

**Zeitschrift:** Technische Mitteilungen / Schweizerische Post-, Telefon- und Telegrafienbetriebe = Bulletin technique / Entreprise des postes, téléphones et télégraphes suisses = Bollettino tecnico / Azienda delle poste, dei telefoni e dei telegrafi svizzeri

**Herausgeber:** Schweizerische Post-, Telefon- und Telegrafienbetriebe

**Band:** 46 (1968)

**Heft:** 5

**Artikel:** Die minimal streuende Antenne

**Autor:** Stock, Don J.R.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-875650>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 14.03.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Zusammenfassung. In letzter Zeit wurde der elektronischen Strahlsteuerung von Antennengruppen (antenna arrays) grosses Interesse entgegengebracht. Es wäre wünschenswert, für diese Arbeiten ein Ersatzschaltbild der Antenne zur Verfügung zu haben, das die Abstrahlungseigenschaften mit einbezieht. Zu diesem Zwecke befasst sich die vorliegende Arbeit mit den Eigenschaften minimal streuender Antennen. Es wird gezeigt, wie Systementkopplung sowie Strahlrichtungssteuerung durch Anwendung der Mikrowellen-Netzwerktheorie erhalten werden können.

## L'antenne à dispersion minimale

Résumé. Ces derniers temps, la commande électronique de la directivité de groupes d'antennes (antenna arrays) rencontre un intérêt grandissant. Il serait utile de disposer pour ces travaux d'un schéma équivalent de l'antenne comprenant aussi les caractéristiques de rayonnement. C'est pourquoi le présent article traite des caractéristiques des antennes à dispersion minimale. On montre comment on peut obtenir le découplage des éléments d'antenne et la commande de la directivité en appliquant la théorie des réseaux en micro-ondes.

## L'antenna con dispersione minima

Riassunto. Negli ultimi tempi si ha rivolto sempre maggior attenzione alla guida elettronica dei fasci di gruppi d'antenna (antenna arrays). Sarebbe auspicabile poter disporre per questi lavori d'uno schema equivalente dell'antenna, che includa le proprietà d'irradiazione. A questo scopo il presente lavoro s'occupa delle caratteristiche d'antenna con dispersione minima. Vieni dimostrato come dall'applicazione della teoria sulla struttura delle microonde si possa ottenere disaccoppiamento di sistema e guida direzionale di fasci.

## 1. Einführung

Gewöhnlich werden Antennen aus dem Gesichtswinkel der Feldtheorie betrachtet, wobei die zumeist komplizierten Feldgleichungen aufgelöst werden müssen, um die Strahlungscharakteristiken zu erhalten. Interessieren hingegen vor allem die Beziehungen zu Schaltkreisen, so werden Antennen auch als blosse konzentrierte Impedanzen betrachtet. Nun haben es aber die Arbeiten auf dem Gebiet der elektronischen Strahlrichtungssteuerung als wünschenswert erscheinen lassen, die feldtheoretische Betrachtungsweise mit den Methoden der Netzwerktheorie zu vereinen. Zum Beispiel wird beim Entwurf von Butler-Strahlern die individuelle Antenne als eine Lastimpedanz betrachtet, die durch eine Welle bestimmter Amplitude und Phasenlage gespeist werden muss. Die einzelne Abstrahlung wird als unabhängig von den Nachbar-elementen angenommen.

Die Anfänge der vorliegenden Arbeit wurzeln in einem Versuch, eine theoretische Basis für den Entwurf steuerbarer Richtstrahler zu finden, im besonderen auch für den Butler-Strahler. Mit fortschreitender Arbeit wurde es dann klar, dass ein Konzept benötigt wird, das die Feld- und Netzwerkgesichtspunkte vereinigt, so dass die einfachen, aber leistungsfähigen Methoden, die in der N-Tor-Theorie entwickelt worden sind, verwendet werden können. Dabei ist der Leitgedanke jener der *minimal streuenden Antenne*, wie nachfolgend erläutert wird. Es wird diskutiert, welche Methoden der Strahlsteuerung auf dieser Basis möglich sind, und es wird auch gezeigt, wie die Mikrowellen-Netzwerktheorie verwendet werden kann.

<sup>1</sup> Nach einem (in englischer Sprache gehaltenen) Vortrag des Kolloquiums über die Theorie der elektromagnetischen Wellen, veranstaltet 1966/67 von den Instituten für angewandte Physik und Mathematik der Universität Bern. Bearbeitung und Übersetzung: dipl. Ing. A. Kündig, Bern.

## 2. Die Streumatrix der Antenne

### 2.1 Beschreibung der betrachteten Anordnung

Die betrachtete Anordnung sei von einer Kugel umschlossen, deren Zentrum sich im Koordinatenursprung befinde. Da eine Beschreibung mit Hilfe der Streuung gewählt wird, also einfallende und reflektierte Wellen zueinander in Beziehung gebracht werden, wählt man zweckmässigerweise als Lösungen der sphärischen Wellengleichung solche aus dem Satz der sphärischen *Hankel-Funktionen*.

