

Zeitschrift: Technische Mitteilungen / Schweizerische Post-, Telefon- und Telegrafienbetriebe = Bulletin technique / Entreprise des postes, téléphones et télégraphes suisses = Bollettino tecnico / Azienda delle poste, dei telefoni e dei telegrafi svizzeri

Herausgeber: Schweizerische Post-, Telefon- und Telegrafienbetriebe

Band: 45 (1967)

Heft: 3

Artikel: Anwendungsmöglichkeiten der linearen Programmierung im PTT-Bereich. I. Teil

Autor: Hürlimann, Werner

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-874857>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 15.03.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Anwendungsmöglichkeiten der linearen Programmierung im PTT-Betrieb (I. Teil)

Werner HÜRLIMANN, Bern

656.807:65.012.122

Zusammenfassung. Lineare Programmierung ist eine rechnerische Lösungsmethode für zahlreiche wirtschaftliche, organisatorische und technische Probleme. Sie wird verwendet, um aus einer Vielzahl möglicher Lösungen unter Berücksichtigung zahlreicher Einflussfaktoren die bestmögliche (optimale) Lösung zu finden. Die lineare Programmierung stützt sich – je nach Anwendungsbereich – auf verschiedene mathematische Modelle des zu erfassenden betrieblichen Geschehens, von denen jedes seine eigene rechnerische Lösungsmethode aufweist: Zuordnung, Zuteilung (Transport), Produktion, Reihenfolge oder Netzwerk.

Possibilités d'emploi de la programmation linéaire dans les services des PTT

Résumé. La programmation linéaire est une méthode pour résoudre, par le calcul, de nombreux problèmes d'économie, d'organisation et de technique. Elle est employée pour rechercher, parmi un grand nombre de solutions possibles, la solution optimale, en tenant compte des nombreux facteurs qui peuvent l'influencer. La programmation linéaire fait appel – suivant le domaine d'application – à différents modèles mathématiques du cas d'exploitation à examiner, dont chacun comporte sa propre méthode de solution arithmétique: coordination, distribution (transport), production, série ou réseau.

Possibilità d'impiego della programmazione lineare nei servizi delle PTT

Riassunto. La programmazione lineare è un metodo di calcolo mediante il quale si determina la soluzione migliore (ottimale) fra quelle che certi problemi di natura economica, organizzativa e tecnica possono ammettere, tenendo conto di tutti i fattori che hanno una certa influenza. Essa si basa – secondo il campo d'applicazione – su diversi modelli matematici relativi alla fase aziendale considerata, per i quali esistono sistemi tipici di soluzione aritmetica: coordinamento, ripartizione (trasporto), produzione, ordine di successione o rete di trasporto.

Die Lösung von Problemen von der Art der linearen Programmierung (LP) galt bis vor einigen Jahrzehnten noch als unlösbar, weil angesichts der riesigen Zahl in Frage kommender Kombinationen der sonst übliche Kostenvergleich ausser Betracht fiel.

Da in der LP nur zahlenmässig erfassbare Grössen berücksichtigt werden können und darüber hinaus zur Verminderung des Rechenaufwandes nur die wirklich massgebenden Einflussfaktoren berücksichtigt werden sollen, ist die Konzentration der betrieblichen Vorgänge zu einem mathematischen Modell notwendig. Dieses richtet sich nach dem zu erfassenden betrieblichen Geschehen und weist für die verschiedenen vorkommenden Fälle verschiedene, eigene rechnerische Lösungsmethoden auf.

Lineare Programmierung und Kostenrechnung

Die lineare Programmierung ist eng mit wirtschaftlichem Gedankengut (Preistheorie, Produktionstheorie, Grenznutzen, Grenzkosten usw.) verflochten. Mit der Kostenrechnung ist sie insofern verbunden (siehe Fig. 1), als sie zu ihrer Durchführung einer sowohl in der Kontierung als auch in der Kostenstellenaufteilung ins einzelne gehenden Kostengliederung bedarf, da vor allem die variablen (leistungsabhängigen) Kosten herausgearbeitet werden müssen und Unterlagen für den Ansatz von Stückgewinnen und von Kosten einzelner betrieblicher Vorgänge gewonnen werden können.

Rechenmethoden der linearen Programmierung

Die Lösung eines derartigen Problems besteht darin, eine der zu optimierenden Grösse entsprechende Zielfunktion (Z) unter Einhaltung einschränkender Nebenbedingungen zu minimieren beziehungsweise zu maximieren, das heisst den kleinstmöglichen oder grösstmöglichen Wert annehmen zu lassen. Zunächst wird eine «zulässige Lösung» gesucht,

die zwar alle Nebenbedingungen erfüllt, aber noch nicht optimal ist. Dann wird diese erste Lösung schrittweise verbessert, bis aus bestimmten Anzeichen hervorgeht, dass die beste Lösung erreicht ist. Wesentlich ist vor allem die Voraussetzung, dass sowohl die Zielfunktion als auch die Nebenbedingungen in Form von Gleichungen ersten Grades (linearen Gleichungen) ausgedrückt werden können. Ein kleines Beispiel möge die Wirksamkeit der linearen Programmierung erläutern: Zehn Motorfahrzeuge seien nach zehn Verladestellen mit gegebener Entfernung derart zu dirigieren, dass insgesamt die Zahl der zurückgelegten Fahrzeugkilometer minimal werde. Der übliche Kostenvergleich würde bedingen, dass über $3\frac{1}{2}$ Millionen Lösungen abgerechnet und verglichen werden, wozu ein flinker Rechner mittels Tisch-Rechenmaschine ungefähr 16 Jahre benötigen würde. Selbst ein moderner Computer müsste für diese Rechnung etwa einen Monat aufwenden – eine recht teure Geschichte! Bei Anwendung der linearen Programmierung aber ist die gleiche Aufgabe mit Hilfe einer Rechenmaschine in vier bis sechs Rechenschritten innert 20 Minuten lösbar.

