

Zeitschrift: Technische Mitteilungen / Schweizerische Post-, Telefon- und Telegrafienbetriebe = Bulletin technique / Entreprise des postes, téléphones et télégraphes suisses = Bollettino tecnico / Azienda delle poste, dei telefoni e dei telegrafi svizzeri

Herausgeber: Schweizerische Post-, Telefon- und Telegrafienbetriebe

Band: 46 (1968)

Heft: 3

Artikel: Hohlleiter und Hohlraum-Resonatoren

Autor: Schanda, Erwin

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-875642>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 29.03.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Zusammenfassung. In diesem Beitrag werden Beispiele geführter elektromagnetischer Wellen behandelt, wie sie sich zwischen leitenden Wänden ausbilden können. Es sind dies Wellen in Hohlleitern mit rechteckigem und kreisförmigem Querschnitt, Hohlrohrwellen in Koaxialleitungen und Zylinderwellen zwischen zwei Metallplatten. Die einfachsten Wellentypen werden gezeigt, die näherungsweise Berechnung der Leitungsverluste durchgeführt und die Verzerrung eines amplitudenmodulierten Signals zufolge der Dispersion von Hohlleitern berechnet. Schliesslich werden die Hohlraumresonatoren, ihre Kreisgüte und Anwendungsmöglichkeiten besprochen.

Guides d'ondes et cavités résonantes

Résumé. Le présent article montre des exemples d'ondes électromagnétiques guidées, telles qu'elles peuvent se former entre des parois conductrices. Il s'agit des modes de propagation dans les guides d'ondes de section rectangulaire et circulaire ainsi que dans les circuits coaxiaux, et des ondes cylindriques qui se forment entre deux plaques métalliques. On montre les types d'ondes les plus simples, on calcule de manière approximative les pertes dans les conducteurs ainsi que la distorsion d'un signal modulé en amplitude en raison de la dispersion des guides d'ondes. On traite pour finir des cavités résonantes, de leur qualité et de leurs possibilités d'emploi.

Guida d'onde e cavità risonanti

Riassunto. Nel presente lavoro vengono trattati esempi di onde elettromagnetiche guidate, come queste possono formarsi fra pareti conduttrici. Si tratta di onde in guide a sezione rettangolare o rotonda, di onde guidate in condutture coassiali e di onde cilindriche fra due lastre metalliche. Vengono esposti i tipi di onde più semplici, eseguiti i calcoli approssimativi delle perdite nelle linee e calcolate le distorsioni d'un segnale modulato in ampiezza in seguito alla dispersione nella guida d'onda. Per finire vengono discusse le cavità risonanti, il loro fattore di qualità e le possibilità d'impiego.

1. Hohlleiter mit rechteckigem Querschnitt

In einem früheren Beitrag zu diesem Kurs [1] wurde der Hertz'sche Vektor eingeführt, aus dem man das elektrische und das magnetische Feld einer Welle darstellen kann. Dieser Vektor vom elektrischen Typ $\vec{H}^e$ genügt jedoch nicht, um die Gesamtheit aller möglichen Wellen darstellen zu können. Es bedarf dazu als Ergänzung noch des Hertz'schen Vektors vom magnetischen Typ $\vec{H}^m$ [2], auch *Fitzgeraldscher* Vektor genannt, der mit den elektrischen und magnetischen Wellenfeldern verknüpft ist durch

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\text{rot} \mu \frac{\partial \vec{H}^m}{\partial t} \\ \vec{H} &= \text{rot} \text{rot} \vec{H}^m \end{aligned} \quad (1)$$

Wir wollen nun für dieses Vektorfeld die Wellengleichung aufstellen und für die Randbedingungen im Innern eines leitenden Rohres von rechteckigem Querschnitt lösen. Sie lautet für harmonische Schwingungen der Kreisfrequenz ω und für Vakuum im Innern des Hohlleiters

$$\frac{\partial^2 \vec{H}^m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}^m}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}^m}{\partial z^2} = K_0^2 \vec{H}^m \quad (2)$$

mit $K_0 = i\omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ der Wellenzahl für Vakuum.

Man wird für diese Konfiguration sicher keine reine ebene Welle erhalten können und muss deshalb in (2) die Ableitungen nach allen drei Raumkoordinaten beibehalten. Die Richtung des Hertz-Vektors kann nun parallel zur z-Richtung eines kartesischen Koordinatensystems gelegt werden, die gleichzeitig eine Längskante des Hohlleiters sein soll

($\vec{H}^m = (0, 0, H^m)$). Die Querschnittabmessungen seien a und b. Um der Wellengleichung zu genügen, ist zu deren Lösung ein Ansatz mit räumlichen harmonischen Funktionen nötig. Da auch noch die Randbedingungen – die Tangentialkomponenten des elektrischen Feldes bei $x = 0$, $x = a$, $y = 0$ und $y = b$ müssen verschwinden – erfüllt werden müssen, kann der folgende Ansatz gemacht werden

$$H^m = A \cos \frac{m\pi}{a} x \cdot \cos \frac{n\pi}{b} y \cdot e^{-\gamma z} \quad (3)$$

wobei der Faktor der Zeitabhängigkeit $e^{i\omega t}$ weggelassen ist. Es ist A eine Amplitudenkonstante, m und n sind ganze positive Zahlen und bedeuten die Anzahl Halbwellen im Hohlleiterquerschnitt entlang der x- bzw. y-Richtung. Die Fortpflanzungskonstante der Welle in z-Richtung sei γ . Setzen wir den Ansatz (3) in (1) ein, so erhalten wir wegen

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{H}^m &= \vec{e}_x \frac{\partial H^m}{\partial y} - \vec{e}_y \frac{\partial H^m}{\partial x} \\ \text{rotrot} \vec{H}^m &= \vec{e}_x \frac{\partial^2 H^m}{\partial z \partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial^2 H^m}{\partial z \partial y} - \vec{e}_z \left[\frac{\partial^2 H^m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H^m}{\partial y^2} \right] \end{aligned} \quad (4)$$

($\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ sind die Einheitsvektoren in x, y und z-Richtung) für die Komponenten der Feldstärken

$$\begin{aligned} E_x &= i\omega \mu \frac{n\pi}{b} A \cos \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y \cdot e^{-\gamma z} \\ E_y &= -i\omega \mu \frac{m\pi}{a} A \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \cos \frac{n\pi}{b} y \cdot e^{-\gamma z} \\ E_z &= 0 \\ H_x &= \gamma \frac{m\pi}{a} A \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \cos \frac{n\pi}{b} y \cdot e^{-\gamma z} \\ H_y &= \gamma \frac{n\pi}{b} A \cos \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y \cdot e^{-\gamma z} \\ H_z &= \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] A \cos \frac{m\pi}{a} x \cdot \cos \frac{n\pi}{b} y \cdot e^{-\gamma z} \end{aligned} \quad (5)$$

¹ Nach einem Vortrag, gehalten anlässlich des Kolloquiums über die Theorie der elektromagnetischen Wellen, veranstaltet 1966/67 von den Instituten für angewandte Physik und Mathematik der Universität Bern

Man kann sich leicht davon überzeugen, dass die oben erwähnten Randbedingungen erfüllt sind. Auffallend an (5) ist, dass das elektrische Feld keine z-Komponenten hat. Dies ist das Resultat der Verwendung des Hertzschen Vektors vom magnetischen Typ, der mit den Feldstärken nach (1) verknüpft ist und magnetische Wellentypen zur Folge hat. Wegen des Fehlens der elektrischen Längsfeldkomponenten werden diese Wellentypen auch Transversal-Elektrische (TE-) Modes genannt.

Setzt man den Ansatz (3) in die Wellengleichung (2) ein, so erhält man als charakteristische Gleichung

$$-\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \gamma^2 = K_0^2 \quad (6)$$

Die komplexe Fortpflanzungskonstante $\gamma = \alpha + i\beta$, worin α das Dämpfungsmass und β das Phasenmass sind, in (6) eingesetzt, ergibt

$$\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + K_0^2 = \alpha^2 - \beta^2 + 2i\alpha\beta \quad (7)$$

Für verlustfreies Medium kann $K_0^2 = -\frac{\omega^2}{v^2}$ geschrieben werden, wo v die Phasengeschwindigkeit der Welle im freien Raum ist. Jeder Summand auf der linken Seite von (7) ist dann reell; es muss also entweder α oder β verschwinden. Gilt

$$\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 > \left(\frac{\omega}{v}\right)^2 \quad (8)$$

so verschwindet β , und wir haben es mit einem aperiodisch abklingenden Feld zu tun und sicher nicht mit einer Welle. Gilt dagegen

$$\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 < \left(\frac{\omega}{v}\right)^2 \quad (9)$$

so erhalten wir eine ungedämpfte Welle, deren Phasengeschwindigkeit im Hohlleiter (v_g) wegen $\beta = \omega/v_g$ durch die Gleichung (7) bei verschwindendem α gegeben ist. Weil die ersten beiden Summanden in (7) sicher positiv sind, muss

$$v_g \geq v$$

gelten.

Dies bedeutet, dass die Phasengeschwindigkeit der Hohlleiterwelle grösser als die der freien Welle ist. Nachrichten werden aber nur durch modulierte Wellen übertragen, und die Einhüllende einer modulierten Welle bewegt sich mit der Gruppengeschwindigkeit².

