Zeitschrift: Technische Mitteilungen / Schweizerische Post-, Telefon- und Telegrafenbetriebe = Bulletin technique / Entreprise des postes, téléphones et télégraphes suisses = Bollettino tecnico / Azienda delle poste, dei telefoni e dei telegrafi svizzeri

Herausgeber: Schweizerische Post-, Telefon- und Telegrafenbetriebe

Band: 57 (1979)

Heft: 5

Artikel: Anleitung zur Berechnung von logistischer Funktion und Potenzkurve = Méthode de calcul de la fonction logistique et de la courbe affectée d'un exposant

Autor: Zobrist, Hansruedi

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-875555

Anleitung zur Berechnung von logistischer Funktion und Potenzkurve

Méthode de calcul de la fonction logistique et de la courbe affectée d'un exposant

Hansruedi ZOBRIST, Bern

164.03:519.283:65.012.23:654.15.001.1

Zusammenfassung. *Der Autor beschreibt die Methode zur Berechnung von logistischer Funktion und Potenzkurve, wie sie für Prognosen im Fernmeldebereich verwendet werden. Der Vorteil dieser Anleitung liegt darin, dass sie zeigt, wie die Berechnungen mit einem leistungsfähigen Taschenrechner durchgeführt werden können.*

Résumé. *L'auteur décrit une méthode de calcul de la fonction logistique et de la courbe affectée d'un exposant, telles qu'elles sont être utilisées pour des pronostics dans le domaine des télécommunications. L'avantage de la solution proposée réside dans le fait qu'elle permet d'effectuer les calculs à l'aide d'un calculateur de poche performant.*

Istruzione per il calcolo di funzioni logistiche e esponenziale

Riassunto. *L'autore descrive il metodo per effettuare il calcolo di funzioni logistiche e esponenziale, come sono essere utilizzate per pronostici nell'ambito delle telecomunicazioni. Il vantaggio di questa istruzione sta nel fatto, che permette di effettuare i calcoli utilizzando un calcolatore tascabile efficiente.*

1 Einleitung

In den Technischen Mitteilungen PTT 8/1974 [1] und 9/1976 [2] wurde gezeigt, dass sich für die langfristige Prognose von Telefonanschlüssen die potenzierte logistische Funktion, für die kurz- und mittelfristige Prognose dagegen die Potenzfunktion gut eignet. Obschon für beide Prognosekurven Computerprogramme bestehen, erkundigen sich immer wieder Mitarbeiter der PTT-Betriebe, ob diese Kurven nicht auch auf leistungsfähigen Taschenrechnern programmiert oder berechnet werden können. Da dies ohne weiteres möglich ist, wurde die vorliegende Anleitung verfasst. Während die mathematische Begründung für das in Abschnitt 2 beschriebene Verfahren auf den Seiten 293 und 294 von [1] enthalten ist und deshalb hier fehlen darf, wurde sie für die in Abschnitt 3 beschriebene Dreipunktemethode vollständig angeführt.

2 Die potenzierte logistische Funktion als Regressionskurve

Aufgabe: Die n Punkte $P_i = (t_i, y_i)$, $i = 1, \ldots, n$, sollen durch die potenzierte logistische Kurve

$$\hat{y} = \frac{k}{(1+ce^{-bt})^{1/m}} \qquad (1)$$

deren Parameter k und m bekannt seien, approximiert werden *(Fig. 1)*.

Es bedeuten:

- t unabhängige Variable (z. B. Zeit)
- $\hat{y}$ Regressionswert der abhängigen Variablen y
- k Sättigungswert (z. B. maximale Dichte in Ortsnetzen)
- m Potenzparameter (siehe Tab. I, S. 297 von [1])
- e Basis der natürlichen Logarithmen
- *b, c zu berechnende Kurvenparameter*

Lösungsweg: Gleichung (1) linearisieren, dann Kurvenparameter b und c mit Hilfe der linearen Regressionsrechnung berechnen.