Die sphärischen Hankel-Funktionen zweiter Art  $Me_{mn}^{(4)}$  und  $Ne_{mn}^{(4)}$  stellen vom Zentrum aus abwandernde Wellen dar, während die sich einwärts bewegenden Modi durch  $Me_{mn}^{(3)}$  und  $Ne_{mn}^{(3)}$  ausgedrückt werden. Damit können die Felder auf der Bezugskugel angeschrieben werden:

$$E = \sum_{n,m} \left( \hat{a}_{mn}^{(3)} Me_{mn}^{(3)} + \hat{b}_{mn}^{(4)} Me_{mn}^{(4)} \right) + \sum_{n,m} \left( \hat{a}_{mn}^{(4)} Ne_{mn}^{(4)} + \hat{b}_{mn}^{(3)} Ne_{mn}^{(3)} \right)$$

$$H = j \zeta_0 E$$

Diese Reihenentwicklung für das Feld auf der Bezugsfläche ist ähnlich der Beschreibung von Feldern in Wellenleiterverbindungen mit mehreren Modi. Bewusst wurden daher die Ausdrücke  $\hat{a}_n$  und  $\hat{b}_n$  zur Bezeichnung der Amplituden verwendet, können diese Koeffizienten doch mit der

<sup>2</sup> Es wird die Schreibweise von Stratton [1] benutzt.

Quadratwurzel der einfallenden beziehungsweise reflektierten Leistung in Beziehung gebracht werden, wie dies auch in der Mikrowellen-Netzwerktheorie der Fall ist.

Die Zahl der Indizes wird bequemerweise auf einen je Modus beschränkt. Als Vorschlag diene die folgende Zuordnung:

Index	Modus	Art des Modus
1	$N_{e_{01}}$	elektrischer Dipol
2	$N_{e_{11}}$	elektrischer Dipol
3	$N_{o_{11}}$	elektrischer Dipol
4	$M_{e_{01}}$	magnetischer Dipol

Die Amplitude des n. einfallenden Modus werde mit  $\hat{a}_{\beta n}$  bezeichnet, jene des n. reflektierten Modus mit  $\hat{b}_{\beta n}$ . Man kann zeigen, dass sich die Quadratwurzel aus der Leistung für einfallende und reflektierte Modi wie folgt ausdrücken lässt:

$$|a_{\beta n}| = \zeta_0^{1/2} |\hat{a}_{\beta n}| \quad |b_{\beta n}| = \zeta_0^{1/2} |\hat{b}_{\beta n}|$$

Nun werde die einfallende und reflektierte Strahlung auf der Bezugsfläche durch die Spaltenvektoren  $\mathbf{a}_\beta$  und  $\mathbf{b}_\beta$  dargestellt, wobei <sup>3</sup>

$$\mathbf{a}_\beta = \begin{bmatrix} a_{\beta 1} \\ a_{\beta 2} \\ \vdots \\ \infty \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}_\beta = \begin{bmatrix} b_{\beta 1} \\ b_{\beta 2} \\ \vdots \\ \infty \end{bmatrix}$$

Wird die Antenne über eine Leitung mit der charakteristischen Impedanz  $Z_0$  gespeist, so lassen sich die Amplituden der auf der Leitung hin- und zurücklaufenden Wellen in einer geeigneten Bezugsebene mit  $a_\alpha$  und  $b_\alpha$  bezeichnen. Damit kann man ein neues Paar von Spaltenvektoren definieren:

<sup>3</sup> Allgemein bedeuten alle nachstehend verwendeten Buchstabensymbole entweder Vektoren in einem n- oder unendlich dimensionalen Raum oder Matrizen von n oder  $\infty$  Dimensionen. Wo es nötig ist, bezeichnen kleine Indexzahlen die Dimensionalität. Mit

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ n \end{bmatrix}$$

wird also ein Spaltenvektor von n Dimensionen beschrieben. Ist  $\mathbf{S}$  irgendeine Matrix, dann sind  $\mathbf{S}'$  die transponierte,  $\mathbf{S}$  die konjugiert komplexe,  $\mathbf{S}^*$  die konjugiert komplexe transponierte und schliesslich  $\mathbf{S}^{-1}$  die zu  $\mathbf{S}$  inverse Matrix.  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  usw. bezeichnen Spaltenvektoren, während  $\mathbf{a}'$ ,  $\mathbf{b}'$  usw. Reihenvektoren sind. Die Matrizen  $\mathbf{1}_n$  und  $\mathbf{0}_n$  sind die n · n-Einheits- beziehungsweise Null-Matrizen.

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_\alpha \\ \vdots \\ a_{\beta 1} \\ a_{\beta 2} \\ \vdots \\ \infty \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_\alpha \\ \vdots \\ b_{\beta 1} \\ b_{\beta 2} \\ \vdots \\ \infty \end{bmatrix}$$

## 2.2 Die Streumatrix<sup>4</sup>

Die Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  sind über eine Streumatrix miteinander verknüpft. Die Streumatrix  $\mathbf{S}$  der Antenne wird durch die Beziehung

$$\mathbf{b} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{a}$$

gegeben, wobei

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & \infty \\ \mathbf{S}_{\alpha\alpha} & \mathbf{S}_{\alpha\beta} \\ \mathbf{S}_{\beta\alpha} & \mathbf{S}_{\beta\beta} \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ \infty \end{matrix}$$

Die Beziehung  $\mathbf{b} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{a}$  enthält eine skalare sowie eine vektorielle Gleichung:

$$b_\alpha = S_{\alpha\alpha} a_\alpha + S_{\alpha\beta} a_\beta \\ \mathbf{b}_\beta = \mathbf{S}_{\beta\alpha} a_\alpha + \mathbf{S}_{\beta\beta} a_\beta$$

Derart ausgeschrieben lässt sie die folgende interessante Interpretation zu:

- Die erste (skalare) Gleichung sagt aus, dass die reflektierte Welle auf der Leitung aus zwei Quellen stammt:
  1. Der  $S_{\alpha\alpha} a_\alpha$  - Term stellt jenen Teil dar, der von der Fehlanpassung der Leitung an die Antenne herrührt.
  2. Der  $S_{\alpha\beta} a_\beta$  - Term steht für jene Welle, die aus der von der Antenne absorbierten, von aussen kommenden Strahlung stammt.  $S_{\alpha\beta}$  stellt also die Strahlungscharakteristik der Anordnung als Empfangsantenne dar.
- Die zweite (vektorielle) Gleichung besagt über die Herkunft der in den Raum abgestrahlten Welle folgendes:
  1. Der  $\mathbf{S}_{\beta\alpha} a_\alpha$  - Term stellt die vom Generator zur Bezugsfläche übertragene Welle dar.
  2. Der  $\mathbf{S}_{\beta\beta} a_\beta$  - Term entspricht dem Teil einer auf die Antenne einfallenden Welle, der zurückgeworfen wird.