Schreiben wir (7) für den dämpfungsfreien Fall um

$$\beta^2 = \left(\frac{\omega}{v}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \quad (10)$$

und differenzieren wir dies nach ω , so erhalten wir für die Gruppengeschwindigkeit im Hohlleiter

$$u_g = \frac{d\omega}{d\beta} = \frac{\beta}{\omega} v^2 \quad (11)$$

Dies bedeutet aber, dass

$$u_g v_g = v^2 \quad (12)$$

und es muss die Gruppengeschwindigkeit kleiner als die Geschwindigkeit der freien Welle sein, wenn die Phasengeschwindigkeit grösser ist.

Die rechte Seite von (10) kann durch Frequenzänderung zu null gemacht werden, dies bedeutet eine unendlich grosse Phasengeschwindigkeit v_g und wegen

$$u = \frac{d\omega}{d\beta} \quad \beta = \frac{\omega}{v_g} = \frac{2\pi}{\lambda_g} \quad (13)$$

eine unendliche Wellenlänge λ_g im Hohlleiter. Die freie Wellenlänge λ , die zu dieser Situation gehört, nennt man Grenz- oder «cut-off»-Wellenlänge λ_c , weil bei noch grösserer Wellenlänge der Fall (8) eintritt, für den es keine Wellenausbreitung im entsprechenden Wellentyp (m, n) mehr gibt. Sie ist aus (10) definiert (für $\beta = 0$)

$$\left(\frac{1}{\lambda_c}\right)^2 = \left(\frac{m}{2a}\right)^2 + \left(\frac{n}{2b}\right)^2 \quad (14)$$

Setzt man (14) für $\beta = \omega/v_g \neq 0$ in (10) ein, so wird daraus

$$\omega^2 \left(\frac{1}{v^2} - \frac{1}{v_g^2} \right) = \left(\frac{2\pi}{\lambda_c} \right)^2$$

und mit (13)

$$\frac{v_g}{v} = \frac{\lambda_g}{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_c)^2}} \quad (15)$$

und wegen (12)

$$\frac{u_g}{v} = \sqrt{1 - (\lambda/\lambda_c)^2} \quad (16)$$

² Für die Übertragung von Nachrichten, das heisst modulierten Signalen, ist eine endliche Bandbreite nötig. Nehmen wir einfachheitshalber an, eine Nachricht wäre durch zwei Wellen gleicher Amplitude A , aber verschiedener Frequenzen ω_1 und ω_2 definiert. Das gesamte Signal wird dann

$$A [\cos(\omega_1 t - \beta_1 z + \varphi_1) + \cos(\omega_2 t - \beta_2 z + \varphi_2)] = 2A \cos \left[\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t - \frac{\beta_1 - \beta_2}{2} z + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \right] \cdot \cos \left[\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t - \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} z + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \right]$$

wo durch die erste Cosinus-Funktion der rechten Seite die Einhüllende der niederen Frequenz $(\omega_1 - \omega_2)/2$ und der Geschwindigkeit $u = z/t = (\omega_1 - \omega_2)/(\beta_1 - \beta_2)$ dargestellt wird. Die zweite Cosinus-Funktion repräsentiert das hochfrequente Signal der mittleren Frequenz $(\omega_1 + \omega_2)/2$, das mit der Phasengeschwindigkeit für diese Frequenz $(\omega_1 + \omega_2)/(\beta_1 + \beta_2)$ fortbewegt. Geschwindigkeit der Einhüllenden (Nachricht) ist die Gruppengeschwindigkeit, und besonders wird ihr Grenzwert für infinitesimal benachbarte Frequenzen

$$u = \frac{d\omega}{d\beta}$$

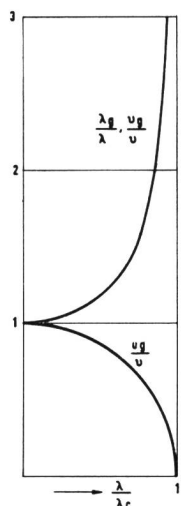


Fig. 1
Phasengeschwindigkeit v_g , Hohlleiterwellenlänge λ_g und Gruppengeschwindigkeit u_g als Funktion der freien Wellenlänge in Hohlleitern. Es bedeuten v die Fortpflanzungsgeschwindigkeit im freien Raum und λ_c die Grenzwellenlänge

Figur 1 zeigt die Beziehungen (15) und (16) graphisch dargestellt.

Der meist verwendete Wellentypus im Rechteck-Hohlleiter ist der einfachste Transversal-Elektrische nämlich TE_{10} . Die Feldkomponenten erhält man durch Einsetzen von $m = 1$ und $n = 0$ in (5). Sie lauten

$$\begin{aligned} E_y &= -i\omega\mu \frac{\pi}{a} A \sin \frac{\pi}{a} x \cdot e^{-\gamma z} \\ H_x &= \gamma \frac{\pi}{a} A \sin \frac{\pi}{a} x e^{-\gamma z} \\ H_z &= (\pi/a)^2 A \cos \frac{\pi}{a} x \cdot e^{-\gamma z} \end{aligned} \quad (17)$$

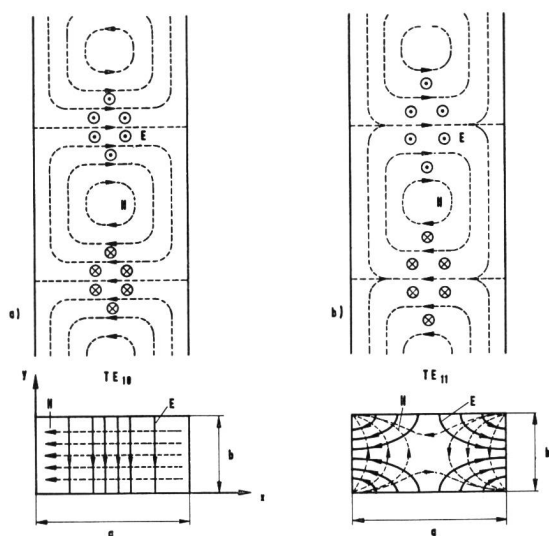


Fig. 2
Darstellung der Feldlinien der einfachsten Transversal-Elektrischen Modes im Rechteckhohlleiter: a) TE_{10} , b) TE_{11}

ausser E_z verschwinden auch noch E_x und H_y . In Figur 2a ist das Feldlinienbild dieses Wellentypus dargestellt. Man erkennt die Unabhängigkeit von der y-Koordinate. Die Grenzwellenlänge für diesen Typ ist nach (14) $\lambda_c = 2a$, sie wird also dann erreicht, wenn die halbe freie Wellenlänge gleich der Hohlleiterbreite wird. Das elektrische Feld ist selbstverständlich über den ganzen Querschnitt linear polarisiert, weil es nur eine y-Komponente gibt. Für das Magnetfeld hingegen erkennen wir aus der x-Abhängigkeit in (17), dass es an den schmalen Seitenwänden ($x = 0$ und $x = a$) des Hohlleiters in z-Richtung und in der Hohlleitermitte in x-Richtung linear polarisiert ist. Dazwischen findet über eine elliptische Polarisation ein kontinuierlicher Übergang statt. Reine zirkuläre Polarisation ($|H_x| = |H_z|$) haben wir auf einer Entfernung

$$x = \frac{a}{\pi} \arctan \frac{\lambda_g}{2a} \quad (18)$$

von jeder Hohlleiterwand, wie man aus (17) nach Einsetzen von $\gamma = i \frac{2\pi}{\lambda_g}$ leicht findet. Wegen der Imaginäreinheit als Vorfaktor bei H_x kann man auf eine Phasenverschiebung von H_x gegenüber H_z um 90° schliessen ($i = \exp[i\pi/2]$), die für eine Zirkularpolarisation nötig ist. Ein nächsthöherer Wellentyp ist TE_{11} , den man durch Einsetzen von $m = 1$ und $n = 1$ in (5) erhält. Das Feldlinienbild ist in Fig. 2b dargestellt.

Die Existenz von Elektrischen (das heisst Transversal-Magnetischen) Wellentypen lässt sich zeigen, wenn die Wellengleichung für den ursprünglichen Hertz-Vektor (elektrischer Typ) [1] gelöst wird. Die Feldkomponenten werden

$$\begin{aligned} E_x &= -\gamma \frac{m\pi}{a} B \cos \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y \cdot e^{-\gamma z} \\ E_y &= -\gamma \frac{n\pi}{b} B \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \cos \frac{n\pi}{b} y \cdot e^{-\gamma z} \\ E_z &= \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right] B \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y \cdot e^{-\gamma z} \\ H_x &= i\omega\epsilon \frac{n\pi}{b} B \sin \frac{m\pi}{a} x \cdot \cos \frac{n\pi}{b} y \cdot e^{-\gamma z} \\ H_y &= -i\omega\epsilon \frac{m\pi}{a} B \cos \frac{m\pi}{a} x \cdot \sin \frac{n\pi}{b} y \cdot e^{-\gamma z} \\ H_z &= 0 \end{aligned} \quad (19)$$

Die verschiedenen Modes erhält man wieder für verschiedene ganze Zahlen für m und n . Der niedrigste Typus ist TM_{11} , weil es für $m = 0$ oder $n = 0$ keine geschlossenen

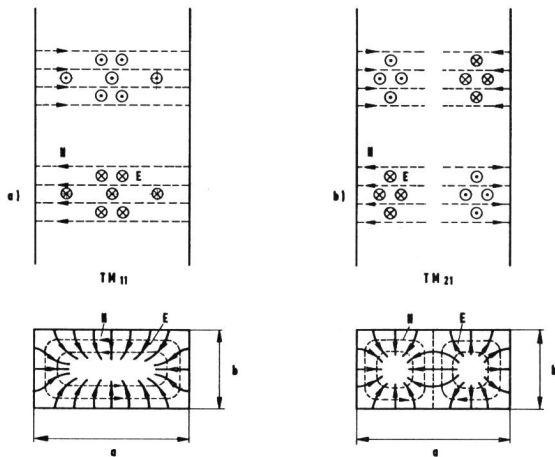


Fig. 3
Feldlinienbild der einfachsten Transversal-Magnetischen-Moden im Rechteckhohlleiter: a) TM_{11} , b) TM_{21}

Magnetfeldlinien mehr gäbe. Figur 3 zeigt das Feldlinienbild der zwei niedrigsten TM-Moden.