Mathematische Elemente zum Verständnis der linearen Programmierung*

Die folgenden Ausführungen sollen einige Kenntnisse der linearen Algebra (lineare Gleichungen und Ungleichungen) auffrischen, anhand einfacher Beispiele in die wichtigste Lösungsmethode (Simplexverfahren) einführen und schliesslich dem Leser durch Kenntnis der entsprechenden mathematischen Bezeichnungsweise den Zugang zur eigentlichen Fachliteratur erleichtern.

* Dieses Kapitel folgt dem Aufsatz: W. Hürlimann und G. Scheidegger, Mathematische Elemente und Bezeichnungen zum Verständnis der linearen Programmierung, Technische Rundschau (Bern) Nr. 11/20. 3. 1964.

Lineare Gleichungen und Ungleichungen

Das Formulieren und Umformen von Gleichungen (beziehungsweise Ungleichungen) ersten Grades mit mehreren Unbekannten bildet das Fundament aller Überlegungen und Berechnungen im Rahmen der linearen Programmierung. Wir wollen deshalb zunächst kurz einige allgemeine Regeln aus der Schulalgebra wiederholen und alsdann im nächsten Abschnitt ein Problem der LP mit Hilfe der elementaren Algebra lösen.

Unter einem Gleichungssystem versteht man eine Anzahl von gleichzeitig (simultan) geltenden Gleichungen für dieselben Variablen. Zur Bestimmung von n Unbekannten (x_1, x_2, \dots, x_n) benötigt man ein System von n Gleichungen.

Für die Umformung oder Lösung von linearen Gleichungssystemen (Systemen von Gleichungen ersten Grades) gelten namentlich folgende Regeln:

a) Eine Gleichung bleibt richtig, wenn ihre beiden Seiten der gleichen Rechenoperation unterzogen werden:

– Addition der gleichen Zahl auf beiden Seiten der Gleichung.
Beispiel:

$$x - 2 = 4$$

Nach Addition von +2 auf beiden Seiten ergibt sich

$$x = 6$$

– Subtraktion der gleichen Zahl auf beiden Seiten der Gleichung.
Beispiel:

$$x + a = b$$

Nach Subtraktion von a auf beiden Seiten ergibt sich

$$x = b - a$$

Praktisch hat man in beiden Fällen eine Zahl unter Änderung des Vorzeichens «auf die andere Seite hinübergenommen».

– Multiplikation beider Seiten mit der gleichen Zahl. Beispiel:

$$\frac{x}{a} = b$$

Nach Multiplikation beider Seiten mit a ergibt sich

$$x = ab$$

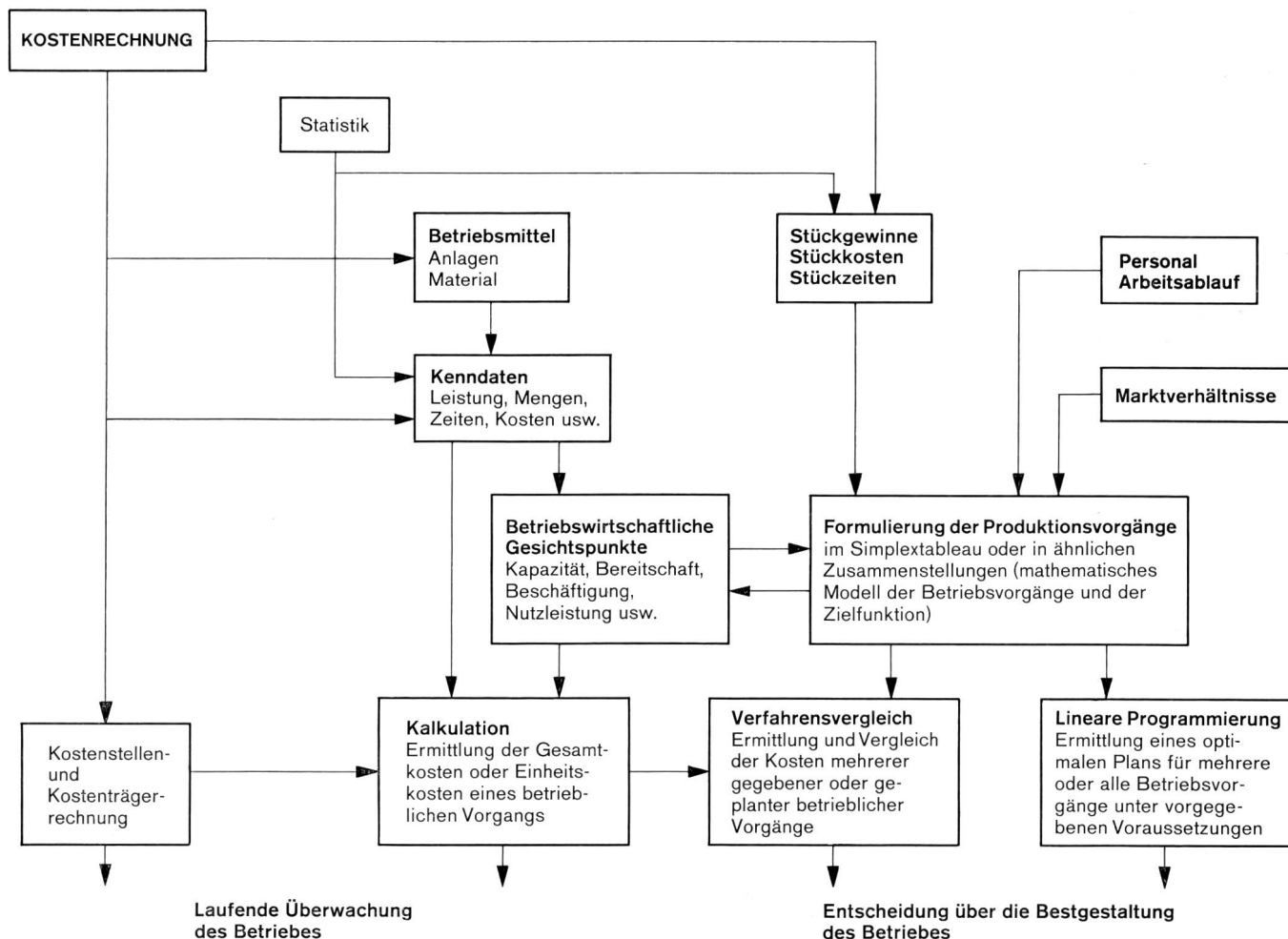


Fig. 1 Zusammenhänge zwischen linearer Programmierung und Kostenrechnung

- Division beider Seiten durch die gleiche Zahl. Beispiel:

$$ax = b$$

Nach Division beider Seiten durch a ergibt sich

$$x = \frac{b}{a}$$

- Vertauschen beider Seiten der Gleichung:

$$Z = ax + by$$

Daraus ergibt sich durch Vertauschen

$$ax + by = Z$$

- Umkehrung aller Vorzeichen auf beiden Seiten der Gleichung

$$-ax - by = -Z$$

Daraus ergibt sich (Multiplikation mit -1)

$$ax + by = Z$$

b) Einsetzverfahren für die Lösung von Gleichungssystemen ersten Grades mit zwei Unbekannten: Eine beliebige Gleichung des Systems wird nach einer Unbekannten aufgelöst, wodurch diese Unbekannte dargestellt wird als Funktion (in Abhängigkeit von) der zweiten Unbekannten. Das Ergebnis wird in die andere Gleichung eingesetzt, was eine neue Gleichung mit nur einer Unbekannten ergibt. Diese wird berechnet und in der ersten Gleichung eingesetzt, was den Wert der zweiten Unbekannten liefert.

Beispiel:

$$\begin{array}{r} x_1 + 7x_2 = 21 \rightarrow x_1 = 21 - 7x_2 \\ 4x_1 - 3x_2 = 22 \\ \hline 4(21 - 7x_2) - 3x_2 = 22 \\ 84 - 28x_2 - 3x_2 = 22 \\ -31x_2 = -62 \\ x_2 = 2 \\ \hline 4x_1 - 3 \cdot 2 = 22 \\ 4x_1 - 6 = 22 \\ 4x_1 = 28 \\ x_1 = 7 \end{array}$$

c) Ausser dem Einsetzverfahren werden zur Lösung linearer Gleichungssysteme auch das Gleichsetzverfahren, das Additionsverfahren und die Determinantenmethode verwendet, auf die wir hier nicht näher eingehen wollen. Ein dem Einsetzverfahren ähnliches Vorgehen spielt bei der algebraischen Behandlung der Simplexmethode eine Rolle, nämlich dort, wo eine ungünstige Basisvariable durch eine bessere ersetzt wird.

Ungleichungen spielen bei der Formulierung der Programmierungsprobleme eine bedeutsame Rolle, treten doch die meisten technischen und wirtschaftlichen Nebenbedingungen nicht in der Form von Gleichungen auf, sondern in der Form «höchstens», «nicht grösser als», «mindestens» oder «nicht kleiner als». Solche Beziehungen werden als Ungleichungen geschrieben, zum Beispiel: $a \leq b$ (a ist höchstens gleich b, beziehungsweise a ist kleiner oder gleich b); $a \geq b$ (a ist mindestens gleich b, beziehungsweise a ist grösser oder gleich b); vgl. auch Figur 2.

Das Rechnen mit Ungleichungen ist unpraktisch, weshalb man sie durch Einführung von Schlupfvariablen in Gleichungen ver-

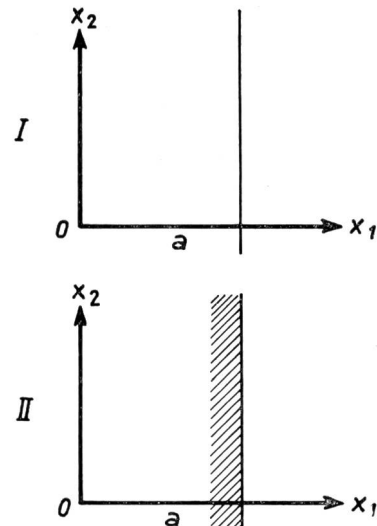


Fig. 2
Graphische Darstellung einer Gleichung (I) $x_1 = a$ und einer Ungleichung (II) $x_1 \leq a$

wandelt, das heisst gewissermassen auffüllt, bis das Gleichgewicht erreicht ist:

$$\begin{array}{l} \text{wenn } a \leq b \text{ dann ist } a + y = b \\ \text{wobei } y \geq 0 \\ y = b - a \end{array}$$

Algebraische Lösung eines Maximumproblems

In der «Steinzeit» der linearen Programmierung, die aber erst etwa 15 Jahre zurückliegt, stand das bequeme Simplextableau noch nicht zur Verfügung, und es mussten alle Rechenschritte auf Grund von voll ausgeschriebenen Gleichungen entwickelt und durchgeführt werden. Wir wollen diesen ursprünglichen Weg an Hand eines ganz einfachen Zahlenbeispiels durchlaufen, wobei zur besseren Verfolgung des Weges alle Gleichungsgruppen fortlaufend numeriert sind:

Eine Zielfunktion

$$Z = 200x_1 + 100x_2 \quad (1)$$

sei zu maximieren unter den Nebenbedingungen

$$5x_1 + 4x_2 \leq 4000 \quad (2)$$

$$9x_1 + 10x_2 \leq 9000$$

(vergleiche auch Figur 3).