1 Introduction

Dans le Bulletin technique PTT 8/1974 [1] et 9/1976 [2], il a été montré que la fonction logistique affectée d'un exposant convenait à l'élaboration de pronostics à long terme concernant les raccordements téléphoniques, tandis que la fonction affectée d'un exposant se prêtait bien à l'établissement de pronostics à court et à moyen terme. Bien que des programmes d'ordinateur existent pour les deux courbes, il arrive souvent que des collaborateurs de l'Entreprise des PTT demandent s'il est possible de programmer ou de calculer ces courbes au moyen de calculatrices de poche perfectionnées. Vu qu'un tel procédé est sans autre possible, la méthode suivante a été développée. Les explications mathématiques relatives au procédé décrit au paragraphe 2 figurant aux pages 293 et 294 de [1], nous nous abstiendrons d'y revenir, tandis que la méthode des trois points évoquée au paragraphe 3 est exposée en détail.

2 La fonction logistique affectée d'un exposant en tant que courbe de régression

Problème: Il s'agit, grâce à la courbe logistique affectée d'un exposant

$$\hat{y} = \frac{k}{(1+ce^{-bt})^{1/m}} \qquad (1)$$

dont les paramètres k et m sont connus, d'obtenir une approximation des n points $P_i = (t_i, y_i)$, $i = 1,\ldots,n$ *(fig. 1)*,

où

- t Variable indépendante (par exemple temps)
- $\hat{y}$ Valeur de régression des variables dépendantes y
- k Valeur de saturation (par exemple densité maximale dans les réseaux locaux)
- m Paramètre de l'exposant (voir tab. I, p. 297 de [1])
- e Base des logarithmes naturels
- *b, c Paramètres à calculer de la courbe*

Méthode de résolution: Rendre l'équation (1) linéaire, puis calculer par régression linéaire les paramètres b et c de la courbe.

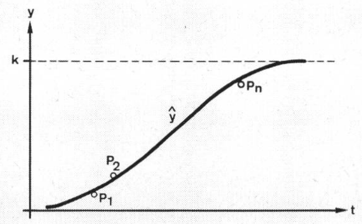

Fig. 1
Illustration der Aufgabenstellung — Illustration des données du problème

Lösung:
Es sind

$$b = -B \quad \text{und} \quad c = e^G$$

wobei B und G wie folgt berechnet werden:

$B = S_{t,Y}/S_{t,t}$

mit

$$S_{t,Y} = (n\,\Sigma t_i\,Y_i - \Sigma t_i\,\Sigma Y_i)/n$$
$$S_{t,t} = [n\,\Sigma t_i^2 - (\Sigma t_i)^2]/n$$
$$Y_i = \ln[(k/y_i)^m - 1] \qquad (2)$$

$G = \bar{Y} - B\bar{t}$

mit

$$\bar{Y}\,(\text{arithmetisches Mittel aller } Y_i) = \frac{1}{n}\Sigma Y_i$$

$\bar{t}$ analog

Symbolik:

$$\Sigma \text{ bedeutet } \sum_{i=1}^{n}$$

Der Rechenaufwand wird etwas kleiner, wenn man in der Gleichung (1) b durch $-B$ und c durch e^G ersetzt. Man erhält dabei

$$\hat{y} = \frac{k}{(1+e^{Bt+G})^{1/m}} \qquad (3)$$

So können die Regressionswerte $\hat{y}$ direkt aus den Grössen B und G berechnet werden, ohne dass diese vorerst in b und c umgerechnet werden müssen.