2. Hohlleiter mit kreisförmigem Querschnitt

Wir lösen nun die Wellengleichung für den Hertzvektor vom magnetischen Typ in Zylinderkoordinaten

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \vec{H}^m}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \vec{H}^m}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}^m}{\partial z^2} = K_0^2 \vec{H}^m \quad (20)$$

Die Richtung von $\vec{H}^m$ sei wieder parallel zur z-Achse gewählt, die mit der Fortpflanzungsrichtung übereinstimmen soll. Die φ - und z-Abhängigkeit kann nach der Methode der Trennung der Variablen mit dem Ansatz

$$H^m(r, \varphi, z) = H^m(r) \cos m\varphi \cdot e^{-\gamma z} \quad (21)$$

berücksichtigt werden, worin $H^m(r)$ eine noch unbekannte Funktion von r ist. Setzt man (21) in (20) ein, so erhält man

$$\frac{\partial^2 H^m(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H^m(r)}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} H^m(r) = K_0^2 H^m(r) - \gamma^2 H^m(r) \quad (22)$$

Die Koeffizienten rechts zusammengefasst ergeben für verlustfreies Medium

$$k^2 = \gamma^2 - K_0^2 = \omega^2 \left(\frac{1}{v^2} - \frac{1}{v_g^2} \right) = (2\pi)^2 \left(\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda_g^2} \right) \quad (23)$$

Wie im vorigen Abschnitt definieren wir als Grenzwellenlänge λ_c jene freie Wellenlänge, bei der die Hohlleiterwellenlänge unendlich wird, daher folgt aus (23)

$$k = \frac{2\pi}{\lambda_c} \quad (24)$$

Die Gleichung (22) kann durch eine Zylinderfunktion der Ordnung m erfüllt werden. Wenn wir annehmen, dass der ganze Hohlleiterquerschnitt (Radius a) von Luft (oder einem Dielektrikum) erfüllt sei, das heisst, die Leiterachse ($r = 0$) zum Definitionsbereich des Hertzvektors zählt, scheidet die Neumannfunktion aus, und es genügt für den Ansatz eine Besselfunktion J_m [3].

$$H^m(r, \varphi, z) = A J_m(kr) \cdot \cos m\varphi \cdot e^{-\gamma z} \quad (25)$$

Man kann (25) in (1) – nun jedoch in Zylinderkoordinaten – einsetzen, um die Feldstärken auszurechnen und sich überzeugen, ob man mit dem Ansatz (25) den Randbedingungen genügt. (Das elektrische Tangentialfeld und das magnetische Normalfeld muss an der Leiteroberfläche ($r = a$) verschwinden).

Für die Feldkomponenten erhält man

$$\begin{aligned} E_r &= i\omega\mu \frac{m}{r} A J_m(kr) \sin m\varphi \cdot e^{-\gamma z} \\ E_\varphi &= i\omega\mu k A J'_m(kr) \cos m\varphi \cdot e^{-\gamma z} \\ E_z &= 0 \\ H_r &= -\gamma k A J'_m(kr) \cos m\varphi \cdot e^{-\gamma z} \\ H_\varphi &= \frac{m}{r} \gamma A J_m(kr) \sin m\varphi \cdot e^{-\gamma z} \\ H_z &= k^2 A J_m(kr) \cos m\varphi \cdot e^{-\gamma z} \end{aligned} \quad (26)$$

Wir haben es hier wieder mit einem Transversal-Elektrischen Wellentyp zu tun. Die Randbedingungen sind erfüllt, wenn ka mit einer Nullstelle der Ableitung der Besselfunktion übereinstimmt

$$[J'_m]_{r=a} = \left[\frac{d J_m(kr)}{d(kr)} \right]_{r=a} = 0 \quad (27)$$

Die i-te Nullstelle von J'_m nennen wir y'_{mi} und wählen m und i als Indizes für die Wellentypbezeichnung. Aus den mit Hilfe von Funktionentafeln [3] gefundenen Werten für y'_{mi} können wegen

$$y'_{mi} = \frac{2\pi}{\lambda_c} \cdot a \quad (28)$$

die Grenzfrequenzen angegeben werden. In Tabelle I sind sie für die einfachsten TE_{mi} -Moden aufgeführt.

Tabelle I

m	i	y'_{mi}	λ_c/a
0	1	3,83	1,64
0	2	7,01	0,90
1	1	1,84	3,41
1	2	5,33	1,18
2	1	3,05	2,06
2	2	6,70	0,94

Die Lösung der Wellengleichung für den Hertzvektor des elektrischen Typs $\vec{H}^e$ erfolgt in ganz gleicher Weise und liefert den Transversal-Magnetischen (TM) Wellentypus, dessen Feldkomponenten lauten:

$$\begin{aligned} E_r &= -\gamma k B J'_m(kr) \cos m\varphi \cdot e^{-\gamma z} \\ E_\varphi &= \frac{m}{r} \gamma B J_m(kr) \sin m\varphi \cdot e^{-\gamma z} \\ E_z &= k^2 B J_m(kr) \cos m\varphi \cdot e^{-\gamma z} \\ H_r &= -i\omega \varepsilon \frac{m}{r} B J_m(kr) \sin m\varphi \cdot e^{-\gamma z} \\ H_\varphi &= -i\omega \varepsilon k B J'_m(kr) \cos m\varphi \cdot e^{-\gamma z} \\ H_z &= 0 \end{aligned} \quad (29)$$

Die Erfüllung der Randbedingungen erfordert nun, dass k mit einer Nullstelle y_{mi} der Besselfunktion J_m übereinstimmt. In *Tabelle II* sind die Nullstellen und Grenzwellenlängen bezogen auf den Hohlleiterradius für die einfachsten TM-Moden angegeben.

Tabelle II

m	i	y_{mi}	λ_c/a
0	1	2,40	2,61
0	2	5,52	1,14
1	1	3,83	1,64
1	2	7,01	0,90
2	1	5,14	1,22
2	2	8,41	0,75

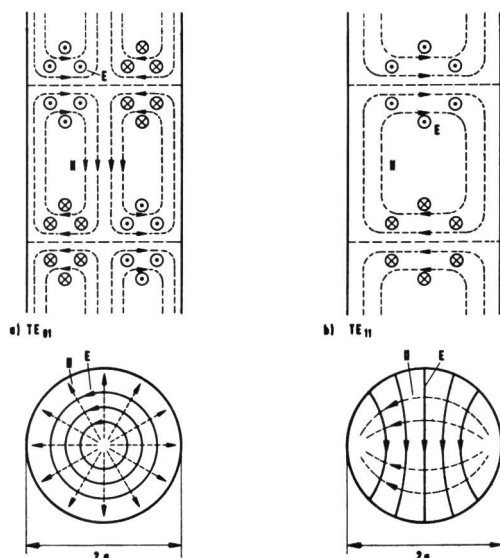


Fig. 4
Feldlinienbild der einfachsten Transversal-Elektrischen-Moden im zylindrischen Hohlleiter: a) TE_{01} , b) TE_{11}

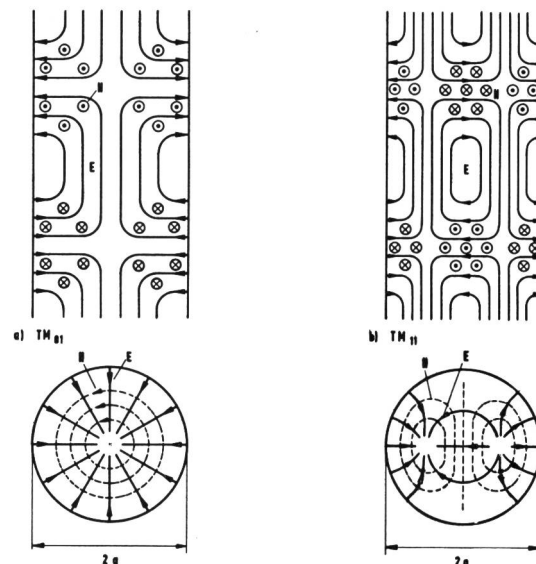


Fig. 5
Feldlinienbild der einfachsten Transversal-Magnetischen-Moden im zylindrischen Hohlleiter: a) TM_{01} , b) TM_{11}

In *Figure 4* sind die Feldlinienbilder der beiden einfachsten TE-Moden, in *Figure 5* jene der einfachsten TM-Moden dargestellt.