1. Schritt: Man verwandle die Ungleichungen durch Einführung von Schlupfvariablen in Gleichungen:

$$5x_1 + 4x_2 + y_1 = 4000 \quad (3)$$

$$9x_1 + 10x_2 + y_2 = 9000$$

2. Schritt: Man sucht eine erste Basislösung (Eckpunkt), indem man so viele Variablen auswählt, als Gleichungen aus Nebenbedingungen (3) vorliegen. Diese Wahl stützt sich auf das Basistheorem der LP, wonach die Zahl der in der Basislösung enthaltenen Variablen (Basisvariablen) höchstens gleich der Zahl der Gleichungen für Nebenbedingungen ist. Am einfachsten ist es, als erste Basisvariablen die Schlupfvariablen zu wählen und alle Nichtbasisvariablen = 0 zu setzen. Das gibt die erste Basislösung, die in Figur 2 dem Punkt 0 entspricht:

Aus (3) folgt

$$0+0+y_1 = 4000$$

$$0+0+y_2 = 9000$$

Aus (1) folgt

$$Z = 0+0$$

1. Basislösung:

$$x_1 = x_2 = 0 \quad y_1 = 4000 \quad y_2 = 9000 \quad Z = 0$$

3. Schritt: Man untersucht, ob sich die erzielte Basislösung verbessern lässt, und prüft zu diesem Zwecke die ursprüngliche Zielfunktion:

$$Z = 200 x_1 + 100 x_2 \quad (1)$$

Beide Variablen haben positive Koeffizienten, so dass ein Anwachsen der Variablen auch eine Verbesserung von Z bewirken wird. Praktisch verspricht die Variable mit dem grössten Koeffizienten ein rascheres Anwachsen. Das ist im vorliegenden Beispiel x_1 . Wir untersuchen nun an Hand der Gleichungen der Nebenbedingungen, inwieweit wir x_1 wachsen lassen dürfen, ohne dass dadurch x_2 negativ wird. Man erinnert sich dabei an die selbstverständliche Voraussetzung, dass bei wirtschaftlichen und technischen Programmen keine negativen Variablen auftreten dürfen ($x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$); es gibt ja keine negativen Kühlschränke, Waschmaschinen und dergleichen. Um die Suche zu erleichtern, lösen wir die Gleichungen (3) nach den Basisvariablen der ersten Basislösung auf.

$$y_1 = 4000 - 5 x_1 - 4 x_2 \quad (4)$$

$$y_2 = 9000 - 9 x_1 - 10 x_2$$

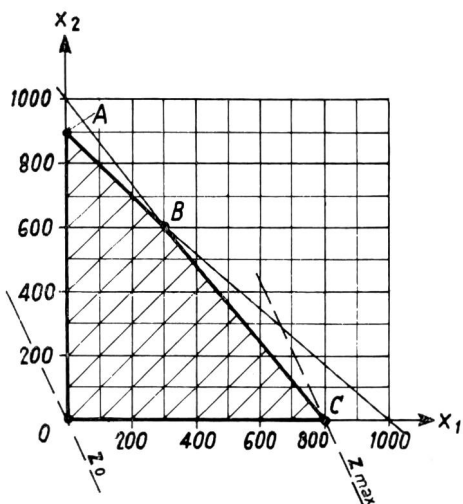


Fig. 3
Graphische Darstellung des Zahlenbeispiels (Maximumproblem)

Nun wird x_2 beim Werte 0 festgehalten, und auch die Schlupfvariablen reduzieren sich durch das grösstmögliche Anwachsen von x_1 auf 0.

Daraus folgt

$$0 = 4000 - 5 x_1 - 0 \quad \text{oder} \quad 5 x_1 = 4000$$

$$\text{das ist } x_1 = 800$$

(5)

$$0 = 9000 - 9 x_1 - 0 \quad \text{oder} \quad 9 x_1 = 9000$$

$$\text{das ist } x_1 = 1000$$

Die erste Gleichung ergibt mit $x_1 = 800$ die niedrigere Schranke für das Anwachsen dieser Variablen, denn bei weiterem Anwachsen müsste in dieser Nebenbedingung die Variable x_2 negativ werden, was unzulässig ist. Wir setzen nun diesen höchstzulässigen Wert von $x_1 = 800$ in die Gleichungen (3) ein, unter Festhaltung von $x_2 = 0$. y_1 ist durch den angenommenen Maximalwert von x_1 ebenfalls auf 0 reduziert, während für y_2 noch freie Kapazitäten vorliegen:

$$4000 - 0 + 0 = 4000 \quad (\text{wird nicht verwendet})$$

$$7200 - 0 + y_2 = 9000 \quad \text{oder} \quad y_2 = 1800$$

$$\text{Aus (1) folgt } Z = 200 \cdot 800 + 0$$

2. Basislösung:

$$x_2 = y_1 = 0 \quad x_1 = 800 \quad (\text{aus [5]}) \quad y_2 = 1800 \quad Z = 160\,000$$

Diese verbesserte Basislösung entspricht dem Punkt C in Figur 2. Um prüfen zu können, ob sich diese Lösung noch verbessern lässt, muss das ganze Gleichungssystem nach der neuen Basisvariablen x_1 umgerechnet werden.