Beispiel 1

Gegeben seien die Parameter $k = 0{,}8$ und $m = 7{,}4$, ferner die fünf Beobachtungswerte

P_1 bis P_5 wie folgt:
$t_1 = 30 \quad y_1 = 0{,}04$
$t_2 = 50 \quad y_2 = 0{,}08$
$t_3 = 66 \quad y_3 = 0{,}2$
$t_4 = 74 \quad y_4 = 0{,}36$
$t_5 = 78 \quad y_5 = 0{,}52$

Zuerst werden die Y_i gemäss Formel (2) berechnet. Die Ergebnisse sind in *Tabelle I* enthalten. Beispiel für $i = 2$:

$$Y_2 = \ln[(0{,}8/0{,}08)^{7,4} - 1] = \ln(10^{7,4} - 1) = 17{,}039$$

Solution:
On a

$$b = -B \quad \text{et} \quad c = e^G$$

B et G sont calculés ainsi qu'il suit:

$B = S_{t,Y}/S_{t,t}$

où

$$S_{t,Y} = (n\,\Sigma t_i\,Y_i - \Sigma t_i\,\Sigma Y_i)/n$$
$$S_{t,t} = [n\,\Sigma t_i^2 - (\Sigma t_i)^2]/n$$
$$Y_i = \ln[(k/y_i)^m - 1] \qquad (2)$$

$G = \bar{Y} - B\bar{t}$

avec

$$\bar{Y}\,(\text{moyenne arithmétique de tous les } Y_i) = \frac{1}{n}\Sigma Y_i$$

$\bar{t}$ par analogie

Le symbole

$$\Sigma \text{ signifie } \sum_{i=1}^{n}$$

Les calculs sont quelque peu simplifiés si l'on remplace b par $-B$ et c par e^G dans l'équation (1). On obtient alors

$$\hat{y} = \frac{k}{(1+e^{Bt+G})^{1/m}} \qquad (3)$$

Cela permet de calculer directement les valeurs de régression $\hat{y}$ à partir des grandeurs B et G, sans qu'il soit nécessaire de les transposer d'abord par calcul en b et en c.

Exemple 1

On connaît les paramètres $k = 0{,}8$ et $m = 7{,}4$ ainsi que les cinq valeurs d'observation P_1 à P_5, qui se présentent comme il suit:

$t_1 = 30 \quad y_1 = 0{,}04$
$t_2 = 50 \quad y_2 = 0{,}08$
$t_3 = 66 \quad y_3 = 0{,}2$
$t_4 = 74 \quad y_4 = 0{,}36$
$t_5 = 78 \quad y_5 = 0{,}52$

Tabelle I. Übersicht der Ergebnisse *(Fig. 2)*
Tableau I. Synoptique des résultats *(fig. 2)*

i	t	$Y_i = \ln[(k/y_i)^m - 1]$	$\hat{y} = \frac{k}{(1+e^{Bt+G})^{1/m}}$ oder/ou $\hat{y} = \frac{k}{(1+ce^{-bt})^{1/m}}$
1	30	22,168	0,03416
2	50	17,039	0,09881
3	66	10,259	0,23111
4	74	5,906	0,35335
5	78	3,146	0,43645
Σ	298	58,518	
	80		0,48448
	90		0,73980
	100		0,79835

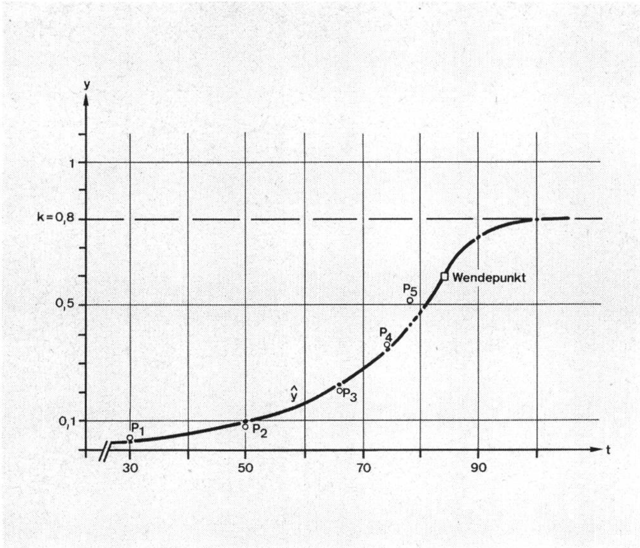

Fig. 2
Skizze zu Beispiel 1 — Dessin concernant l'exemple 1
Wendepunkt — Point d'inflexion