Es lässt sich zeigen [2], dass die Bedingung für Passivität, Verlustlosigkeit oder Aktivität der Antenne gegeben wird durch

$$\frac{1}{2} (\mathbf{a}^* \mathbf{a} - \mathbf{b}^* \mathbf{b}) \geq 0$$

oder

$$\mathbf{a}^* (\mathbf{1} - \mathbf{S}^* \mathbf{S}) \mathbf{a} \geq 0$$

<sup>4</sup> Erläuterungen dazu finden sich im Anhang.

Für irgendein beliebiges  $a$  ist die Bedingung für Verlustlosigkeit:

$$\mathbf{S}^* \mathbf{S} = \mathbf{1}$$

In ähnlicher Art ergibt die Reziprozitätsbedingung von Lorentz, auf die Antenne angewendet:

$$\mathbf{S}' = \mathbf{S}$$

Diese Bedingungen sind mit jenen der herkömmlichen Netzwerktheorie identisch. Dabei wird die Antenne hier als Schaltung betrachtet, die in der Kugel  $S$  der *Figur 1* eingeschlossen ist und in *Figur 2* als Mehrtor erscheint.

### 2.3 Die Streumatrix des freien Raumes

Es ist interessant, die Streumatrix des freien Raumes in diesem Formalismus aufzustellen. Dazu muss die Antenne aus der Kugel der *Figur 1* entfernt werden. Dies wird durch ein Öffnen der Speiseleitung erreicht, so dass nun  $S_{\alpha\alpha} = 1$  und  $S_{\alpha\beta} = S_{\beta\alpha} = 0$ , womit

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_{\beta\beta} \end{bmatrix}$$

Es kann gezeigt werden [2], dass die Matrix  $\mathbf{S}_{\beta\beta} = \mathbf{1}_\infty$  ist, wobei  $\mathbf{1}$  die Einheits-Diagonalmatrix darstellt. Diese Tatsache erkennt man auch intuitiv, wenn man bedenkt, dass an jedem Punkt des freien Raumes eine einfallende und eine reflektierte Welle gleicher Amplitude existiert. Damit ist die Streumatrix des freien Raumes:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

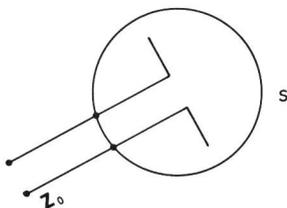


Fig. 1

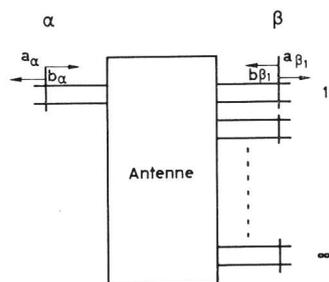


Fig. 2

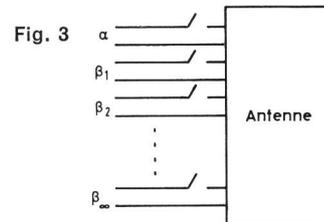


Fig. 3

### 2.4 Minimal streuende Antennen

Eine Antenne kann in den freien Raum «eingebettet» werden, indem man alle Schalter in *Figur 3* schliesst. Das Schliessen des ersten Schalters bedeutet die Verbindung einer Leitung und einer Last (oder eines Generators) mit der Antenne. Schliessen der restlichen Schalter entspricht den Raum-Modi. Unter Benutzung eines Schalter-Schliess-Theorems [3] und des Wellenquellentheorems von Butterweck [4] lässt sich zeigen, dass eine Welle  $f$  durch die Streuung einer einfallenden Welle  $a$  an der Antenne entsteht:

$$f = (\mathbf{S} - \mathbf{1}) a$$

Eine wichtige Feststellung über Antennen kann nun gemacht werden:

- Für eine reziproke Antenne folgt aus  $\mathbf{S}' = \mathbf{S}$  die Beziehung  $S_{\alpha\beta} = S_{\beta\alpha}$ , das heisst, die Sende- und Empfangs-Strahlungscharakteristiken sind identisch.
- Für eine verlustlose reziproke Antenne gilt  $\mathbf{S}^* \mathbf{S} = \mathbf{S} \mathbf{S}^* = \mathbf{1}$ , oder

$$\begin{aligned} |S_{\alpha\alpha}|^2 + |S_{\alpha\beta}|^2 &= 1, \\ |S_{\alpha\beta}|^2 + |S_{\beta\beta}|^2 &= 1 \end{aligned}$$

Diese Gleichungen zeigen, dass sich  $\mathbf{S}_{\beta\beta}$  nicht eindeutig aus  $S_{\alpha\alpha}$  und  $S_{\alpha\beta}$  bestimmen lässt, und dies sogar für eine verlustlose Antenne. Es bedeutet also, dass Antennen mit übereinstimmenden Strahlungscharakteristiken sich in der Art der Streuung einer einfallenden elektromagnetischen Welle unterscheiden können.