3. Wellen auf koaxialen Leitungen

Die weitaus verbreitetsten Leitungen für die Übertragung elektromagnetischer Wellen hoher Frequenz sind die Koaxialkabel. Der dabei verwendete Wellentypus ist der Transversal-Elektro-Magnetische (TEM), bei dem das elektrische Feld zwischen Aussen- und Innenleiter steht und das magnetische um den Innenleiter herum geschlossen ist.

Für diese einfache zwischen Leiterflächen eingeschlossene ebene Welle kann man, ohne die Wellengleichung lösen zu müssen, sofort für das radiale elektrische Feld ansetzen ($d/d\varphi = 0$)

$$E_r(r, z) = E_r(r) e^{-\gamma z} \quad (30)$$

worin wir $E_r(r)$ noch aus dem Gauss'schen Divergenzgesetz für ladungsfreie elektrische Felder ($\text{div } E = 0$) bestimmen.

In Zylinderkoordinaten wird das $\frac{\partial}{\partial r} [r E_r(r)] = 0$, und dies bedeutet

$$E_r(r) = \frac{A}{r} \quad (31)$$

Es sei A eine Amplitudenkonstante. Das azimuthale Magnetfeld kann leicht aus der zweiten Maxwellgleichung gefunden werden

$$\text{rot } \mathbf{E} = \frac{\partial \mathbf{E}_r}{\partial z} \cdot \mathbf{e}_\varphi = -\frac{\gamma \mathbf{A}}{r} e^{-\gamma z} \cdot \mathbf{e}_\varphi = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (32)$$

Setzt man näherungsweise verlustfreie Übertragung voraus ($\gamma = i\beta$), so wird

$$\mathbf{H}_\varphi = \frac{\beta \mathbf{A}}{\omega \mu r} \cdot e^{-\gamma z} \quad (33)$$

wenn wir für die Zeitabhängigkeit der Welle $\exp(i\omega t)$ annehmen.

Es können sich aber zwischen Innen- und Aussenleiter auch Wellentypen wie in Hohlleitern ausbilden, wenn nur die Wellenlänge kürzer als die Grenzwellenlänge gewählt wird. Für eine nähere Betrachtung dieser Wellentypen gehen wir wieder aus von der Wellengleichung (22), wobei auch wieder (23) und (24) gelten sollen. Die Leiterachse gehört nun nicht mehr zum Übertragungsquerschnitt. Deshalb muss zur Lösung von (22) ein allgemeiner Ansatz gemacht werden, nämlich

$$\mathbf{H}^m(r, \varphi, z) = [C J_m(kr) + D N_m(kr)] \cos m\varphi \cdot e^{-\gamma z} \quad (34)$$

darin bedeutet $N_m(kr)$ die Neumannfunktion m-ter Ordnung [3]. Wir können den Klammersausdruck in (34) abkürzen mit $Z_m(kr)$ und erhalten die Feldkomponenten der TE-Modes in der Koaxialleitung, wenn wir in (26) jeweils $Z_m(kr)$ statt $AJ_m(kr)$ setzen. Die Randbedingungen lauten nun

$$E_\varphi(ka) = 0 \quad E_\varphi(kb) = 0, \quad H_r(ka) = 0 \quad H_r(kb) = 0,$$

wo mit a der Radius des Aussenleiters und mit b der des Innenleiters bezeichnet sei. Es müssen also für die Ableitungen der Zylinderfunktionen nach ihren Argumenten an den Stellen $r = a$ und $r = b$

$$\begin{aligned} C J'_m(ka) + D N'_m(ka) &= 0 \\ C J'_m(kb) + D N'_m(kb) &= 0 \end{aligned} \quad (35)$$

erfüllt sein.

Das Verhältnis C/D aus einer der beiden Gleichungen (35) ausgerechnet und in die andere eingesetzt, liefert die Bedingung

$$J'_m(kb) N'_m(ka) - J'_m(ka) N'_m(kb) = 0 \quad (36)$$

Für die Berechnung der elektrischen Wellentypen können wir ganz analog vorgehen, wie bei den magnetischen. Für den Hertzvektor vom elektrischen Typ $\vec{\Pi}^e(r, \varphi, z)$ kann der gleiche Ansatz (34) gemacht werden, und die Ausdrücke für die Feldkomponenten sind durch (29) gegeben, wenn man statt $BJ_m(kr)$ die Linearkombination von Zylinderfunktionen innerhalb der Klammern von (34) verwendet. Aus den Randbedingungen, nämlich E_φ , E_z und H_r müssen bei $r = a$ und $r = b$ verschwinden, folgt für TM-Modes die Beziehung

$$J_m(kb) N_m(ka) - J_m(ka) N_m(kb) = 0 \quad (37)$$

Aus den Wurzeln von (36) und (37) lassen sich [4] mit Hilfe von (23) und (24) die Grenzwellenlängen bestimmen. In Tabelle III sind für die einfachsten TE- und TM-Modes die Nullstellen y'_{mi} beziehungsweise y_{mi} und die auf den Aussendurchmesser bezogenen Grenzwellenlängen angegeben, wobei m die Ordnung der Zylinderfunktion (halbe Zahl der Spannungsknoten über den Umfang) und i die Nummer der Nullstelle (Anzahl der Knoten der radialen elektrischen Feldstärke) bedeuten. Das Verhältnis von Aussen- zu Innendurchmesser der Koaxialleitung wurde für Tabelle III in Übereinstimmung mit den üblichen 50Ω ($a/b = 2,3$) und 75Ω ($a/b = 3,5$) Leitungen gewählt.

Tabelle III

Wellentyp	$a/b = 2,3$		$a/b = 3,5$	
	y'_{mi} beziehungsweise y_{mi}	λ_c/a	y'_{mi} beziehungsweise y_{mi}	λ_c/a
TE ₀₁	2,48	1,10	1,32	1,36
TE ₁₁	0,618	4,42	0,457	3,93
TE ₂₁	1,21	2,26	0,852	2,11
TE ₀₂	4,86	0,563	2,55	0,705
TM ₀₁	2,40	1,14	1,23	1,45
TM ₁₁	2,48	1,10	1,32	1,36
TM ₂₁	2,70	1,01	1,55	1,16
TM ₀₂	4,83	0,56	2,50	0,72

Bei Koaxialleitungen geht es im allgemeinen darum, die reine TEM-Welle zu übertragen und die Entstehung der be-

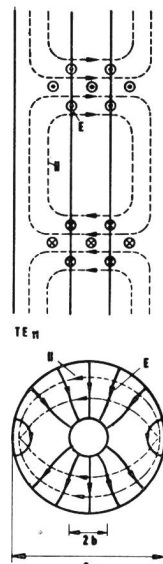


Fig. 6
Feldlinienverlauf der TE₁₁-Mode in einer Koaxialleitung

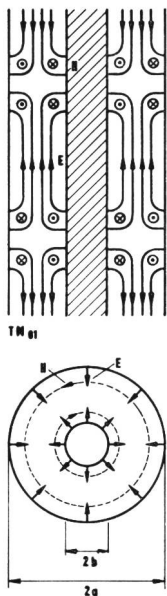


Fig. 7
Feldlinienverlauf der TM_{01} -Mode in einer Koaxialleitung

schriebenen Hohlleiter-Modes auch bei kurzen Wellenlängen zu vermeiden. Die angegebenen Werte für λ_c/a sind die längsten Wellenlängen, bei denen sie für einen gegebenen Aussenradius a noch entstehen können. Man erkennt aus der Tabelle III, dass die TE_{11} -Mode jene ist, die als erste entstehen kann.

In den Figuren 6 und 7 sind die Feldlinienbilder der einfachsten Hohlleiterwellentypen in Koaxialleitungen dargestellt.

4. Zylinderwellen zwischen ebenen Leitern

Wird an einer Stelle zwischen zwei parallelen Platten eine hochfrequente elektromagnetische Schwingung angeregt, so breitet sich zwischen den Platten eine Welle in radialer Richtung aus – eine sogenannte zylindrische Welle. Ihre Wellentypen hängen ab von der Art der Anregung und den Verhältnissen von Plattenabstand und betrachteter Entfernung vom Anregungspunkt gegenüber der Wellenlänge.

