, so bewegen sich P und Q derart, dass die Oberfläche von B von den betrachteten Flächenelementen genau einmal überdeckt wird. Es ist also

$$\int_B \frac{\partial u}{\partial x_3} dV = \int_{\text{Rand B}} u \cdot df_3 \qquad (13)$$

Die Formel ist natürlich auch richtig mit dem Index 1 oder 2 anstatt 3:

$$\int_B \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot dV = \int_{\text{Rand B}} u \cdot df_i \qquad i = 1, 2 \text{ oder } 3 \qquad (13')$$

Setzen wir in (13′) der Reihe nach $u = v_1$ und $i = 1$, $u = v_2$ und $i = 2$, $u = v_3$ und $i = 3$ und addieren wir die drei erhaltenen Gleichungen, so bekommen wir (12).

Diese Formel (12) erlaubt es, die physikalische Bedeutung der Grösse div $\boldsymbol{v}$ zu veranschaulichen. Ist nämlich B ein sehr kleines Gebiet um den Punkt P (etwa mit dem Volumen $|B|$), so ist der Integrand auf der linken Seite von (12) ungefähr konstant und gleich div $\boldsymbol{v}$(P). Es gilt also

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} \cdot |B| \cong \int_{\text{Rand B}} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{df} \quad : \quad \operatorname{div} \boldsymbol{v} = \lim_{B \to 0} \frac{\int_{\text{Rand B}} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{df}}{|B|} \qquad (14)$$

Man kann sich jetzt $\boldsymbol{v}$ als die (von der Zeit unabhängige) Geschwindigkeit einer Flüssigkeit im Punkte P vorstellen. Dann ist das skalare Produkt $\boldsymbol{v} . \boldsymbol{df}$ die Flüssigkeitsmenge, die in der Zeiteinheit (etwa in einer Sekunde) durch das Oberflächenelement strömt. Das Vorzeichen dieses Produkts ist positiv, wenn die Flüssigkeit aus dem Gebiet B hinausströmt, negativ, wenn sie in B hineinströmt. Das ganze Integral $\int_{\text{Rand B}} \boldsymbol{v}\, \boldsymbol{df}$ ist demnach der Überschuss der sekundlich von innen nach aussen strömenden Flüssigkeit, mit anderen Worten: die in B während einer Sekunde entstandene (oder verlorengegangene) Flüssigkeitsmenge. Die Division durch $|B|$ bedeutet, dass man diese Flüssigkeitsmenge auf eine Volumeneinheit bezieht. Zusammengefasst: *Die Grösse div* $\boldsymbol{v}$ *ist die Quellenergiebigkeit in P je Zeit- und Volumeneinheit.*

Eine ähnliche Bedeutung bekommt man, wenn $\boldsymbol{v}$ andere Grössen als Geschwindigkeiten darstellt. Im nächsten Artikel dieser Reihe wird zum Beispiel gezeigt, dass die Divergenz des elektrischen Feldes proportional zur Ladungsdichte ist (die Ladungen sind die «Quellen» des elektrischen Feldes).

Ein Feld mit der Eigenschaft, dass div $\boldsymbol{v} = 0$ ist, heisst *quellenfrei.*

4. Begriff des Rotors

Für ein Vektorfeld v ist der Vektor rot $\boldsymbol{v}$ (Rotor von v) definiert durch

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}, \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}, \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) \qquad (15)$$

Setzt man in (13′) der Reihe nach $u = v_3$ und $i = 2$, $u = v_2$ und $i = 3$, $u = v_1$ und $i = 3$, $u = v_3$ und $i = 1$, $u = v_2$ und $i = 1$, $u = v_1$ und $i = 2$ ein, zieht man die zweite der so erhaltenen Gleichungen von der ersten ab, die vierte von der dritten, die sechste von der fünften und fasst man die Integranden auf der linken und rechten Seite dieser Differenzen als Komponenten eines Vektors auf, so erhält man:

$$\int_B \operatorname{rot} \boldsymbol{v} \cdot dV = \int_{\text{Rand } B} d\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{v} \qquad (16)$$

Eine ähnliche Überlegung wie jene, die zu Formel (14) führte, ergibt hier für ein kleines Gebiet B um den Punkt P:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{v}\,(P) \cong \frac{\displaystyle\int_{\text{Rand } B} d\boldsymbol{f} \times \boldsymbol{v}}{|B|} \qquad (17)$$

Dies zeigt insbesondere, dass man rot $\boldsymbol{v}$ auch unabhängig vom Koordinatensystem definieren kann.