4. Schritt: Man löst jene Gleichung, die beim 3. Schritt die niedrigste Schranke für die neue Basisvariable ergeben hat, nach der neuen Basisvariablen auf (im vorliegenden Beispiel ist es die Gleichung der ersten Nebenbedingung):

Aus (4) folgt

$$5 x_1 = 4000 - 4 x_2 - y_1$$

oder

$$x_1 = 800 - \frac{4}{5} x_2 - \frac{1}{5} y_1 \quad (6)$$

Dieser neue Ausdruck für x_1 wird nun in sämtliche Gleichungen (1) und (3) anstelle von x_1 eingesetzt:

In (1)

$$Z = 200 \left(800 - \frac{4}{5} x_2 - \frac{1}{5} y_1 \right) + 100 x_2 = 160\,000 - 60 x_2 - 40 y_1 \quad (7)$$

In (3)

$$9 \left(800 - \frac{4}{5} x_2 - \frac{1}{5} y_1 \right) + 10 x_2 + y_2 = 9000$$

oder gekürzt

$$\frac{14}{5} x_2 - \frac{9}{5} y_1 + y_2 = 1800 \quad (8)$$

In der neuen Zielfunktion weisen die Variablen ausschliesslich negative Koeffizienten auf, ihre weitere Vergrösserung würde deshalb Z nicht mehr anwachsen lassen: Die optimale Lösung ist erreicht, was auch durch die graphische Lösung in Figur 2 gezeigt wird.

Hätte die neue Zielfunktion (7) noch Variable mit positiven Koeffizienten aufgewiesen, dann wäre eine Wiederholung von Schritt 3 (Wahl neuer Basisvariablen) notwendig gewesen, diesmal aber ausgehend von den neuen Gleichungen (6) und (8).

Man erkennt unschwer, dass dieses Vorgehen unübersichtlich und schwerfällig ist. Es ist den ersten Pionieren der LP hoch anzurechnen, dass sie sich auch in dieser schwerfälligen Ausdrucksweise verständlich machen konnten, aber für die Praxis hätte sie sich niemals durchsetzen können. Man suchte deshalb sofort nach einem schematischen und übersichtlichen Rechenablauf und fand ihn im bekannten *Simplextableau*. Wir haben dessen Anwendung bereits kennengelernt, weshalb das vorliegende Zahlenbeispiel vergleichsweise in der neuen Form dargestellt sei:

Tableau I

	P ₀	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄
Z	0	-200	-100	0	0
y ₁	4 000	5	4	1	0
y ₂	9 000	9	10	0	1

Tableau II

	P ₀	P ₁	P ₂	P ₃	P ₄
Z	160 000	0	60	40	0
x ₁	800	1	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	0
y ₂	1 800	0	$-\frac{14}{5}$	$-\frac{9}{5}$	1

Tableau II zeigt die optimale Lösung, weil in der Z-Zeile keine negativen Werte mehr stehen. Vergleicht man die beiden Tableaus und ihre Transformation mit dem soeben dargelegten algebraischen Vorgehen, dann erkennt man auch die Begründung der einfachen Rechenregeln des Simplexverfahrens, nämlich

- das Aufsuchen der Schlüsselkolonne und der Schlüsselzeile, entsprechend Schritt 3;
- die Transformation der bisherigen Schlüsselzeile, entsprechend Schritt 4 (Auflösung nach x₁), und
- die Transformation aller übrigen Zeilen, entsprechend Schritt 4 (Einsetzen des neuen Ausdruckes für x₁ in alle anderen Gleichungen). Der Leser mag versuchen, die Transformationsregeln durch Verallgemeinerung unseres Zahlenbeispiels zu erkennen.

Ein Vergleich zwischen Simplextableau und algebraischer Lösung zeigt aber auch, dass es bei der ganzen Rechnerei allein auf die *Koeffizienten* ankommt. Das Simplextableau enthält nur Koeffizienten. Mathematisch werden Zusammenstellungen von Koeffizienten als Matrizen oder Vektoren bezeichnet. Erst die Einführung dieser Begriffe konnte also

dem Simplexverfahren praktisch zum Durchbruch verhelfen, und wer tiefer in das Gebiet der LP eindringen möchte, muss sich deshalb mit einigen Grundsätzen der mathematischen Bezeichnung vertraut machen.

Einige Grundsätze mathematischer Bezeichnung

In der elementaren Algebra haben wir einst den Nutzen der allgemeinen Zahlen (a, b, x usw.) kennengelernt. Im letzten Abschnitt wurde aber klar, dass auch diese Formelsprache nicht unbedingt eine Garantie für Übersichtlichkeit bedeutet. Man hat deshalb Schreibweisen entwickelt – gewissermassen eine mathematische Stenographie –, die zu einer wesentlichen Raffung des dargestellten Problems führen, ohne die Aussagefähigkeit zu vermindern.

Index und Doppelindex

Von der Schulalgebra her sind als Bezeichnungen für die Variablen die Buchstaben x, y, z, u, v, w usw. geläufig. Wenn aber, wie in Problemen der LP, die Zahl der Variablen gross ist, dann würden uns die Buchstaben bald ausgehen. Deshalb und um die Übersichtlichkeit zu verbessern, geht man mit den Buchstaben sparsam um, verwendet sie für ganz bestimmte Begriffe und unterscheidet sie untereinander durch tiefgestellte Indizes. Am häufigsten werden für die allgemeinen Zahlen in der LP folgende Buchstaben verwendet:

- x für die eigentlichen Variablen (bisweilen für alle Variablen)
- y für die Schlupfvariablen (bisweilen auch als x bezeichnet)
- a für die Koeffizienten in den (Un-) Gleichungen der Nebenbedingungen
- b für die Konstante in den (Un-) Gleichungen der Nebenbedingungen
- c für die Koeffizienten in der Zielfunktion
- Z für die zu optimierende Grösse (Zielfunktion), bisweilen auch B, Q, F usw.