Die Hilfssummen zur Ermittlung von $S_{t,Y}$ und $S_{t,t}$ lauten dann: (n = 5)

$$\Sigma t_i\, Y_i = 30 \cdot 22{,}168 + \ldots + 78 \cdot 3{,}146 = 2876{,}5$$

$$\Sigma t_i\, \Sigma Y_i = 298 \cdot 58{,}518 = 17\,438$$

$$\Sigma t_i^2 = 30^2 + \ldots + 78^2 = 19\,316$$

$$(\Sigma t_i)^2 = 298^2 = 88\,804$$

Nun werden B und G berechnet:

$$B = S_{t,Y}/S_{t,t} = -611{,}2/1555{,}2 = -0{,}3930$$

$$G = \overline{Y} - B\bar{t} = 11{,}70 + 0{,}3930 \cdot 59{,}6 = 35{,}13$$

(exaktere Werte: B = −0,3929888614, G = 35,12573318)

Jetzt können die Regressionswerte ŷ nach Formel (3) für beliebige Werte von t berechnet werden (Ergebnisse siehe Tab. I). Dieselben Werte für ŷ erhält man nach Formel (1), nachdem aus B und G vorerst b und c berechnet worden sind:

$$b = -B = 0{,}3930 \text{ und } c = e^G = 1{,}7985 \cdot 10^{15}$$

Bei grossen Werten für die t_i wird allerdings die Formel (1) unbrauchbar, weil $c = e^G$ zu gross wird. Dies ist bereits der Fall, wenn für $t_1 \ldots t_5$ die Zahlen 1930...1978 anstatt 30...78 gewählt werden. G wird dann 782 und e^G $7{,}854 \cdot 10^{323}$. Diese Zahl vermag kein Rechengerät zu fassen.

Schliesslich können bei Bedarf auch die Koordinaten des Wendepunkts der Kurve ŷ nach den in [1] auf S. 292 enthaltenen Formeln (2) und (3) wie folgt berechnet werden:

$$\text{Wendepunkt} = (x_w;\, y_w) = \left[\frac{\ln (c/m)}{b};\, \frac{k}{(m+1)^{1/m}}\right]$$

$$= (84{,}29;\ 0{,}6000)$$

3 Die Potenzfunktion durch drei Punkte (Dreipunktemethode)

Aufgabe: Durch die drei Punkte $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$, $P_3 = (x_3, y_3)$ (mit $x_1 < x_2 < x_3$ und $y_1 < y_2 < y_3$) ist eine

Calculer d'abord les Y_i d'après la formule (2). Les résultats ressortent du *tableau I.* Exemple pour i = 2:

$$Y_2 = \ln\,[(0{,}8/0{,}08)^{7{,}4} - 1] = \ln(10^{7{,}4} - 1) = 17{,}039$$

Les sommes auxiliaires servant à déterminer $S_{t,Y}$ et $S_{t,t}$ sont alors: (n = 5)

$$\Sigma t_i\, Y_i = 30 \cdot 22{,}168 + \ldots + 78 \cdot 3{,}146 = 2876{,}5$$

$$\Sigma t_i\, \Sigma Y_i = 298 \cdot 58{,}518 = 17\,438$$

$$\Sigma t_i^2 = 30^2 + \ldots + 78^2 = 19\,316$$

$$(\Sigma t_i)^2 = 298^2 = 88\,804$$

On calcule ensuite B et G:

$$B = S_{t,Y}/S_{t,t} = -611{,}2/1555{,}2 = -0{,}3930$$

$$G = \overline{Y} - B\bar{t} = 11{,}70 + 0{,}3930 \cdot 59{,}6 = 35{,}13$$

(valeurs plus précises:

B = −0,3929888614, G = 35,12573318)

Après cela, on peut déterminer les valeurs de régression ŷ pour des valeurs quelconques de t d'après la formule (3); les résultats figurent au tableau I. Ces mêmes valeurs pour ŷ s'obtiennent d'après la formule (1), après qu'on a tiré b et c de B et G:

$$b = -B = 0{,}3930 \quad \text{et} \quad c = e^G = 1{,}7985 \cdot 10^{15}$$

Pour des valeurs élevées des t_i, la formule (1) devient toutefois inutilisable, vu que $c = e^G$ devient trop grand. Tel est déjà le cas, lorsqu'on choisit les chiffres 1930...1978 pour $t_1 \ldots t_5$ au lieu de 30...78. G prend alors la valeur 782 et e^G $7{,}854 \times 10^{323}$, nombre qui dépasse la capacité de toute calculatrice.

Il est possible, enfin, de calculer au besoin les coordonnées du point d'inflexion de la courbe ŷ selon les formules (2) et (3) qui figurent à la page 292 de [1]. Voici comment on procède:

$$\text{Point d'inflexion } (x_w;\, y_w) = \left[\frac{\ln (c/m)}{b};\, \frac{k}{(m+1)^{1/m}}\right]$$

$$= (84{,}29;\ 0{,}6000)$$

3 La fonction affectée d'un exposant passant par trois points (méthode des trois points)

Problème: Traçons une courbe affectée d'un exposant ayant pour origine P_1 en passant par les trois points $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$, $P_3 = (x_3, y_3)$, avec $x_1 < x_2 < x_3$ et $y_1 < y_2 < y_3$ *(fig. 3).* L'équation définissant une telle courbe est:

$$y = y_1 + a(x - x_1)^b \tag{4}$$

Il s'agit donc de déterminer les paramètres a et b de cette courbe.

Solution: En introduisant P_1 dans l'équation (4), on voit que la courbe passe par P_1 pour toutes les valeurs de a et de b (sauf pour b = 0):

$$y_1 \equiv y_1 + a\underbrace{(x_1 - x_1)^b}_{=0}$$

Potenzkurve mit Ursprung in P_1 zu legen *(Fig. 3)*. Die Definitionsgleichung einer solchen Kurve lautet:

$$y = y_1 + a(x - x_1)^b \tag{4}$$

Es sind somit die Parameter a und b dieser Kurve zu bestimmen.

Lösung: Das Einsetzen von P_1 in die Gleichung (4) zeigt, dass die Kurve für alle Werte von a und b (ausser b = 0) durch P_1 verläuft:

$$y_1 \equiv y_1 + \underbrace{a(x_1 - x_1)^b}_{= 0}$$

P_1 ist also tatsächlich der Ursprung der Potenzfunktion (4). Da auch die Punkte P_2 und P_3 auf der Kurve liegen sollen, werden sie ebenfalls in die Gleichung (4) eingesetzt. Dabei entstehen folgende zwei Bestimmungsgleichungen für die Parameter a und b:

$$\left.\begin{array}{ll} P_2 \text{ auf Kurve (4):} & y_2 = y_1 + a(x_2 - x_1)^b \quad (5.1) \\ P_3 \text{ auf Kurve (4):} & y_3 = y_1 + a(x_3 - x_1)^b \quad (5.2) \end{array}\right\} \tag{5}$$

Berechnung von a und b mit Hilfe der sogenannten Substitutionsmethode:

Auflösen von (5.1) nach a:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{(x_2 - x_1)^b} \tag{6}$$

(6) in (5.2) einsetzen (substituieren):

$$y_3 = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{(x_2 - x_1)^b}(x_3 - x_1)^b \quad \text{oder}$$

$$y_3 - y_1 = (y_2 - y_1)\left(\frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1}\right)^b$$

Auflösen nach b:

$$b = \frac{\lg \dfrac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1}}{\lg \dfrac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1}} \tag{7}$$

Damit sind a und b bekannt (Gleichungen 6 und 7). Werden die so berechneten Werte von a und b in die Gleichung (4) eingesetzt, so verläuft die in P_1 beginnende Potenzkurve durch die Punkte P_2 und P_3.