Wichtiger als dieses Resultat ist aber der Satz von *Stokes*:

$$\int_F \operatorname{rot} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{f} = \oint_{\text{Rand } F} \boldsymbol{v}\, d\boldsymbol{s} \qquad (18)$$

Dabei ist F ein beliebiges orientierbares Flächenstück im Raum und die Richtung der Normalen (das heisst von $d\boldsymbol{f}$) ist so gewählt, dass am Rand die Vektoren $d\boldsymbol{s}$ (in Richtung des Umlaufsinnes auf C), $\boldsymbol{a}$ (ein Tangentialvektor, der in das Flächenstück hineinzeigt) und $\boldsymbol{n}$ eine Rechtsschraube bilden *(Fig. 9)*.

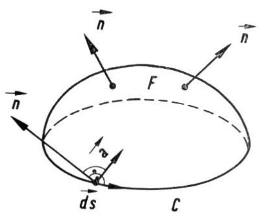

Fig. 9

Der Beweis sei wieder nur kurz skizziert:

Wir betrachten zuerst ein Gebiet B in der (x_1, x_2)-Ebene mit der Randkurve C. Für eine Funktion $u\ (x_1, x_2)$ gilt dann, wenn die Kurve C im positiven Sinne umlaufen wird *(Fig. 10)*:

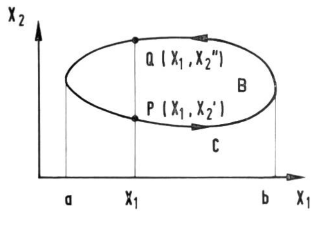

Fig. 10

$$\int_B \frac{\partial u}{\partial x_2}\, dx_1\, dx_2 = \int_a^b dx_1 \int_{X'_2}^{X''_2} \frac{\partial u}{\partial x_2}\, dx_2 =$$

$$= \int_a^b [u\,(Q) - u\,(P)]\, dx_1 = - \oint_C u \cdot dx_1 \qquad (19)$$

sowie

$$\int_B \frac{\partial u}{\partial x_1}\, dx_1\, dx_2 = \oint_C u \cdot dx_2 \qquad (20)$$

Setzt man $u = -v_1$ in (19) und $u = v_2$ in (20) und addiert man die Gleichungen, so erhält man (unter Benützung von $d\boldsymbol{f} = \boldsymbol{i}_3\, dx_1\, dx_2$, $\boldsymbol{i}_3$ Einheitsvektor in Richtung der x_3-Achse):

$$\int_B \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right) dx_1\, dx_2 = \int_B (\operatorname{rot} v)_3\, dx_1\, dx_2 =$$

$$\int_B \operatorname{rot} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{f} = \oint_C (v_1\, dx_1 + v_2\, dx_2) = \oint_C \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{s}$$

Also:

$$\int_B \operatorname{rot} \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{f} = \oint_C \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{s} \qquad (21)$$

Da die Definition von rot $\boldsymbol{v}$ vom Koordinatensystem unabhängig ist, wird diese Formel auch für ein beliebiges ebenes Flächenstück gültig bleiben. Ein allgemeines Flächenstück können wir dann in kleine Elemente zerlegen, die alle ungefähr eben sind, für die also Gleichungen wie (21) gelten (abgesehen von kleinen Korrekturen, die beim Grenzübergang verschwinden). Addieren wir alle Gleichungen, so heben sich auf der rechten Seite die Umläufe um die inneren Begrenzungslinien auf, da jedes Stück zweimal mit entgegengesetztem Sinn durchlaufen wird *(Fig. 11)*. Es bleibt also rechts das Integral über die Randkurve und man erhält (18).