Durch Dicke [5], sowie Kahn und Kurss [6] wurden *minimal streuende Antennen* so definiert, dass die Streuung ein Qualitätsmerkmal der Antenne bildet. Mit Kahn und Kurss sei eine kanonische minimal streuende Antenne als eine solche definiert, die an ihre Speiseleitung angepasst ist ( $S_{\alpha\alpha} = 0$ ) und für elektromagnetische Strahlung undurchsichtig wird, wenn ihre Eingangsklemmen offen bleiben. Das bedeutet, dass eine Last mit  $\Gamma = +1$  an die Speiseleitung angeschlossen wird, mit  $\Gamma$  als Reflexionsfaktor der Last. Da

$$f = (\mathbf{S} - \mathbf{1}) a$$

ist, erhält man für die Bedingung  $f_\beta = 0$ , das heisst minimal gestreute Energie, den Ausdruck

$$\mathbf{f}_\beta = [\mathbf{S}_{\beta\alpha} \Gamma (1 - \mathbf{S}_{\alpha\alpha} \Gamma)^{-1} \mathbf{S}_{\alpha\beta} + (\mathbf{S}_{\beta\beta} - 1)] \mathbf{a}_\beta = 0$$

Durch Einsetzen von

$$\Gamma = +1, \mathbf{S}_{\alpha\alpha} = 0, \mathbf{f}_\beta = 0$$

erhält man

$$\mathbf{S}_{\beta\beta} = 1 - \mathbf{S}_{\beta\alpha} \mathbf{S}_{\alpha\beta}$$

Damit ist die Streumatrix einer minimal streuenden Antenne:

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \infty \\ 0 & & \mathbf{S}_{\beta\alpha}^* & \\ \mathbf{S}_{\beta\alpha} & & 1 - \mathbf{S}_{\beta\alpha} \mathbf{S}_{\beta\alpha}^* & \\ & & & \infty \end{bmatrix}$$

Man erkennt, dass das Bild des gestreuten Feldes bei dieser Antenne unabhängig von der eingestrahlten Welle und proportional zu ihrem Abstrahlungsbild ist. Bei einer minimal streuenden Antenne sind also die Strahlungseigenschaften eindeutig durch die Abstrahlungscharakteristik bestimmt, denn Streuungs- und Abstrahlungscharakteristiken sind identisch.

### 2.5 Ein Beispiel

Es werde eine kleine Dipolantenne im Koordinatensprung betrachtet, die in Richtung der z-Achse weist. Das Abstrahlungsbild eines derartigen Elementes wird durch den sphärischen Wellenmodus  $N_{e,01}$  sehr gut angenähert. Damit gilt

$$\mathbf{S}_{\beta\alpha} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{\beta 1\alpha} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Die Bedingungen der Reziprozität und Verlustlosigkeit erfordern

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{S}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \hat{\mathbf{S}}_{\beta\beta} \end{bmatrix}$$

wobei

$$\hat{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} \sqrt{1 - |\mathbf{S}_{\beta 1\alpha}|^2} e^{j\varphi_{\alpha\alpha}} & \mathbf{S}_{\beta 1\alpha} \\ \mathbf{S}_{\beta 1\alpha} & \sqrt{1 - |\mathbf{S}_{\beta 1\alpha}|^2} e^{j\varphi_{\beta\beta}} \end{bmatrix}$$

$$\varphi_{\beta\beta} = 2\varphi_{\beta 1\alpha} - \varphi_{\alpha\alpha} + (2n + 1)\pi$$

Nimmt man an, dass der Dipol für andere Modi unsichtbar ist, so gilt

$$\hat{\mathbf{S}}_{\beta\beta} = \mathbf{1}_\infty$$

Wenn der Dipol an die Speiseleitung angepasst wird, ergibt sich

$$\hat{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} 0 & e^{j\varphi_{\beta 2\alpha}} \\ e^{j\varphi_{\beta 1\alpha}} & 0 \end{bmatrix}$$

Da die Bezugsebene der Speiseleitung frei gewählt werden kann, darf man  $\varphi_{\beta 1\alpha}$  immer als ein ganzzahliges Vielfaches von  $\pi$  annehmen. Die resultierende S-Matrix hat nun die Form

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

Man beachte, dass  $\mathbf{S}_{\alpha\alpha} = 1 - \mathbf{S}_{\beta\alpha} \mathbf{S}_{\beta\alpha}^*$  ist, was bedeutet, dass S einer minimal streuenden Antenne entspricht.

Die vorstehenden Überlegungen können für den Fall von n Antennen verallgemeinert werden. Die resultierende Streumatrix ist dann:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S}_{\alpha\alpha} & \mathbf{S}_{\alpha\beta} \\ \mathbf{S}_{\beta\alpha} & \mathbf{S}_{\beta\beta} \end{bmatrix}$$

Hier ist  $\mathbf{S}_{\alpha\alpha}$  die n · n-Streumatrix der Antenneneingangskreise, und die n Reihenvektoren  $\mathbf{S}_{\alpha\beta}$  entsprechen den n Strahlungscharakteristiken der n Antennen. Durch Chen [7] und Hu [8] wurde gezeigt, dass die Rückstrahlung kurzer dünner Zylinder sehr klein gemacht werden kann, wenn in den Mitten grosse Reaktanzen als Lasten angebracht werden. Dies bedeutet, dass sie «unsichtbar» gemacht werden können, indem man sie in der Mitte leer laufen lässt ( $\Gamma = +1$ ). Ein solches Element nähert also eine minimal streuende Antenne an, sofern es an die Speiseleitung angepasst wird. Wie man in Figur 4 erkennt, kann der Dipol durch eine minimal streuende Antenne in Serie mit der Dipol-Eingangsreaktanz dargestellt werden. Einem Dipol als parasitärem Element entspricht eine kanonische minimal streuende Antenne mit Seriereaktanz, die aber durch einen Kurzschluss belastet wird. In gleicher Weise kann bei einer