Die Variablen sind jeweils allen Ungleichungen beziehungsweise Gleichungen des Problems gemeinsam, weshalb man sie meist mit einem einfachen Index bezeichnet: x₁, x₂, x₃, ..., x_k, ..., x_n.

- Die Koeffizienten dagegen können von Gleichung zu Gleichung verschieden sein, weshalb man sie auch noch mit der Nummer der betreffenden Gleichung versieht. Man soll sich dabei das ganze System von Gleichungen oder Ungleichungen derart geordnet denken, dass die entsprechenden Variablen in einer Spalte untereinanderstehen, dass also die Indexreihe 1, 2, 3, ..., k, ..., n eine Spalte angibt, gewissermassen die «Hausnummer» der Variablen und ihrer Koeffizienten. Die Nummern der Gleichungen – von oben nach unten – ergeben eine zweite Reihe von Indizes, nämlich 1, 2, 3, ..., i, ..., m, also gewissermassen das «Stockwerk». a_{i,k} bedeutet beispielsweise den Koeffizienten a in der ersten Zeile und der vierten Spalte. a_{i,k} liegt in der i-Zeile und der k-Spalte. Als Indizes werden am häufigsten verwendet:
- 1, 2, 3 usw. für bestimmte Zeilen oder Spalten, oder als Doppelindizes 11, 23, 84 usw. für bestimmte «Felder» (Zeile und Spalte, lies «eins-eins», «zwei-drei», «acht-vier» usw.;
 - k oder j für den beliebigen Index der Spalten;
 - i für den beliebigen Index der Zeilen;
 - n für den Index der letzten Spalte;
 - m für den Index der letzten Zeile.

Mit Hilfe dieser Buchstaben und Indizes wollen wir nun ein «allgemeines» System von Gleichungen und Ungleichungen aufstellen, wie es sich beim Formulieren eines LP-Problems bieten

würde. Es handelt sich dabei um die ausführlichste Art der Formulierung:

$$Z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_k x_k + \dots + c_n x_n \quad (9)$$

zu maximieren unter den Nebenbedingungen

$$x_k \geq 0 \quad k = 1, 2, \dots, n$$

und

$$\begin{aligned} a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2k} x_k + \dots + a_{2n} x_n &\leq b_2 \\ a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1k} x_k + \dots + a_{1n} x_n &\leq b_1 \end{aligned} \quad (10)$$

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{ik} x_k + \dots + a_{in} x_n \leq b_i \quad (11)$$

$$a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mk} x_k + \dots + a_{mn} x_n \leq b_m \quad (12)$$

Für die Lösung eines konkreten Problems kann man sich wohl dieser Schreibweise bedienen, für die Darstellung allgemeiner Zusammenhänge oder für allgemeine Hinweise ist sie immer noch zu platzraubend.

Das Summenzeichen Σ

Das Summenzeichen dient zur abgekürzten Darstellung von Summen, die nur gleichartige Glieder enthalten. So schreibt man beispielsweise

$$\text{statt } S = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 100 \quad \text{kürzer } S = \sum_{k=1}^{100} k$$

Das Summenzeichen sagt also aus, dass man alle Zahlen addieren soll, die aus dem Ausdruck k dadurch hervorgehen, dass man für k nacheinander alle Zahlen von 1 bis 100 einsetzt, gemäss den unterhalb und oberhalb des Zeichens angegebenen Summationsgrenzen. Nach dieser Regel lassen sich auch Summen aus allgemeinen Zahlen abgekürzt schreiben, so beispielsweise die soeben behandelten Gleichungen:

Aus (9) wird nun kürzer

$$Z = \sum_{k=1}^n c_k x_k$$

Aus (10) wird nun kürzer

$$\sum_{k=1}^n a_{1k} x_k \leq b_1$$

Aus (11) wird nun kürzer

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} x_k \leq b_i$$

und indem wir die Grenzen von i angeben, können wir unter dem Summationszeichen sogar das ganze Gleichungssystem (10, 11, 12) notieren, nämlich

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} x_k \leq b_i \quad i = 1, 2, 3, \dots, m$$

Die Summationsgrenzen werden weggelassen, sofern sie aus dem Zusammenhang eindeutig hervorgehen. Das Summationszeichen eignet sich also vorzüglich dazu, lineare Gleichungssysteme für allgemeine formelmässige Aussagen zusammenzufassen. Über die numerische Zusammensetzung allerdings sagt der abgekürzte Ausdruck ebensowenig aus, als das in allgemeinen Zahlen ausgeschriebene Gleichungssystem (9, 10, 11, 12). Weil es nun beim Auflösen oder beim Umformen linearer Gleichungs-

systeme allein auf die Koeffizienten der Variablen und nicht auf die Variablen selbst ankommt, genügt es jeweils, diese Koeffizienten in einem Schema – gewissermassen einer Tabelle – geordnet zusammenzufassen.