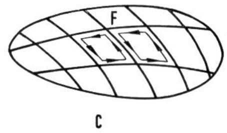

Fig. 11

Weil für ein Gradientenfeld immer (10) gilt, muss der Rotor in diesem Fall verschwinden. Umgekehrt ist ein Feld, wo der Rotor identisch verschwindet, ein Gradientenfeld. Man spricht auch von einem *wirbelfreien* Feld.

5. Der Nablaoperator

Die oben eingeführten Operationen lassen sich formal rasch ausführen mit Hilfe des symbolischen Vektors

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right), \qquad (22)$$

den man den Nablaoperator nennt. Formal kann man schreiben:

grad u $= \nabla$ u (vgl. (1) und (7))
div $\boldsymbol{v} = \nabla . \boldsymbol{v}$ (vgl. (11))
rot $\boldsymbol{v} = \nabla \times \boldsymbol{v}$ (vgl. (15)).

Viele Formeln lassen sich nun durch Analogie mit den Regeln der Vektormultiplikation leicht erraten. Zum Beispiel führt

$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{a}\lambda) = \sigma$ beziehungsweise $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\times \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b}\,(\boldsymbol{a}\times \boldsymbol{a}) = 0$
auf $\nabla\times(\nabla$ u$) = \sigma$ beziehungsweise $\nabla(\nabla\times \boldsymbol{v}) = 0$
das heisst
rot grad u $= \sigma$ beziehungsweise div rot $\boldsymbol{v} = 0$. (23)

Man muss aber beachten, dass ∇ nicht nur ein Vektor, sondern auch ein Differentialzeichen ist. Steht beispielsweise ∇ vor einem Produkt, so muss die Berechnung unter Berücksichtigung der Produktregel der Differentialrechnung erfolgen. Durch Analogie mit

$$\frac{d}{dx}(fg) = \frac{d}{dx}(f \cdot g_c) + \frac{d}{dx}(f_c \cdot g) = g\,\frac{d}{dx}f + f\,\frac{d}{dx}g$$

(der Index c bedeutet, dass die Funktion während des Differenzierens konstant gehalten wird), findet man:

$$\nabla\,(\boldsymbol{v}\times \boldsymbol{w}) = \nabla\,(\boldsymbol{v}\times \boldsymbol{w}_c) + \nabla\,(\boldsymbol{v}_c\times \boldsymbol{w}) = (\nabla, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_c) + (\nabla, \boldsymbol{v}_c, \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{w}_c, \nabla, \boldsymbol{v}) - (\boldsymbol{v}_c, \nabla, \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{w}\,(\nabla\times \boldsymbol{v}) - \boldsymbol{v}\,(\nabla\times \boldsymbol{w})$$

(vgl. (6) für die Umformungen), also:

$$\text{div}\,(\boldsymbol{v}\times \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{w}\cdot \text{rot}\,\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}\cdot\text{rot}\,\boldsymbol{w} \qquad (24)$$

6. Der Laplacesche Operator

Eine sehr wichtige Rolle spielt in der Physik der Operator

$$\triangle f = \nabla\cdot\nabla f = \text{div grad } f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2_1} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2_2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2_3} \qquad (25)$$

den man den Laplaceschen Operator nennt. Ähnlich definiert man $\triangle \boldsymbol{v}$, für ein Vektorfeld $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$, als den Vektor mit den Komponenten $\triangle v_1$, $\triangle v_2$ und $\triangle v_3$. Auch dies ist ein in der Elektrodynamik oft auftretender Ausdruck. Man trifft ihn zum Beispiel in der Formel

$$\text{rot rot}\,\boldsymbol{v} = \nabla\times(\nabla\times \boldsymbol{v}) = \nabla(\nabla . \boldsymbol{v}) - (\nabla . \nabla)\,\boldsymbol{v} = \text{grad div}\,\boldsymbol{v} - \triangle\,\boldsymbol{v} \qquad (26)$$

die aus der Vektoridentität gewonnen wird:

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}\,(\boldsymbol{a}\cdot \boldsymbol{c}) - (\boldsymbol{a}\cdot \boldsymbol{b})\,\boldsymbol{c}$$

7. Rechtwinklige, krummlinige Koordinaten

Oft ist es zweckmässig, die Lage eines Raumpunktes nicht durch kartesische Koordinaten, sondern durch andere Parameter zu beschreiben, die meistens durch die Natur der zu lösenden Aufgabe vorgegeben sind. Als Beispiel nennen wir

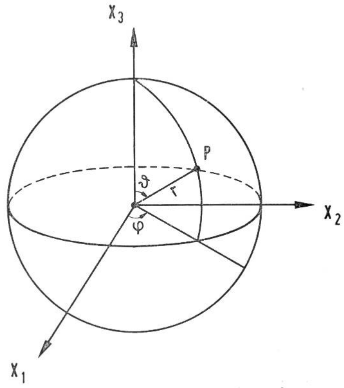

Fig. 12

a) die Kugelkoordinaten *(Fig. 12)*, bei denen der Punkt P gegeben wird durch:
r = Abstand zum Nullpunkt,
ϑ = Winkel zwischen der x_3-Achse und dem Ortsvektor und
φ = Winkel zwischen der x_1-Achse und der Projektion des Ortsvektors auf die (x_1, x_2)-Ebene;

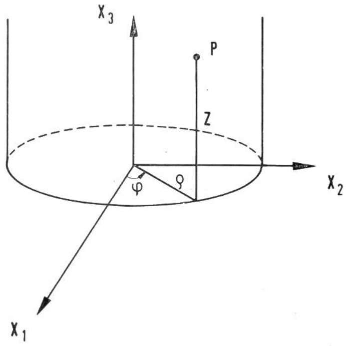

Fig. 13

b) die Zylinderkoordinaten *(Fig. 13)*, wo der Punkt P gegeben wird durch:
ϱ = Abstand zur x_3-Achse,
φ = (wie vorhin) und
$z = x_3$.

Um beide Fälle zu erfassen, betrachten wir ein allgemeines Koordinatensystem mit den Parametern q_1, q_2 und q_3. Wir verlangen nur, dass die Niveauflächen q_1 = const., q_2 =

const. und $q_3 =$ const. sich unter rechten Winkeln schneiden.

Es stellt sich jetzt die Aufgabe, die Operatoren grad, div und vor allem $\triangle =$ div grad durch Ableitungen nach q_1, q_2 und q_3 auszudrücken. Dazu betrachten wir ein kleines Gebiet in der Nähe des Punktes P, begrenzt durch die Flächen $q_i = q_i\,(P)$ und $q_i = q_i\,(P) + dq_i$, wobei i der Reihe nach die Werte 1, 2 und 3 nehmen soll *(Fig. 14)*.

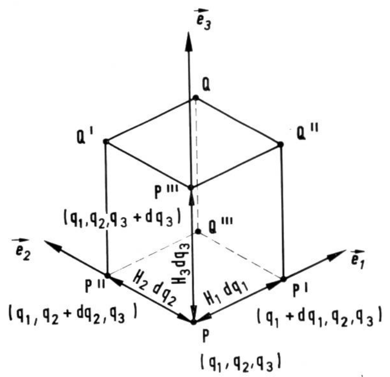

Fig. 14

Der Abstand zwischen P und P′ (oder P″, P‴) wird die Form H_1dq_1 (oder H_2dq_2, H_3dq_3) haben, wobei H_1, H_2 und H_3 Funktionen von P sind, die in praktischen Fällen oft sehr leicht zu bestimmen sind.