Beispiel 2

Aufgabe: Durch die Punkte P_1 = (1973; 425962), P_2 = (1977; 484057), P_3 = (2000; 710000) ist eine Potenzkurve mit Ursprung in P_1 zu ziehen.

Lösung: Aus (7) b berechnen:

$$b = \frac{\lg \dfrac{284038}{58095}}{\lg \dfrac{27}{4}} = \frac{\lg 4{,}889199}{\lg 6{,}75} = 0{,}831104$$

b = 0,831104 in (6) einsetzen und a berechnen:

$$a = \frac{58095}{4^{0{,}831104}} = 18355{,}42$$

P_1 est donc effectivement l'origine de la courbe affectée d'un exposant (4). Vu que les points P_2 et P_3 doivent aussi se situer sur la courbe, on les introduit également dans l'équation (4). Il en résulte les deux équations de détermination suivantes pour les paramètres a et b:

$$\left.\begin{array}{ll} P_2 \text{ sur la courbe (4):} & y_2 = y_1 + a(x_2 - x_1)^b \quad (5.1) \\ P_3 \text{ sur la courbe (4):} & y_3 = y_1 + a(x_3 - x_1)^b \quad (5.2) \end{array}\right\} \tag{5}$$

Calculer a et b à l'aide de la méthode dite de substitution:

Résoudre (5.1) selon a:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{(x_2 - x_1)^b} \tag{6}$$

Introduire (6) dans (5.2) (substituer):

$$y_3 = y_1 + \frac{y_2 - y_1}{(x_2 - x_1)^b}(x_3 - x_1)^b \quad \text{ou}$$

$$y_3 - y_1 = (y_2 - y_1)\left(\frac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1}\right)^b$$

Résoudre selon b:

$$b = \frac{\lg \dfrac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1}}{\lg \dfrac{x_3 - x_1}{x_2 - x_1}} \tag{7}$$

On connaît de ce fait a et b (équations 6 et 7). Si les valeurs ainsi calculées de a et de b sont introduites dans l'équation (4), la courbe affectée d'un exposant issue de P_1 passe par les points P_2 et P_3.

Exemple 2

Problème: Tracer une courbe affectée d'un exposant, issue de P_1 = (1973; 425962) et passant par les points P_2 = (1977; 484057), P_3 = (2000; 710000).

Solution: Calculer b en partant de (7):

$$b = \frac{\lg \dfrac{284038}{58095}}{\lg \dfrac{27}{4}} = \frac{\lg 4{,}889199}{\lg 6{,}75} = 0{,}831104$$