Vektoren und Matrizen

Wir sind bei unserem Zahlenbeispiel zur algebraischen Lösung eines Maximumproblems von folgendem Gleichungssystem ausgegangen (nach Einführung der Schlupfvariablen):

$$\begin{aligned} 5 x_1 + 4 x_2 + y_1 &= 4000 \\ 9 x_1 + 10 x_2 + y_2 &= 9000 \end{aligned}$$

Wenn wir nun die gleichartigen Variablen untereinander schreiben, dann ergibt sich

$$\begin{aligned} 5 x_1 + 4 x_2 + y_1 + 0 y_2 &= 4000 \\ 9 x_1 + 10 x_2 + 0 y_1 + y_2 &= 9000 \end{aligned} \quad (13)$$

und schliesslich nach Weglassung der für die Rechnung nicht benötigten Variablen

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 5 & 4 & 1 & 0 \\ 9 & 10 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4000 \\ 9000 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Man kann auch diese neuen Ausdrücke in allgemeiner Schreibweise fassen, nämlich

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{i1} & \dots & a_{ik} & \dots & a_{in} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{m1} & \dots & a_{mk} & \dots & a_{mn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_k \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \\ y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_i \\ \cdot \\ \cdot \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_i \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{bmatrix} \quad (15)$$

oder abgekürzt

$$(\mathbf{A} : \mathbf{I}) \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} = \mathbf{b} \quad (16)$$

Zunächst noch einige Ausführungen über das Arbeiten mit derartigen Matrizen.

Beispiele für Matrizen:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 7 & 9 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -9 & \frac{1}{2} \\ 20 & 7 & -2 \\ 0 & 13 & 25 \\ 1 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Beispiele für Spaltenvektoren und Zeilenvektoren:

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 125 \\ 30 \\ 0 \\ 58 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c}' = (125, 30, 0, 58)$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{x}' = (x_1, x_2, x_3, x_4)$$

Die einzelnen Zahlen heissen Elemente der Matrix beziehungsweise Komponenten des Vektors. Zwei Vektoren oder zwei Matrizen sind gleich, wenn alle ihre entsprechenden Komponenten gleich sind, das heisst auch in den gleichen Fächern stehen. Für das Arbeiten mit Matrizen und Vektoren bestehen bestimmte Rechenregeln, von denen einige angeführt seien:

Addition von Vektoren:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{bmatrix}$$

Die Addition zweier Vektoren ergibt wiederum einen Vektor, was sinngemäss auch für Zeilenvektoren gilt. Voraussetzung: die zu addierenden Vektoren müssen die gleiche Zahl Komponenten haben.

Multiplikation Vektor · Zahl:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \cdot 5 = \begin{bmatrix} 5 a_1 \\ 5 a_2 \\ 5 a_3 \end{bmatrix}$$

Multiplikation Zeilenvektor · Spaltenvektor:

«Berühmtes» Beispiel hierfür ist die Kurzdarstellung der Zielfunktion $Z = \mathbf{c}' \cdot \mathbf{x}$. Als Resultat ergibt sich eine Zahl.

$$(c_1, c_2, c_3) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3$$

Als praktisches Beispiel denke man sich im Spaltenvektor eine Kollektion verschiedener Produktenpreise und im Zeilenvektor die entsprechenden Produktmengen: aus der Multiplikation beider ergibt sich eine Zahl, nämlich der Gesamterlös!

Multiplikation Matrix · Spaltenvektor:

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 & 5 \\ -1 & 3 & 9 \\ 6 & 4 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 + 7x_2 + 5x_3 \\ -x_1 + 3x_2 + 9x_3 \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 \end{bmatrix}$$

Hier kommt also wieder ein Spaltenvektor heraus, und zwar ein System von linearen Gleichungen. Die Umkehrung dieses Vorganges wird in der linken Seite der Gleichungen (14) und (15) ersichtlich, wo wir lineare Systeme kürzer durch die Matrix ihrer Koeffizienten und den Spaltenvektor ihrer Variablen ausdrücken. Nun wollen wir wieder auf unser Programmierungsproblem zurückkommen.

Wir haben aus (13) zunächst die Koeffizienten der Variablen in einem Schema, einer sogenannten Matrix, zusammengestellt. In dieser Matrix mit n Spalten und m Zeilen kommt jedem Koeffizienten sein angestammter Platz a_{ik} zu. Die Matrix ist durch eine gestrichelte senkrechte Linie in zwei Teile getrennt. Links er-

scheinen die Koeffizienten der eigentlichen Variablen x_k und rechts die Koeffizienten der Schlupfvariablen y_k . Diese Teilung hat einen praktischen Grund: Die Koeffizienten der Schlupfvariablen sind stets = 1, und durch die geordnete Schreibweise

$$y_1 \dots y_k \dots y_m$$

erscheinen diese «1» in einer Diagonale von oben links nach unten rechts, z. B.:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{oder abgekürzt: } \mathbf{I}$$

Eine derartige Matrix wird als *Einheitsmatrix* bezeichnet. Beim Ausschreiben der Koeffizientenmatrix bedeutet dies eine gewisse Erleichterung, denn wir können der Matrix der Koeffizienten der eigentlichen Variablen einfach eine Einheitsmatrix mit m Zeilen und m Spalten anhängen.

An die Matrix der Koeffizienten schliesst sich nun die Matrix der Variablen an. Diese besitzt nur eine einzige Spalte und wird deshalb als *Vektor* beziehungsweise als *Spaltenvektor* bezeichnet. Auch hier werden die x_k und y_i durch eine gestrichelte Linie getrennt.