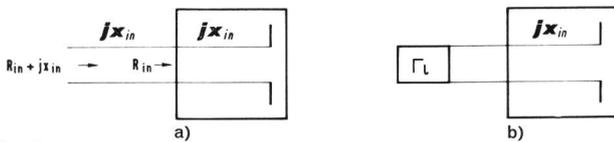


Fig. 4  
Kanonische minimal streuende Antenne

aktiven Antenne die Last durch einen negativen Widerstand dargestellt werden. Diese Überlegungen wurden auf einen Yagi – Uda-Strahler mit 20 Elementen angewendet (Figur 5) sowie auf denselben Strahler bei einer Belastung der parasitären Elemente mit negativen Widerständen (Figur 6). Zum Vergleich werden in Figur 5 auch die durch Mailloux [9] gemessenen Richtdiagramme sowie die Resultate von King und Sandler [9] gezeigt.

### 3. Die Strahlsteuerung

Nun muss ein  $n + m$ -Tor-Netzwerk  $S_f$  konstruiert werden, das die  $m$  angestrebten Richtcharakteristiken erzeugt. Falls diese Charakteristiken zueinander orthogonal sind, das heisst wenn

$$\mathbf{a}_\alpha^{i*} \mathbf{S}_{\beta\alpha}^* \mathbf{S}_{\beta\alpha} \mathbf{a}_\alpha^i = 0 \quad i \neq j$$

für alle  $i$  und  $j$  gilt, so kann  $S_f$  derart konstruiert werden, dass alle  $m$  Eingangstore entkoppelt und angepasst sind.

#### 3.1 Das Entkopplungsnetzwerk

In einem ersten Schritt sollen die Elemente der Strahlergruppe voneinander entkoppelt werden. Die Gruppe wird also in ein  $2n$ -Tor-Netzwerk so eingebettet, dass die Eingangs-Streumatrix verschwindet. Man beachte, dass diese Matrix symmetrisch ist, da die Strahlergruppe aus reziproken Elementen aufgebaut wurde.

Nun hat Siegel [10] gezeigt, dass jede beliebige symmetrische Matrix  $\mathbf{A}$  als Produkt dreier Matrizen geschrieben werden kann:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}' \mathbf{\Lambda} \mathbf{U}$$

wobei  $\mathbf{U}$  eine unitäre und  $\mathbf{\Lambda}$  eine reelle diagonale Matrix ist, deren Elemente  $\lambda_i$  gleich den positiven Quadratwurzeln aus den Eigenwerten von  $\mathbf{A}^* \mathbf{A}$  sind. In [11] wird hergeleitet, wie sich  $\mathbf{U}$  aus  $\mathbf{A}$  bestimmen lässt. Damit lässt sich die symmetrische Matrix  $\mathbf{S}_{\alpha\alpha}$  wie folgt schreiben:

$$\mathbf{S}_{\alpha\alpha} = \mathbf{W}' \mathbf{D} \mathbf{W}$$

$\mathbf{W}$  ist eine unitäre Matrix,  $\mathbf{D}$  eine reelle Diagonalmatrix.

Wird nun die Strahlergruppe in ein  $2n$ -Tor-Netzwerk mit der Streumatrix

— Netzwerktheorie  
 ○ Experiment  
 - - - Fernfeldtheorie von King-Sandler

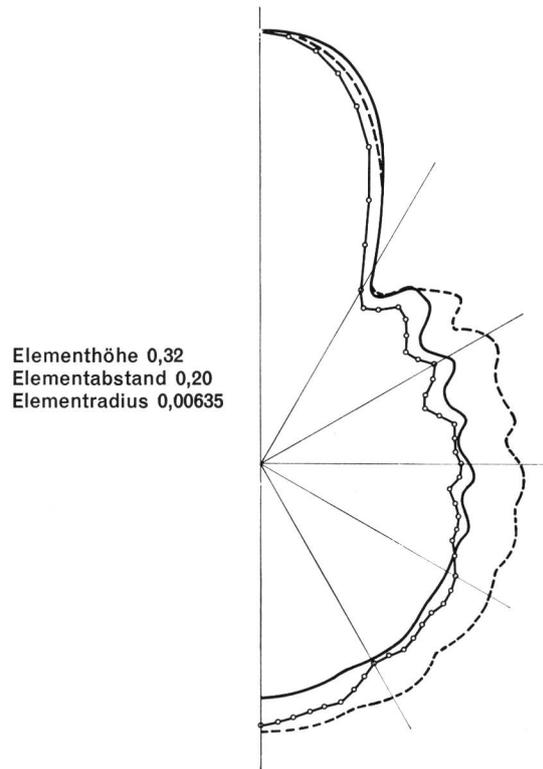


Fig. 5  
Richtdiagramme für einen Yagi-Uda-Strahler mit 20 Elementen. Vergleich von theoretischen und experimentellen Resultaten