Die Einheitsvektoren in den Richtungen der Achsen durch P seien $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ und $\boldsymbol{e}_3$. Dann ist zum Beispiel der Vektor $\boldsymbol{ds}_1$ mit Anfangspunkt in P und Endpunkt in P′ gleich $H_1dq_1\ \boldsymbol{e}_1$. Nach (8) gilt deshalb für eine skalare Funktion u:

$$du = u\,(P') - u\,(P) = H_1 dq_1\,(\mathrm{grad}\,u \cdot \boldsymbol{e}_1)$$

Dieses du ist aber, nach der Definition der partiellen Ableitung, gleich $\frac{\partial u}{\partial q_1} \cdot dq_1$. Ähnliche Überlegungen gelten für die Differenzen $u\,(P'') - u\,(P)$ und $u\,(P''') - u\,(P)$. Also ist

$$\mathrm{grad}\,u \cdot \boldsymbol{e}_i = \frac{1}{H_i} \cdot \frac{\partial u}{\partial qi} \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{27}$$

Ist ein Vektorfeld $\boldsymbol{v}$ gegeben, so kann man in jedem Punkt $\boldsymbol{v}$ zerlegen in Komponenten v_1, v_2 und v_3 mit $v_i = \boldsymbol{v} . \boldsymbol{e}_i$. Wir berechnen jetzt div $\boldsymbol{v}$ nach (14), wobei wir als Gebiet B den in Figur 14 abgebildeten Parallelipiped nehmen. Für die Seite PP″Q′P‴ ist $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{df} = \boldsymbol{v}\,(-H_2H_3\,dq_2dq_3 \cdot \boldsymbol{e}_1) =$
$= -\,v_1H_2H_3\,dq_2dq_3$
Für die Seite P′Q‴QQ″ erhalten wir denselben Ausdruck, diesmal aber mit einem Pluszeichen und für den Wert $q_1 = q_1\,(P) + dq_1$ des ersten Parameters. Die Summe liefert also

$$\left[(v_1 H_2 H_3)\big|_{q_1(P)+dq_1} - (v_1 H_2 H_3)\big|_{q_1(P)}\right] \cdot dq_2\,dq_3 = \\ = \frac{\partial}{\partial q_1}\,(v_1 H_2 H_3)\,dq_1\,dq_2\,dq_3$$

Ähnliche Resultate bekommen wir für die anderen Seiten. Nach Division durch das Volumen $B = H_1H_2H_3\,dq_1dq_2\,dq_3$ wird schliesslich:

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{v} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(v_1 H_2 H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2}(v_2 H_3 H_1) + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial q_3}(v_3 H_1 H_2)\right] \tag{28}$$

Nehmen wir insbesondere $\boldsymbol{v} =$ grad u, also nach (27),

$$v_i = \frac{1}{H_i}\frac{\partial u}{\partial q_i}$$

so erhalten wir:

$$\triangle\,u = \mathrm{div\,grad}\,u = \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_2 H_3}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}\right) + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_3 H_1}{H_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{H_1 H_2}{H_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}\right)\right] \tag{29}$$

Beispiele:

a) Kugelkoordinaten: $q_1 = r$, $q_2 = \vartheta$, $q_3 = \varphi$.
Hier ist $H_1 = 1$, $H_2 = r$, $H_3 = r \cdot \sin\vartheta$, und es kommt nach elementaren Vereinfachungen:

$$\triangle\,u = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\sin\vartheta \cdot \frac{\partial u}{\partial \vartheta}\right) + \\ + \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \tag{30}$$

b) Zylinderkoordinaten: $q_1 = \varrho$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = z$
Hier ist $H_1 = 1$, $H_2 = \varrho$, $H_3 = 1$ und es wird:

$$\triangle\,u = \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\varrho \frac{\partial u}{\partial \varrho}\right) + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \tag{31}$$

Adresse des Autors: Prof. Dr. H. Carnal, Institut für angewandte Mathematik, Universität Bern, Sidlerstrasse 5, 3000 Bern.