Auch die Konstanten b_i ergeben einen Spaltenvektor. Wir wollen nun die bisherigen Bezeichnungen kurz zusammenfassen:

- a_{ik} Koeffizienten der Variablen x_k ($i = 1, 2, \dots, m$)
- x_k Eigentliche Variable ($k = 1, 2, \dots, n$)
- y_i Schlupfvariable ($i = 1, 2, \dots, m$)
- b_i Konstante ($i = 1, 2, \dots, m$)

- A** Koeffizientenmatrix mit n Spalten und m Zeilen
- I** Einheitsmatrix mit m Zeilen und m Spalten

x Spaltenvektor der Variablen mit $n + m$ Zeilen (n für die x_k , m für die y_i)

b Spaltenvektor der Konstanten, mit m Zeilen

Spaltenvektoren können durch Beifügen eines «'» als Zeilenvektoren geschrieben werden, was beim Ausschreiben meist bequemer ist, zum Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{b} \quad (2, 1) = \mathbf{b}'$$

$(\mathbf{A} | \mathbf{I}) \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} = \mathbf{b}$ Lineares Gleichungssystem aus m Gleichungen mit n Variablen.

Mit Hilfe der vollständigen und der abgekürzten Matrixschreibweise können wir nun ein LP-Problem auf die kürzestmögliche Weise formulieren, indem wir die allgemeinen Aussagen in der meistabgekürzten Form schreiben und die numerischen Aussagen als Definitionen in ausgeschriebener Form beifügen. In dieser Art sieht unser Zahlenbeispiel wie folgt aus:

Man maximiere

$$Z = 200 x_1 + 100 x_2$$

unter den Nebenbedingungen

$$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \quad \text{und} \quad x_k \geq 0 \quad k = 1, 2$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 9 & 10 \end{bmatrix} \left(\mathbf{A} = \right) \quad \text{«Prozessmatrix»}$$

$$\mathbf{x}' = (x_1, x_2)$$

$$\mathbf{b}' = (4000, 9000)$$

Bei umfangreichen Problemen schreibt man auch die Zielfunktion und die Nichtnegativitätsbedingung in vektorieller Form; vergleiche die Formulierung mit allgemeinen Zahlen.

Man maximiere

$$Z = \mathbf{c}'\mathbf{x}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \quad \text{und} \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

wobei

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ik} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mk} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ik}) \quad \begin{matrix} i = 1, 2, 3, \dots, m \\ k = 1, 2, 3, \dots, n \end{matrix}$$

$$\mathbf{c}' = (c_1, c_2, \dots, c_n)$$

$$\mathbf{x}' = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\mathbf{b}' = (b_1, b_2, \dots, b_m)$$

$$\mathbf{0}' = (0_1, 0_2, \dots, 0_n)$$

Man ersieht daraus, dass bei der Definition die Spaltenvektoren \mathbf{c} , \mathbf{x} , \mathbf{b} , $\mathbf{0}$ als Zeilenvektoren \mathbf{c}' , \mathbf{x}' , \mathbf{b}' , $\mathbf{0}'$ gefasst sind, um das Ausschreiben zu erleichtern, denn Spaltenvektoren sind zum Ausschreiben umständlich und platzraubend. In der vorliegenden Formulierung sind alle für die Lösung eines LP-Problems erforderlichen sachlichen und numerischen Informationen (Daten) vorhanden.

In einigen – namentlich amerikanischen – Fachbüchern wird die Matrix der Koeffizienten der eigentlichen Variablen (Prozessmatrix) und der Vektor der Variablen (also \mathbf{Ax}) vermieden, indem man das ganze Gleichungssystem in Spaltenvektoren auflöst, zum Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} y_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} y_2 = \begin{pmatrix} 4000 \\ 9000 \end{pmatrix}$$

oder kurz

$$P_1 x_1 + P_2 x_2 + P_3 y_1 + P_4 y_2 = P_0$$

was vielleicht etwas weniger gelehrt aussieht, dafür aber leichter verständlich ist. Die P_k werden häufig als Spaltenüberschriften im Simplextableau verwendet, wobei P_0 die Bezeichnung «Lösungsvektor» oder Lösungsspalte führt.

Der Leser dürfte bereits erkannt haben, dass die erwähnten Kurzformen mit den Rechenregeln der Vektoren- und Matrizenalgebra zusammenhängen.

Das Simplextableau

Wer sich die Vektoren- und Matrixschreibweise eingeprägt hat, wird auch hinter dem Simplextableau mehr sehen als eine blosse Zahlen- oder Rechentabelle. Schreiben wir unser Zahlenbeispiel nochmals als erstes Simplextableau an:

Basis	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4
Z	0	-200	-100	0	0
y_1	4000	5	4	1	0
y_2	9000	9	10	0	1

Wir erkennen in dieser Schreibweise unschwer die Auflösung des gesamten Systems in Spaltenvektoren (P_k), wobei die Variablen dank der starren Tabellenordnung weggelassen sind, und das Gleichheitszeichen durch einen doppelten Kolonnenstrich angedeutet ist. Ferner ist darin die Matrixschreibweise erkennbar, sofern wir die Zeile der Zielfunktion durch einen Zeilenstrich von den übrigen Gleichungen abtrennen. Es sind deshalb beide Schreibweisen, im Blick auf die Erstellung eines Simplextableaus, brauchbar, und man begegnet deshalb in den Lehrbüchern – je nach Autor – beiden Formen. Auch das Simplextableau kann schliesslich in allgemeiner Form schematisiert werden:

Basis	P_0	P_1	$P_2 \dots P_n$	P_{n+1}	$P_{n+2} \dots P_{n+m}$
Z				0	0 ... 0
y_1				1	0 ... 0
.				0	1 ... 0
.				.	.
y_m				0	0 ... 1

Lösungsvektor
Prozessmatrix
Einheitsmatrix

Wer die Ausführungen aufmerksam durchgelesen hat, wird nun in der Lage sein, über die Anfangsschwierigkeiten der abstrakten und mathematischen Formelsprache hinwegzukommen, wie sie (leider) in den meisten deutschsprachigen Lehrbüchern als bekannt und selbstverständlich vorausgesetzt wird. (Schluss folgt)