Es gilt selbstverständlich für dieses Problem dieselbe Wellengleichung (20) wie für den zylindrischen Hohlleiter, lediglich die Lösungen müssen anderen Randbedingungen genügen. Der einfachste Wellentyp ist eine TEM-Welle bezüglich der Ausbreitungsrichtung, die mit einer TM_{01} -Mode im zylindrischen Hohlleiter verwandt ist (Fig. 8). Ihre Feldkomponenten lassen sich aus früher Gesagtem ableiten

$$\begin{aligned} E_z &= -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial Z_0(kr)}{\partial r} \right] \\ H_\varphi &= -i\omega\epsilon \frac{\partial Z_0(kr)}{\partial r} \\ E_r &= E_\varphi = H_r = H_z = 0 \end{aligned} \quad (38)$$

Es sind dabei Z_0 wieder Zylinderfunktionen allgemeiner Art, weil über die Wellenanregung bei $r = 0$ noch keine besonderen Annahmen getroffen wurden. Die nächsthöhere Mode, die man aus der TM_{10} -Mode des zylindrischen Hohlleiters ableiten kann³ und bezüglich ihrer Ausbreitungsrichtung als TE_{10} bezeichnet werden könnte, ist in Figur 9a dargestellt. Eine besondere Anwendung findet dieser Wellentyp in der Sektorleitung oder dem Sektorhorn, bei dem ein rechteckiger Hohlleiter in seiner Breite a (Fig. 2a) linear vergrößert wird (Fig. 9b). Der Winkel, den die Seitenwände einschliessen, sei Φ , und die Periodizität des Feldes wird durch $m \frac{\pi}{\Phi} \cdot \varphi$ gegeben, so dass der Ansatz für den Hertzvektor lautet

$$H^e(r, \varphi, z) = Z_m(kr) \cos m \frac{\pi}{\Phi} \cdot \varphi \cdot e^{-i\beta z} \quad (39)$$

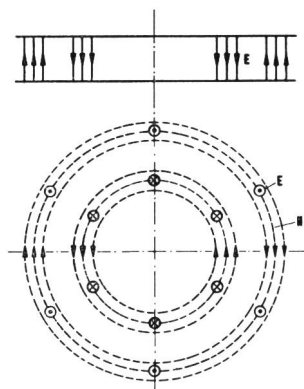


Fig. 8
Zylindrische TEM-Welle zwischen zwei ebenen Leitern

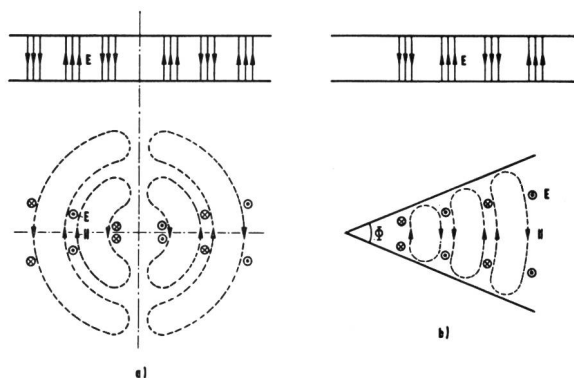


Fig. 9
a) Zylindrische TE_{10} -Welle zwischen parallelen ebenen Leitern
b) dasselbe, jedoch zusätzlich in azimuthaler Ausdehnung durch zwei Leiterebenen unter dem Winkel Φ begrenzt

³ In der Literatur (etwa [4]) werden die Wellentypenbezeichnungen für Zylinderwellen meist wie für den zylindrischen Hohlleiter gewählt und nicht entsprechend ihrer Ausbreitungsrichtung.

Berechnet man daraus die Felder für den allereinfachsten Typ ($m = 1$ und $\beta = 0$), so erhält man

$$\begin{aligned} E_z &= \frac{\pi^2}{r^2 \Phi^2} Z_1(kr) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial Z_1(kr)}{\partial r} \right) \cos \frac{\pi}{\Phi} \varphi \\ H_r &= -i \omega \varepsilon \frac{\pi}{r \Phi} Z_1(kr) \sin \frac{\pi}{\Phi} \varphi \\ H_\varphi &= -i \omega \varepsilon \frac{\partial}{\partial r} Z_1(kr) \cdot \cos \frac{\pi}{\Phi} \varphi \quad E_r = E_\varphi = H_z = 0 \end{aligned} \quad (40)$$

Es gibt auch Sektorhörner und Sektorleitungen für rechteckige Hohlleiter, bei denen die Schmalseite b linear verändert. Diese Situation lässt sich erfassen durch die TE-Modes des zylindrischen Hohlleiters. Die Periodizität der Felder in z -Richtung beschreiben wir durch $\beta = \frac{\pi}{a}$, worin a die Breite des ursprünglichen Hohlleiters ist. Die azimutale Periodizität sei $m = 0$. Die Felder werden dann

$$\begin{aligned} E_\varphi &= i \omega \mu \frac{\partial Z_0(kr)}{\partial r} \cdot e^{-i \frac{\pi}{a} z} \\ H_r &= i \frac{\pi}{a} \frac{\partial Z_0(kr)}{\partial r} \cdot e^{-i \frac{\pi}{a} z} \\ H_z &= -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial Z_0(kr)}{\partial r} \right] e^{-i \frac{\pi}{a} z} \\ E_r &= E_z = H_\varphi = 0 \end{aligned} \quad (41)$$

Die Amplitudenabnahme für grösser werdende Radien erfolgt wie die der Zylinderfunktionen. Die Grenzwellenlänge für bestimmte Wellentypen erhält man aus der Bedingung, dass für sie die Leitungswellenlänge unendlich beziehungsweise $\partial/\partial r = 0$ werden muss.

Machen wir von dieser Bedingung in der Wellengleichung (22) Gebrauch, so erhalten wir bei einem Plattenabstand $L = \frac{l\pi}{\beta}$

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda_c} \right)^2 = \left(\frac{m}{r} \right)^2 + \left(\frac{l\pi}{L} \right)^2 \quad (42)$$

wo l die Anzahl der halben Wellenlängen innerhalb von L ist. Wir sehen daraus, dass der einfachste Wellentypus ($m = l = 0$) keine endliche Grenzwellenlänge besitzt und sich daher beliebig tiefe Frequenzen in dieser Mode ausbreiten können. Für Wellentypen mit azimutaler Periodizität ($m \neq 0$, aber $l = 0$) wächst λ_c proportional mit r über alle Grenzen. Wegen der Abhängigkeit der Grenzwellenlänge vom Abstand r zum Ursprung der Zylinderwelle sei die Beziehung (15) zwischen Leitungs- und freier Wellenlänge für diesen Fall erläuternd angeschrieben

$$\frac{\lambda_g}{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda^2 \left[\left(\frac{m}{2\pi r} \right)^2 + \left(\frac{l}{2L} \right)^2 \right]}} \quad (43)$$

Für $l = 0$ geht λ_g bei ausreichend grossem Radius r über in λ , was anschaulich klar ist, weil die Zylinderwelle immer mehr zu einer ebenen Welle wird.

5. Wellenimpedanz und Dämpfung in Hohlleitern

Die gesamte durch einen Hohlleiter übertragene Leistung berechnet man durch Integration des mittleren Leistungsflusses, der durch den zeitlichen Mittelwert des Poyntingvektors gegeben ist, über den Querschnitt. Der Poyntingvektor für den Rechteck-Hohlleiter

$$\bar{\mathbf{S}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*] = \frac{1}{2} [E_x \cdot H_y^* - E_y \cdot H_x^*] \cdot \mathbf{e}_z \quad (44)$$

wobei $\mathbf{e}_z$ der in Fortpflanzungsrichtung weisende Einheitsvektor ist. Integriert man (44) über den ganzen Querschnitt und setzt dazu aus (5) ein, so erhält man die übertragene Leistung.

$$\begin{aligned} P &= i \omega \mu \gamma A^2 \left[\left(\frac{\pi m}{a} \right)^2 + \left(\frac{\pi n}{b} \right)^2 \right] \frac{ab}{8} \cdot e^{-2(\gamma + \gamma^*)z} = \\ &= \frac{\gamma}{i \omega \mu} \left[|\hat{E}_x|^2 + |\hat{E}_y|^2 \right] \frac{ab}{8} \end{aligned} \quad (45)$$

Bekanntlich gibt bei einer ebenen Welle das Verhältnis von elektrischer und magnetischer Feldstärke, die beide senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung und senkrecht aufeinander stehen, die sogenannte Wellenimpedanz⁴. Bilden wir aus den entsprechenden Transversalkomponenten von (5) dieses Verhältnis, wird die Wellenimpedanz für TE-Modes

$$\frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x} = \frac{i \omega \mu}{\gamma} = Z_{TE} \quad (46)$$

Aus (19) finden wir die Wellenimpedanz für TM-Modes zu

$$\frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x} = \frac{\gamma}{i \omega \varepsilon} = Z_{TM} \quad (47)$$

Wir erhalten schliesslich mit (46) den Ausdruck für die Leistung durch den Querschnitt in einer vertrauten Form

$$P = \frac{|\hat{E}_x|^2 + |\hat{E}_y|^2}{Z_{TE}} \cdot \frac{ab}{8} \quad (48)$$

Unter der Voraussetzung vernachlässigbarer Dämpfung ($\gamma \approx i\beta$) werden

$$Z_{TE} = \frac{\lambda_g}{\lambda} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \quad (49)$$

und

$$Z_{TM} = \frac{\lambda}{\lambda_g} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \quad (50)$$

⁴ Um neben der Wellenimpedanz auch für Hohlleiterwellentypen eine charakteristische Impedanz zur Verfügung zu haben, wie sie bei TEM-Mode führenden Leitungen aus dem Spannungs-Strom-Verhältnis definiert ist, hat Waldron [5] kürzlich einen interessanten neuen Vorschlag gemacht, bei dem allerdings die charakteristischen Impedanzen der TE₀₁-Modes im runden Hohlleiter unendlich werden.