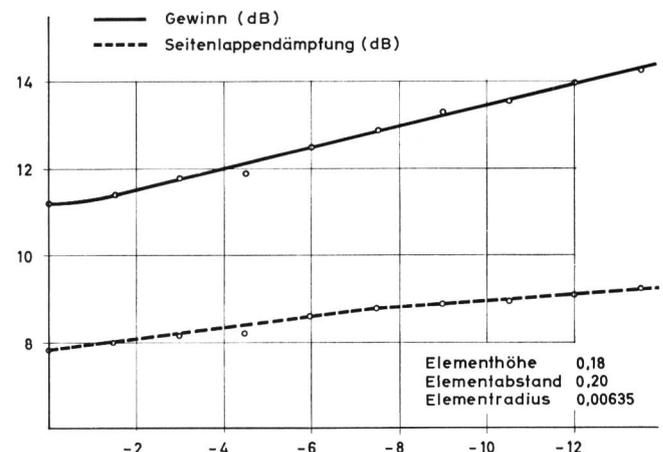


Fig. 6  
Gewinn (dB) und Seitenlappendämpfung (dB) für einen belasteten Yagi-Uda-Strahler als Funktion des Lastwiderstandes

$$P_1 = \begin{bmatrix} n & n \\ 0 & \bar{W} \\ \hline W^* & 0 \end{bmatrix} n$$

eingebettet, so verschwinden die nichtdiagonalen Elemente von  $S_{\alpha\alpha}$  (ein Netzwerk mit einer derartigen Streumatrix wird als verlustloser reziproker Allpass bezeichnet [12]).

Die für das eingebettete Netzwerk resultierende Streumatrix ist damit

$$S(P_1) = \begin{bmatrix} D & \bar{W}S_{\alpha\beta} \\ \hline S_{\beta\alpha}W^* & S_{\beta\beta} \end{bmatrix}$$

Da  $S_{\alpha\alpha}$  zu einer Diagonalmatrix  $D$  geworden ist, sieht man, dass die Eingangstore der Strahlergruppe entkoppelt sind. Es verbleibt noch, sie auch anzupassen. Da die Eingangsstreumatrix positiv reell und diagonal ist, kann dies mit einer Gruppe voneinander entkoppelter idealer Transformatoren geschehen. Die Streumatrix eines derartigen Transformatornetzwerks ist

$$L_1 = \begin{bmatrix} n & n \\ R & L \\ \hline L & -R \end{bmatrix} n$$

wobei  $R$  und  $L$  Diagonalmatrizen sind, die der Bedingung

$$R^2 + L^2 = 1$$

gehörchen. Die Elemente von  $R$  und  $L$  sind

$$R_{ii} = (n_i^2 - 1) (n_i^2 + 1)^{-1}$$

$$L_{ii} = (-2n_i) (n_i^2 + 1)^{-1}$$

mit  $n_i$  gleich dem Übersetzungsverhältnis des  $i$ . idealen Transformators. Man erhält nun für die Streumatrix der Strahlergruppe

$$\begin{bmatrix} R + LD (1 + RD)^{-1} L & L (1 + RD)^{-1} \bar{W}S_{\alpha\beta} \\ \hline S_{\beta\alpha}W^* (1 + RD)^{-1} L & S_{\beta\beta} - S_{\alpha\beta}W^* (1 + RD)^{-1} R \bar{W}S_{\alpha\beta} \end{bmatrix}$$

Die Eingangsstreumatrix verschwindet für  $R = -D$ , was der Fall ist bei

$$n_i = \sqrt{\frac{1 - \lambda_i}{1 + \lambda_i}}$$

Damit ergibt sich für die S-Matrix der Gruppe:

$$\begin{bmatrix} 0 & (1 - D^2)^{-1/2} \bar{W}S_{\alpha\beta} \\ \hline S_{\beta\alpha}W^* (1 - D^2)^{-1/2} & S_{\beta\beta} + S_{\beta\alpha}W^* (1 - D^2)^{-1} D \bar{W}S_{\alpha\beta} \end{bmatrix}$$

Man kann zeigen, dass die neuen elementweisen Richtcharakteristiken der Strahlergruppe, das heisst die Kolonnen von  $S_{\beta\alpha}W^* (1 - D^2)^{-1/2}$ , paarweise orthogonal sind. Ebenso stellt man fest, dass die Transformatorübersetzungsverhältnisse positiv reell sind, da die Eigenwerte von  $S_{\alpha\alpha}^* S_{\alpha\alpha}$  reell sind und zwischen 0 und 1 liegen.

### 3.2 Das Strahlsteuerungsnetzwerk

Die Beziehung zwischen einer Anregung am Eingang und den Strahlererregungen ist gegeben durch

$$\hat{a}_a^i = (1 - D^2)^{-1/2} W a_a^i$$

Normiert man die Kolonnenvektoren  $\hat{a}_\alpha^i$  auf 1 und ordnet sie in einer  $n \cdot m$ -Matrix  $P$ , so kann man zeigen [2], dass zu  $P$  zusätzliche Zeilen und Kolonnen hinzugefügt werden können, um eine quadratische Matrix zu bilden.

Das Netzwerk  $S(P, L)$  wird nun in ein  $2n$ -Tor  $\hat{S}$  eingefügt, wobei

$$\begin{bmatrix} \hat{S}_{11} & \hat{S}_{12} (1 - D^2)^{-1/2} \bar{W}S_{\alpha\beta} \\ \hline S_{\beta\alpha}W^* (1 - D^2)^{-1/2} \hat{S}_{21} & \hat{S}_{\beta\beta} \end{bmatrix} = \hat{S}$$

$$\hat{S}_{\beta\beta} = S_{\beta\beta} + S_{\beta\alpha}W^* (1 - D^2)^{-1/2} (D + \hat{S}_{22}) (1 - D^2)^{-1/2} \bar{W}S_{\alpha\beta}$$