Die Formeln (45) und (48) sind richtig für $m \neq 0$ und $n \neq 0$. Ist dagegen einer der Indices 0, so tritt bei der Integration anstelle eines Faktors $\frac{1}{2}$ der Faktor 1. Somit wird die übertragene Leistung für den TE_{10} -Wellentyp

$$P_{10} = \left| \hat{E}_y \right|^2 \frac{a b}{4} \cdot \frac{\lambda}{\lambda_g} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \quad (51)$$

Stellt man die endliche Dämpfung durch den Hohlleiter in Rechnung ($\gamma = \alpha + i\beta$ mit $\alpha > 0$), so wird die Leistung durch den Querschnitt an einer Stelle z sein

$$P = P_0 e^{-2\alpha z}$$

wenn P_0 die Leistung bei $z = 0$ bedeutet. Die Leistung, die auf einem infinitesimalen Leitungsstück dissipiert wird, ist

$$\frac{dP}{dz} = -2\alpha P \quad (52)$$

Aus Überlegungen zum Skin-Effekt [6] wissen wir, dass

$$\frac{dP}{dz} = \frac{1}{2} |I|^2 R_L = \frac{l}{2} |H_{\text{tang}}|^2 R_L \quad (53)$$

ist, wobei I der Strom im Leiter, H_{tang} das tangential zum Leiter verlaufende Magnetfeld, l die Länge des gesamten Umfangs und $R_L = \sqrt{\omega \mu_L / 2 \sigma_L}$ der Wellenwiderstand des Leitermaterials sind. Das tangential Magnetfeld variiert entlang des Umfangs in Grösse und Richtung; daher muss die rechte Seite von (53) als Integration berechnet werden. Wollen wir uns auf die fast ausschliesslich verwendete TE_{10} -Mode beschränken, um die Rechnung möglichst einfach zu gestalten, dann wird

$$\frac{dP}{dz} = R_L \left[\int_0^a (|H_x|^2 + |H_z|^2)_{y=0} \cdot dx + \int_0^b |H_z|^2_{x=0} \cdot dy \right] \quad (54)$$

Der Faktor $\frac{1}{2}$ in (53) fällt weg, weil jeweils zwei Wände zu berücksichtigen sind. Unter der Voraussetzung, dass auch für endliche Dämpfung die Felder noch durch (17) beschrieben werden können, setzen wir von dort in (51) und (54) ein und erhalten aus (52)

$$\left| \alpha_{\square}^{TE_{10}} \right| = \frac{R_L}{\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}} \cdot \frac{\frac{1}{b} + \left(\frac{\lambda}{\lambda_c} \right)^2 \cdot \frac{2}{a}}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_c)^2}} \quad (55)$$

Für die Berechnung der Dämpfungskonstante ist noch die Frequenzabhängigkeit von R_L zu berücksichtigen, die sich in einem Faktor $\sqrt{f/f_0}$ auswirkt.

Die TE_{01} -Mode im kreiszylindrischen Hohlleiter hat besonders günstige Dämpfungseigenschaften, die von denen aller anderen Wellentypen grundsätzlich abweichen. Für die

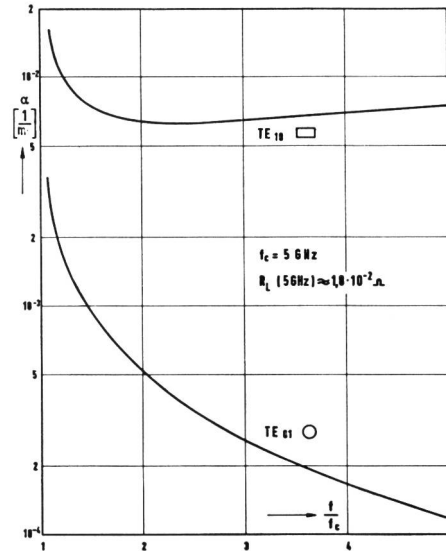


Fig. 10
Dämpfungsmass α für die TE_{10} -Mode im rechteckigen und für die TE_{01} -Mode im runden Hohlleiterquerschnitt

Berechnung von P und dP/dz setzt man aus (26) für $m = 0$ in die Integrale ein und findet für die Dämpfungskonstante

$$\left| \alpha_{\circ}^{TE_{01}} \right| = \frac{R_L}{\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}} \cdot \frac{\left(\frac{\lambda}{\lambda_c} \right)^2 \frac{1}{a}}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_c)^2}} \quad (56)$$

Man erkennt aus (56), dass die Dämpfung nach kürzer werdenden Wellenlängen kontinuierlich abfällt und nicht wie bei allen anderen Wellentypen ein Minimum aufweist. In Figur 10 ist der Verlauf der Dämpfung für den TE_{10} -Typ im Rechteckhohlleiter und für den TE_{01} -Typ im runden Hohlleiter dargestellt. Alle übrigen Wellentypen zeigen einen Verlauf ähnlich dem des TE_{10} -Typs [7].

6. Verzerrung eines AM-Signals durch die Hohlleiterdispersion [8]

An der Stelle $z = 0$ eines Hohlleiters sei eine amplitudenmodulierte Welle gegeben durch

$$A(0, t) = A_0 [1 + m \sin \Delta \omega t] \sin \omega_0 t \quad (57)$$

wo ω_0 die Signalfrequenz, $\Delta \omega$ die Modulationsfrequenz oder die obere Grenze des Modulationsbandes ist und m der Modulationsgrad. Für eine beliebige Stelle z auf der Leitung, die wir für diese Betrachtung wieder als verlustfrei voraussetzen wollen, kommt nun die Phasenkonstante β für ω_0 und $\omega_0 \pm \Delta \omega$ in das Argument der Winkelfunktionen in

(57). Sofern $\Delta\omega \ll \omega_0$ gilt, kann $\beta(\omega_0 \pm \Delta\omega)$ als Reihenentwicklung an der Stelle ω_0 dargestellt werden

$$\beta(\omega_0 \pm \Delta\omega) = \beta_0 \pm \Delta\omega \left[\frac{d\beta}{d\omega} \right]_{\omega_0} + \frac{(\Delta\omega)^2}{2} \left[\frac{d^2\beta}{d\omega^2} \right]_{\omega_0} = \beta_0 \pm \Delta\beta + \Delta'\beta \quad (58)$$

Wegen (15) kann für unsere Zwecke die Phasenkonstante geschrieben werden als

$$\beta = \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}}{v} \quad (59)$$

wo ω_c die Grenzfrequenz und v die Phasengeschwindigkeit im freien Raum bedeuten. Ebenso findet man wegen (11) und (16) leicht

$$\Delta\beta = \frac{\Delta\omega}{v} \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - \omega_c^2}} \quad (60)$$

und

$$\Delta'\beta = -\frac{(\Delta\omega)^2}{2v} \frac{\omega_c^2}{(\omega^2 - \omega_c^2)^{3/2}} \quad (61)$$

In entsprechender Weise für die Welle an der Stelle z eingesetzt und eine goniometrische Umformung auf das Produkt der beiden Winkelfunktionen angewendet

$$A(z, t) = A_0 \left[\sin(\omega_0 t - \beta_0 z) + \frac{m}{2} \cos(\omega_0 t - \beta_0 z - \Delta'\beta z - \Delta\omega t + \Delta\beta z) - \frac{m}{2} \cos(\omega_0 t - \beta_0 z - \Delta'\beta z + \Delta\omega t - \Delta\beta z) \right] \quad (62)$$

Fasst man nun die Glieder mit ω_0 und β_0 beziehungsweise $\Delta\omega$ und $\Delta\beta$ beziehungsweise mit $\Delta'\beta$ zusammen und stellt sie mit einer weiteren goniometrischen Umformung als Produkt dreier Winkelfunktionen dar, so erhält man aus (62) einen Ausdruck der Form

$$A(z, t) = A_0 [B \sin \Theta + C \cos \Theta] \quad (63)$$

$$\begin{aligned} \text{mit } B &= 1 + m \sin(\Delta\omega t - \Delta\beta z) \cdot \cos \Delta'\beta z \\ C &= -m \sin(\Delta\omega t - \Delta\beta z) \cdot \sin \Delta'\beta z \\ \Theta &= \omega_0 t - \beta_0 z \end{aligned}$$

Für den Klammerausdruck in (63) gilt die Identität⁵

$$B \sin \Theta + C \cos \Theta = \sqrt{B^2 + C^2} \cdot \sin \left[\Theta + \arctan \frac{C}{B} \right] \quad (64)$$

und wenn der Modulationsgrad m klein genug ist, kann (64) wegen $B \approx 1 \gg C$ angenähert werden durch $B \sin(\Theta + C)$.

⁵ Die rechte Seite von (64) kann umgeschrieben werden zu $\sqrt{B^2 + C^2} [\sin \Theta \cdot \cos(\arctan C/B) + \cos \Theta \cdot \sin(\arctan C/B)] = \sqrt{B^2 + C^2} \cdot \cos(\arctan C/B) [\sin \Theta + C/B \cos \Theta] = B \sin \Theta + C \cos \Theta$ wie man sich leicht geometrisch veranschaulichen kann.

Aus der ursprünglichen AM-modulierten Welle ist somit an der Stelle z geworden

$$A(z, t) = A_0 [1 + m \sin(\Delta\omega t - \Delta\beta z) \cos \Delta'\beta z] \sin(\omega_0 t - \beta_0 z + C) \quad (65)$$

An den Stellen $z = (2n+1) \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\Delta'\beta}$ ist die Modulation für die zugehörige Modulationsfrequenz vollkommen verschwunden, und an den gleichen Stellen ist die Phasenmodulation am grössten. Bei der Übertragung eines geschlossenen Frequenzbandes um den Träger ist die erste Nullstelle für den Rand des Bandes massgeblich, weil für grössere Abstände z immer für irgendeine Frequenz innerhalb des Bandes die Modulation verschwindet.

Für eine Bandbreite von 100 MHz bei einem Träger von 9 GHz im üblichen Hohlleiter für diese Frequenz mit einer Grenzfrequenz von 6,6 GHz verschwindet die Modulation am äussersten Bandende bei 90 m Abstand. Aus (61) erkennt man, dass die einzige Massnahme, diese Signalverzerrung klein zu halten, in der Wahl eines Hohlleiters mit möglichst tiefer Grenzfrequenz liegt, was aber durch das Auftreten höherer Wellentypen eine Begrenzung findet.

7. Hohlraumresonatoren

Laufen in einem Hohlleiter zwei Wellen gleicher Amplitude und Frequenz gegeneinander, so entsteht durch Superposition eine stehende Welle, bei der der netto Energietransport nach jeder Seite null ist. Schliesst man den Hohlleiter an zwei Knoten transversaler elektrischer Feldstärke mit leitenden Wänden ab, so bleibt das Feldbild der stehenden Welle unverändert erhalten, die Randbedingungen für diese Anordnung werden durch die Feldkonfiguration erfüllt. Durch diese Geometrie wird für die elektromagnetische Schwingung eine resonante Situation geschaffen, die nur für eine bestimmte Frequenz eintritt. In der Praxis kann der Hohlraum nicht vollständig mit leitenden Wänden abgeschlossen werden, da das Einkoppeln der Welle möglich sein muss. Alle Wände eines quaderförmigen Hohlraums seien ideal leitend, und auch das Medium im Innern sei verlustlos. Die Länge des Hohlraums L stimme gerade mit einer ganzen Anzahl l halber Wellenlängen überein $(L = l \frac{\lambda_g}{2})$, so dass aus (10) unmittelbar folgt

$$\left(\frac{\omega}{v} \right)^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda_{mnl}} \right)^2 = \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + \left(\frac{l\pi}{L} \right)^2 \quad (66)$$

wo mit λ_{mnl} die Wellenlänge gemeint sei, für die der Hohlraumwellentyp m, n, l gerade in den Quader mit den Kantenlängen a, b, L passt. Die Resonanzfrequenz ist aus (66)

$$f_{mnl} = \frac{v}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 + \left(\frac{l}{L} \right)^2} \quad (67)$$

Für Hohlräume, die durch das Abschliessen von kreiszylindrischen Hohlleitern mit leitenden Ebenen entstehen, erhält man aus (23) und (28) für TE-Resonatoren:

$$\left(\frac{\omega}{v}\right)^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda_{m11}}\right)^2 = \left(\frac{\pi l}{L}\right)^2 + \left(\frac{y'_{mi}}{a}\right)^2 \quad (68)$$

wenn wir die Länge L des Hohlraums wieder eine ganze Anzahl / halber Wellenlängen lang machen. Für TM Wellentypen würde in (68) statt y'_{mi} die Nullstelle y_{mi} einer Bessel-funktion stehen. Die Resonanzfrequenz wird

$$f_{m11} = \frac{v}{2} \sqrt{\left(\frac{l}{L}\right)^2 + \left(\frac{y'_{mi}}{\pi a}\right)^2} \quad (69)$$

Figur 11 ist ein Diagramm für verschiedene Wellentypen, in dem die Resonanzwellenlänge und ihre Abhängigkeit von der Geometrie zylindrischer Resonatoren gezeigt wird. Nach der Resonanzfrequenz ist die Kreisgüte ein wichtiges Merkmal für einen Resonator. Für die Berechnung der Güte von Hohlraumresonatoren macht man vorteilhaft Gebrauch von ihrer Definition als Verhältnis aus der mittleren gespeicherten Energie W und der mittleren Verlustleistung P je Resonanz-Kreisfrequenz ω_0 .

$$Q = \frac{\omega_0 W}{P} \quad (70)$$

Ein Vergleich mit üblichen Hochfrequenz-Schwingkreisen, für die bekanntlich $W = \frac{1}{2} L |I|^2$ und $P = \frac{1}{2} R |I|^2$ sind, zeigt, dass man aus (70) $Q = \omega_0 L / R$ erhält.

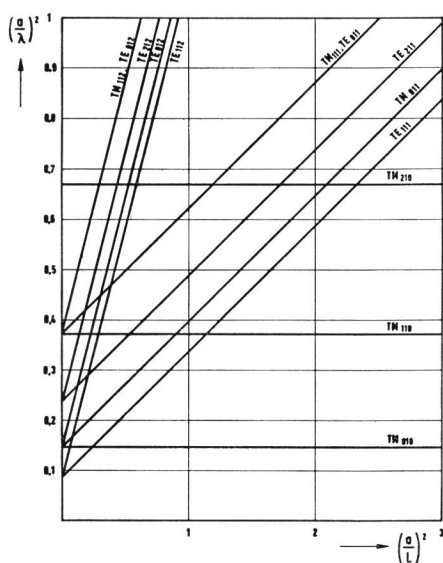


Fig. 11
Diagramm für die Resonanzwellenlänge verschiedener Wellentypen als Funktion der Abmessungen kreiszylindrischer Hohlraum Resonatoren (Mode Chart). Die Länge des Resonators sei L und sein Radius a .

Im Falle von Hohlraumresonatoren muss die gespeicherte Energie aus der Integration der Energie in jeden Raumpunkt über das ganze Resonatorvolumen V ,

$$W = \frac{1}{4} \int_V [\epsilon |E|^2 + \mu |H|^2] dV \quad (71)$$

und die Verlustleistung – ähnlich wie bei der Berechnung der Leitungsdämpfung in Abschnitt 5 – durch Integration der in jedem Flächenelement des Leiters umgesetzten Leistung über die gesamte Oberfläche F

$$P = \frac{1}{2} \int_F R_L |H_{\text{tang}}|^2 dF \quad (72)$$

berechnet werden. Setzt man die Feldstärken in (71) und (72) zum Beispiel für die TE_{10} -Mode des rechteckigen Hohlleiters ein und wählt die Resonatorlänge $\lambda_g/2$, so spricht man von der Resonator-Mode TE_{101} , und wenn der Hohlraum würfelförmig gewählt wird, erhält man für die Güte

$$Q_{TE101}^{\square} = 0,741 \frac{\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}}{R_L} \quad (73)$$

Zwei häufig verwendete zylindrische Hohlraum-Wellentypen sind TE_{011} und TM_{010} . Der letztgenannte Wellentyp hat als Längsindex eine null, das heisst, dass das elektrische Feld zwischen den Abschlussebenen steht und unabhängig von der z -Richtung ist. Die Güte wird

$$Q_{TE011}^{\circ} = \frac{\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}}{2 R_L} \sqrt{14,65 + \left(\frac{\pi a}{L}\right)^2} \quad (74)$$

wobei die erste Zahl in der Wurzel nichts anderes ist als $(y'_{01})^2$. Für die TM_{010} -Mode wird die Güte

$$Q_{TM010}^{\circ} = \frac{\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}}{2 R_L} \cdot \frac{2,40 \cdot L}{a + L} \quad (75)$$

worin $y_{01} = 2,40$ eingesetzt ist.

Für 10 GHz und Kupferoberflächen ($R_L \approx 0,026 \Omega$) gibt Tabelle IV die nach den vorstehenden Formeln berechneten Werte für die Güte.

Tabelle IV

Resonatorform	Wellentyp	Güte
Würfel	TE_{101}	10.700
Zylinder ($a = L$)	TM_{010}	11.600
Zylinder ($a = L$)	TE_{011}	35.800

Die TE_{101} -Mode im Würfel und die TM_{010} -Mode im Zylinder haben ganz ähnliche Feldlinienbilder. Die höhere Güte der letzteren ist eine Konsequenz des günstigeren Verhältnisses von Volumen und Oberfläche. Die zylindrische TE_{011} -Mode hat wegen der geringeren mittleren Wandstromdichte und dem notwendigerweise grösseren Verhältnis von Volumen zu Oberfläche eine bedeutend höhere Güte. Es ist dies dieselbe Mode, die auch die geringen und mit zunehmender Frequenz abnehmenden Transmissionsverluste hat, wie in Abschnitt 5 gezeigt wurde. In der Praxis erreicht man nur etwa ein Drittel bis halb so hohe Werte, weil durch Ankopplung und Rauheit der Oberfläche weitere Verluste introduziert werden. Für Wellentypen höherer Ordnung wird die Güte wegen des zunehmenden Verhältnisses von Volumen und Oberfläche stets grösser.

8. Anwendungen von Hohlraumresonatoren

Die Anwendung von Hohlraum-Resonatoren für Frequenzmessung ist unmittelbar einleuchtend, weil es eine einfache Beziehung [etwa (67) oder (69)] zwischen der Frequenz und den Abmessungen gibt, und die hohe Kreisgüte eine scharfe Frequenzauflösung gewährleistet. Eine Veränderung der Abmessungen erlaubt in einem weiten Bereich die Abstimmung auf Resonanzfrequenz. Der zylindrische Resonator mit dem TE_{011} -Wellentyp ist auch in dieser Hinsicht besonders günstig. Es fliessen nämlich keine Wandströme zwischen Zylinderwand und Deckel, so dass ohne Güteeinbusse ein Deckel als Kolben ausgeführt und ohne Berührung mit der Zylinderwand zur Abstimmung hin und her geschoben werden kann.