Die Transferstreumatrix  $T$  wird wie folgt definiert:

$$\begin{bmatrix} \hat{b} \\ \hat{a} \end{bmatrix} = \hat{T} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$\hat{a}$ ,  $\hat{b}$ ,  $a$  und  $b$  sind die Eingangs- beziehungsweise Ausgangserregungen, wie in Figur 7 dargestellt. Dabei benützt

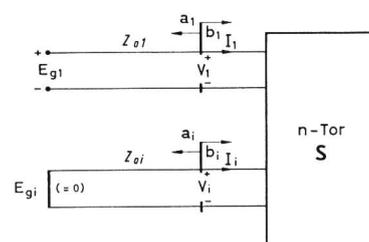


Fig. 7

man das Ergebnis von Youla [13], wonach ein beliebiges verlustloses reziprokes 2n-Tor als Kaskade von drei 2n-Toren dargestellt werden kann. Zwei davon sind 2n-Tor-Allpässe, das andere ist eine Gruppe von n entkoppelten idealen Transformatoren. Für die Allpässe gilt:

$$T_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{U}' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{U}^* \end{bmatrix} \quad T_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{V}' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{V}^* \end{bmatrix}$$

wobei  $\mathbf{U}$  und  $\mathbf{V}$  unitäre Matrizen sind. Der Ansatz für das Transformatornetzwerk lautet

$$T_2 = \begin{bmatrix} \cosh \lambda & \sinh \lambda \\ \sinh \lambda & \cosh \lambda \end{bmatrix}$$

mit  $\lambda$  als Diagonalmatrix.  $\lambda_i$  ist der natürliche Logarithmus des i. Transformatorübersetzungsverhältnisses, das heisst

$$n_i = e^{\lambda_i}$$

Wählt man nun [2]  $\hat{\mathbf{S}}_{21}$  als

$$\hat{\mathbf{S}}_{21} = \mathbf{V} \cdot \cosh \lambda \mathbf{U}$$

so erhält man das gewünschte Speisernetzwerk.

#### Verdankung

Die vorstehende Arbeit wurde der Dissertation von Herrn A. C. Gately (New York University) entnommen. Ferner sei die Diskussion mit Herrn Prof. G. Epprecht von der ETH bestens verdankt.

#### Anhang

Bei einem n-Tor-Netzwerk (Figur 8) besteht die folgende Beziehung zwischen den Wellenamplituden  $a_i$ ,  $b_i$  und Strom sowie Spannung:

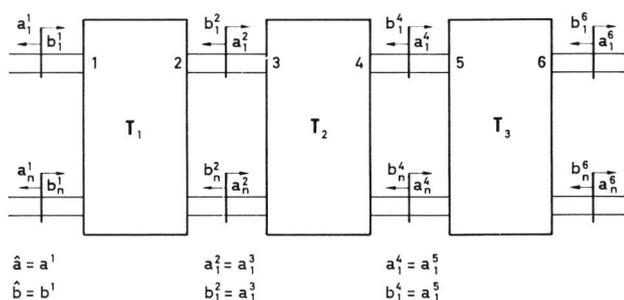


Fig. 8

$$V_i = \sqrt{Z_{oi}} (a_i + b_i)$$

$$I_i = \sqrt{Z_{oi}^{-1}} (a_i - b_i)$$

Die Vektoren  $\mathbf{b}$  und  $\mathbf{a}$  sind über die Streumatrix miteinander verknüpft:

$$\mathbf{b} = \mathbf{S} \mathbf{a}$$

Daher erhält man

$$\mathbf{S} = \mathbf{Z}_o^{-1/2} (\mathbf{Z} - \mathbf{Z}_o) (\mathbf{Z} + \mathbf{Z}_o)^{-1} \mathbf{Z}_o^{1/2}$$

wobei  $\mathbf{Z}$  die Impedanzmatrix des n-Tores ist. Man erkennt, dass dies bei einem 1-Tor gerade der Ausdruck für den Eingangs-Reflexionsfaktor ist. Aus diesem Grunde lässt sich der  $S_{ii}$ -Term der Streumatrix als Reflexionsfaktor des i. Tores deuten, bei Anpassung aller andern Tore. In gleicher Weise kann  $S_{ij}$  als Transmissionskoeffizient zwischen den angepassten Toren i und j betrachtet werden.

Die bekannte Kettenmatrix («ABCD») für ein 2n-Tor ist

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{I}_1 \end{bmatrix}_{2n} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}_{2n} \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}$$

Die n Spannungen  $\mathbf{V}_1$  und n Ströme  $\mathbf{I}_1$  werden auf der Eingangsseite gemessen, während  $\mathbf{V}_2$  und  $\mathbf{I}_2$  die Ausgangsgrößen sind.

Dieser Kettenmatrix kann eine entsprechende Form der Streumatrix gegenübergestellt werden:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{a}_1 \end{bmatrix}_{2n} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{b}_2 \end{bmatrix}_{2n}$$

Die Transferstreumatrix  $\mathbf{T}$  wird geschrieben als

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}$$

Diese Form erlaubt es, die für eine Kette von 2n-Toren resultierende Matrix als Produkt der individuellen Matrizen zu erhalten (Figur 8):

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_1 \mathbf{T}_2 \mathbf{T}_3 \dots \mathbf{T}_n$$

Besitzt ein 2n-Tor mit der Transferstrommatrix  $\mathbf{T}$  ein n-Tor mit der Streumatrix  $\mathbf{S}$  als Last, so besitzt das auf diese Weise gebildete n-Tor eine Streumatrix (Figur 9)

$$\mathbf{W} = (\mathbf{AS} + \mathbf{B})(\mathbf{CS} + \mathbf{D})^{-1}$$

$\mathbf{W}$  wird also durch eine bilineare Matrixtransformation erhalten. Dieser Vorgang wird mit «Einbetten» bezeichnet; er ist das 2n-Tor-Äquivalent für den Abschluss eines Vierpols durch eine Last mit der Reflexion  $\Gamma$  [12].