Eine weitere Anwendungsmöglichkeit liegt im Bau von Bandfiltern durch geeignete Kopplung mehrerer Resonatoren [9], [10] in Analogie zu den Kaskadengeschalteten Resonanzkreisen bei Hochfrequenzfiltern.

Die Verwendung von Hohlraum-Resonatoren für die Untersuchung von makroskopischen und auch molekularen Materialeigenschaften im Wellenlängengebiet zwischen 1 mm und 1 m [11], [12], [13] ist eine wichtige Anwendung der Hohlraumresonatoren in der Physik. Ist ein Resonator von einem Medium erfüllt, dessen Dielektrizitätskonstante oder Permeabilität von der des Vakuum abweicht, so geht in (67) oder (69) eine durch $\sqrt{\epsilon_r \mu_r}$ dividierte Phasengeschwindigkeit ein. Bei konstanter Geometrie erhält man eine neue Resonanzfrequenz. Flüssigkeiten und feste Körper haben hohe Dielektrizitätskonstanten und würden bei ganz gefülltem Hohlraum unpraktisch grosse Verstimmungen ergeben. Auch würden meistens die mit dem Material eingebrachten Verluste so hoch sein, dass es zu keiner ausgeprägten Resonanz mehr kommen kann. Man füllt dann nur einen kleinen Teil des Volumens mit dem zu untersuchenden Material, um das messtechnische Problem zu erleichtern.

Diese Massnahme hat jedoch eine Komplizierung der Berechnung des Zusammenhangs zwischen Materialeigenschaften und Resonanzfrequenz zur Folge. In den meisten Fällen erhält man transzendente Gleichungen. Ist das Volumen des Messobjekts klein genug, dass nur eine geringfügige Veränderung des Wellenbildes verursacht wird, kann man eine Störungsrechnung [14] anwenden, die für ein dielektrisches «Stör»-Objekt auf die Berechnung von

$$\Delta\omega \int_V [\epsilon_0 |E|^2 + \mu_0 |H|^2] dV = -\omega \epsilon_0 \int_v (\epsilon_r - 1) |E|^2 dv \quad (76)$$

hinausläuft. Es sind dabei ϵ_r die relative Dielektrizitätskonstante und v das Volumen des Messobjekts, $\Delta\omega$ die verursachte Verschiebung der Resonanzfrequenz und V das Volumen des ganzen Hohlraums. Die Aussage von (76) ist die, dass die relative Frequenzverstimmung $\Delta\omega/\omega$ gleich dem Verhältnis aus Energiezuwachs durch Einbringen des Messobjekts und totalem Energieinhalt des leeren Resonators ist. Als Beispiel seien die Verhältnisse für den zylindrischen TM_{010} -Wellentyp zur Messung der Dielektrizitätskonstanten skizziert. Das elektrische Feld hat in der Achse sein Maximum und ist parallel zu ihr gerichtet. Bringt man nun im Maximum ein Stäbchen mit einer relativen Dielektrizitätskonstanten ϵ_r an, dessen Achse mit der des Resonators zusammenfällt, so darf man für die Berechnung von ϵ_r aus der Verstimmung die Störungsrechnung anwenden, wenn der Stäbchendurchmesser d viel kleiner als der Resonatordurchmesser D ist. In (76) für die TM_{010} -Mode und die beschriebene Konfiguration eingesetzt, erhält man

$$\epsilon'_r = 1 - 0,54 \left(\frac{D}{d} \right)^2 \cdot \frac{\Delta\omega}{\omega} \quad (77)$$

für den Realteil der relativen Dielektrizitätskonstanten und für den Verlustanteil

$$\epsilon''_r = 0,27 \left(\frac{D}{d} \right)^2 \cdot \frac{1}{Q} \quad (78)$$

wo $1/Q = 1/Q_0 - 1/Q_1$ ist und Q_0 die Güte des leeren Resonators und Q_1 die Güte des Resonators mit der verlustbehafteten Probe darstellen. Die Ungenauigkeit der Formeln (77) und (78) gegenüber einer exakten Berechnung sowie die Einflüsse magnetischer Eigenschaften des Probekörpers auf das Messresultat sind in [15] ausführlich diskutiert.

Als weitere ergänzende Literatur zur Materie dieses Beitrages sei noch auf die Bücher von *Atwater* [16] und *Unger* [17] verwiesen.

Adresse des Autors: E. Schanda, c/o Institut für angewandte Physik der Universität Bern, Sidlerstr. 5, CH-3000 Bern.

Literatur

- [1] E. Schanda. Die Elektrizitätslehre und die Maxwellsche Theorie. Techn. Mitt. PTT 45 (1967), Nr. 9, S. 512...521.
- [2] Stratton J. A. Electromagnetic Theory. McGraw Hill, New York, 1941.
- [3] E. Jahnke, F. Emde. Funktionentafeln mit Formeln und Kurven, Dover Publications, New York, 1945.
- [4] N. Marcuvitz. Waveguide Handbook. McGraw Hill, New York, 1950.
- [5] R. A. Waldron. Characteristic Impedances of Waveguides. The Marconi Review 30 (1967), p. 125...136.
- [6] E. Schanda. Oberflächenwellen. Techn. Mitt. PTT 45 (1967), Nr. 11, S. 610...621.
- [7] T. A. Moreno. Microwave Transmission Design Data. Dover Publications, New York, 1958.
- [8] P. C. Magnusson. Transmission Lines and Wave Propagation. Allyn & Bacon, Boston, 1965.
- [9] J. L. Altman. Microwave Circuits. van Nostrand, Princeton, 1964.
- [10] G. L. Matthaei, L. Young, E. M. T. Jones. Microwave Filters, Impedance-Matching Networks and Coupling Structures. McGraw Hill, New York, 1964.
- [11] A. R. v. Hippel. Dielectrics and Waves. MIT-Press Cambridge (USA), 1954.
- [12] L. Hartshorn, J. A. Saxton. The dispersion and Absorption of Electromagnetic Waves, in Handbuch der Physik, Bd. XVI. Springer Berlin, 1958.
- [13] D. J. E. Ingram. Spectroscopy at Radio and Microwave Frequencies. Butterworth, London 1967
- [14] H. B. G. Casimir. On the Theory of Electromagnetic Waves in resonant Cavities. Philips Res. Rep. 6 (1951), p. 162...182.
- [15] E. Schanda. Die Bestimmung von Dielektrizitätskonstante und Verlustwinkel im E_{010} -Mikrowellenresonator. Arch. d. El. Übertr. 20 (1966), S. 501...505.
- [16] H. A. Atwater. Introduction to Microwave Theory. McGraw Hill, New York, 1962
- [17] H. G. Unger. Elektromagnetische Wellen. F. Vieweg, Braunschweig, 1967.

Statistik der Radio-, Telephonrundsprach- und Fernsehempfangskonzessionen Ende 1967

Statistique des concessions réceptrices de radio, télédiffusion et télévision à la fin de 1967

Telephonkreis Arrondissement des téléphones	Hörerkonzessionen – Concessions d'auditeur				Fernseh- konzessionen	Vermehrung – Augmentation 1967	
	Total	davon – dont				Hörer- konzessionen	Fernseh- konzessionen
		Radio- konzessionen Concessions radio	Telephon- rundsprach- konzessionen Concessions de télédiffusion	Rediffusion- Teilnehmer Abonnés de Rediffusion			
Basel.	147 114	99 915	40 125	7 074	82 090	3 721	8 595
Bellinzona	68 476	50 544	17 932	—	42 411	6 052	6 826
Bern	131 449	72 426	55 622	3 401	54 274	3 245	7 275
Biel	100 819	67 791	28 232	4 796	53 767	2 039	7 856
Chur	52 887	29 922	22 965	—	18 115	1 928	3 377
Fribourg	40 237	35 539	4 698	—	20 836	1 309	3 760
Genève	101 931	79 938	21 993	—	61 387	1 718	6 042
Lausanne	142 315	114 707	24 755	2 853	79 772	4 804	9 976
Luzern	109 724	73 588	36 136	—	47 899	2 795	7 148
Neuchâtel	57 892	45 950	11 942	—	30 535	1 564	5 231
Olten	99 722	83 925	15 797	—	45 611	2 489	6 971
Rapperswil	64 567	50 444	14 123	—	29 352	1 554	4 950
St. Gallen	131 775	110 026	18 435	3 314	63 472	2 590	8 359
davon Fürstentum Liechtenstein	4 519	3 923	596	—	2 491	170	379
Sion	41 458	28 668	12 790	—	17 675	1 187	4 143
Thun	49 822	31 449	18 373	—	16 237	1 257	2 847
Winterthur	81 740	70 184	11 556	—	40 978	1 740	5 083
Zürich	303 413	208 773	80 443	14 197	163 540	8 047	17 817
Total	1 725 341	1 253 789	435 917	35 635	867 951	48 039	116 256
Zu- oder Abnahme seit 1.1.1967 Augmentation ou dimi- nution depuis le 1.1.1967	+ 48 039	+ 40 335	+ 7 578	+ 126	+ 116 256	Zunahme – Augmentation	
						1966: 23 623	1966: 130 912
		1966: + 14 445	1966: + 9 345	1966: — 167		1965: 34 284	1965: 128 940