Von besonderem Interesse unter den 2n-Toren sind die Allpässe (oder 2n-Tor-Richtkoppler) mit

$$\mathbf{T}_{1,3} = \begin{bmatrix} \overset{n}{\mathbf{U}'} & \overset{n}{\mathbf{0}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{U}^* \end{bmatrix} \begin{matrix} n \\ n \end{matrix}$$

sowie die 2n-Tor-Netzwerke aus n entkoppelten idealen Transformatoren mit

$$\mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} \cosh \lambda & \sinh \lambda \\ \sinh \lambda & \cosh \lambda \end{bmatrix}$$

Schliesst man einen 2n-Tor-Allpass durch eine Last mit der Streumatrix  $\mathbf{S}$  ab, so ist die resultierende Streumatrix

$$\mathbf{W} = \mathbf{U}'\mathbf{S}\mathbf{U}^{*-1}$$

Dies bedeutet, dass die Vorschaltung eines Allpasses das elektrische Äquivalent einer Ähnlichkeitstransformation mit  $\mathbf{S}$  ist.

Bei Ausschreiben der Gleichung

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \dots \\ \mathbf{a}_1 \end{bmatrix} = \mathbf{T} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{a}_2 \\ \dots \\ \mathbf{b}_2 \end{bmatrix}$$

erkennt man, dass  $\mathbf{T}_2$  tatsächlich für ein Netzwerk aus n entkoppelten Transformatoren steht:

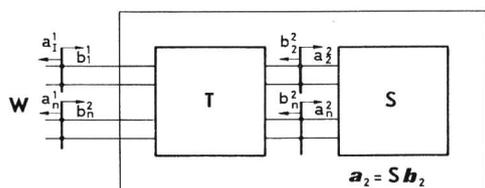


Fig. 9

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_1 &= \cosh \lambda \mathbf{a}_2 + \sinh \lambda \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{a}_1 &= \sinh \lambda \mathbf{a}_2 + \cosh \lambda \mathbf{b}_2 \end{aligned}$$

Beachtet man, dass für  $\mathbf{Z}_o = 1$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_1 &= \mathbf{V}_1 & \mathbf{a}_2 + \mathbf{b}_2 &= \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{a}_1 - \mathbf{b}_1 &= \mathbf{I}_2 & \mathbf{a}_2 - \mathbf{b}_2 &= \mathbf{I}_2 \end{aligned}$$

gilt, so erhält man für n entkoppelte ideale Transformatoren die Spannungs- und Stromgleichungen

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_1 &= e^\lambda \mathbf{V}_2 \\ \mathbf{I}_1 &= -e^{-\lambda} \mathbf{I}_2 \end{aligned}$$

Adresse des Autors: Prof. Dr. Don J. R. Stock, c/o E. E. Dept. New York University, University Heights, Bronx, New York 10453

#### Literaturhinweise

- [1] *Stratton J. R.* Electromagnetic Theory. Mc Graw-Hill, New York, 1941.
- [2] *Gately A. C.* A Network Theory for Antenna Arrays. Ph. D. Thesis, Electrical Engineering Dept. New York University, Bronx, New York, Sept. 1966  
ebenso: *Gately A. C., Stock D. J. R., Cheo B. R.* Analysis of Antenna Arrays via Network Theory. Paper 4, comm. 6, URSI-IEEE meeting, Palo Alto, Cal. Dec. 8, 1966.
- [3] *Ley B. J., Lutz S. G., Rehberg C. F.* Linear Circuit Analysis. Mc Graw-Hill, New York, 1959.
- [4] *Butterweck.* Die Ersatzwellenquelle. A. E. Ü. **14** (1960), p. 367...372.  
*Brand.* Wellengrößen und Wellenmatrizen für Mikrowellen-netzwerke mit Vieltyp-Wellenleitern. A. E. Ü. **15** (1961), p. 48...60.
- [5] *Montgomery C. G., Dicke R. H., Purcell E. M.* Principles of Microwave Circuits. MIT Rad. Lab. Series, vol. 8. Mc Graw-Hill, New York, 1948.
- [6] *Kahn W. K., Kurss H.* Minimum Scattering Antennas. IEEE Trans. AP-13, No. 5, Sept. 1965, p. 671...675.
- [7] *Chen K. M., Liepa V.* The Minimization of the Back Scattering of a Cylinder by Central Loading. IEEE Trans. AP-12, No. 5, Sept. 1964, p. 576...582.
- [8] *Hu Y. Y.* Back-Scattering Cross-Section of a Center-Loaded Cylindrical Antenna. IRE Trans. AP-6, No. 1, Jan. 1958, p. 140...148.
- [9] *Mailloux R. G.* The Long Yagi-Uda Array. IEEE Trans. AP-14, No. 2, März 1966, p. 128...137.
- [10] *Siegel C. L.* Symplectic Geometry. Amer. Journal of Math. **65** (1943), p. 1...86.
- [11] *Lanczos C.* Linear Systems in Self-Adjoint Form. Amer. Math. monthly, **65**, (1958), p. 665...674.
- [12] *Youla D. C., Kaplan L., Stock D. J. R.* The Analytic Foundations of Linear Time-Invariant N-ports. PIBMRI 1028...62 on Contract AF 19 (604)-4143, 3. May, 1962.
- [13] *Youla D. C.* Weissfloch Equivalents for Lossless 2n-Ponts. IRE Trans. CT-7, No. 5, Sept. 1960, p. 193...199.