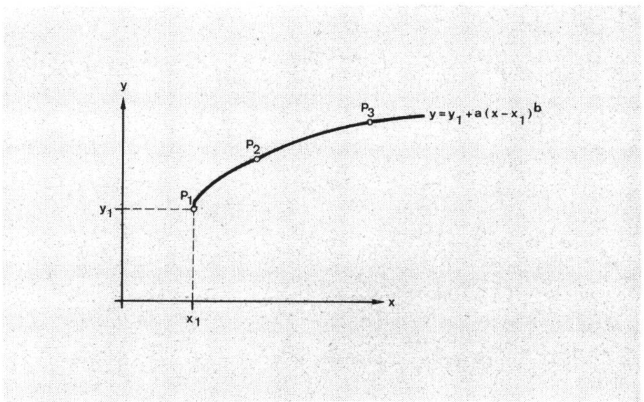

Fig. 3
Illustration der Aufgabenstellung — Illustration des données du problème

```
      ∇DP[⎕]∇
    ∇ DP X
[1]   X1←1973
[2]   Y1←425962
[3]   X2←1977
[4]   Y2←484057
[5]   X3←2000
[6]   Y3←710000
[7]   'B = ',⍕B←(⍟(Y3-Y1)÷Y2-Y1)÷⍟(X3-X1)÷X2-X1
[8]   'A = ',⍕A←(Y2-Y1)÷(X2-X1)*B
[9]   Y←Y1+A×(X-X1)*B
[10]  2 1 ⍴' '
[11]  '        KURVENPUNKTE'
[12]  ⍳0
[13]  '        X:         Y:'
[14]  10 0 ⍕X,[1.1] Y
    ∇
```

Programm "DP X"

```
      DP 1973 1977 1980 1985 1990 1995 2000
```

Aufruf des Programms

```
B = 0.8311040086
A = 18355.41821


        KURVENPUNKTE

        X:         Y:
        1973       425962
        1977       484057
        1980       518459
        1985       570731
        1990       619335
        1995       665546
        2000       710000
```

Output

Fig. 4
Ausdruck des APL-Programms zur Berechnung der Potenzfunktion — Impression du programme APL relatif au calcul de la fonction affectée d'un exposant
Programm «DP X» — Programme «DP X»
Kurvenpunkte — Points de la courbe
Aufruf des Programms — Appel du programme
Output — Sortie

Nach Gleichung (4) lautet somit die durch die Punkte P_1, P_2 und P_3 führende Potenzkurve folgendermassen:

$$y = 425962 + 18355{,}42\ (x - 1973)^{0{,}831104} \qquad (4)'$$

Nun können nach Formel (4)' beliebig viele Kurvenpunkte berechnet werden. Für x = 1980 beispielsweise wird

$$y = 425962 + 18355{,}42 \cdot (1980 - 1973)^{0{,}831104}$$
$$= 425962 + 18355{,}42 \cdot 7^{0{,}831104} = \mathit{518459}$$

Die Kurve geht also durch den Punkt (1980; 518459).

Diese Berechnungen lassen sich auf Taschenrechnern für höhere Ansprüche leicht programmieren.

Introduire b = 0,831104 dans (6) et calculer a:

$$a = \frac{58095}{4^{0{,}831104}} = 18355{,}42$$

Selon l'équation (4), la courbe affectée d'un exposant passant par les points P_1, P_2 et P_3 peut être exprimée par:

$$y = 425962 + 18355{,}42\ (x - 1973)^{0{,}831104} \qquad (4)'$$

En se fondant sur la formule (4)', on peut calculer un nombre quelconque de points de la courbe. Pour x = 1980, on a par exemple

$$y = 425962 + 18355{,}42 \cdot (1980 - 1973)^{0{,}831104}$$
$$= 425962 + 18355{,}42 \cdot 7^{0{,}831104} = \mathit{518459}$$

La courbe passe donc par le point (1980; 518459).

Ces calculs peuvent facilement être programmés sur des calculatrices de poche perfectionnées.

La *figure 4* montre à quel point une programmation en langage APL est simple. Les nombres en sortie d'imprimante (output) fournissent au lecteur d'autres points de la courbe au moyen desquels il pourra contrôler si sa calculatrice est programmée correctement.

Wie einfach beispielsweise in APL eine solche Programmierung ist, zeigt *Figur 4.* Im Output-Teil der Figur findet der Leser weitere Kurvenpunkte, mit denen er nachprüfen kann, ob er seinen Taschenrechner richtig programmiert hat.

Bibliographie

[1] *Zobrist H.* Die Bedeutung der potenzierten logistischen Funktion für Prognosen — Signification de la fonction logistique affectée d'un exposant dans l'élaboration de pronostics. Bern, Techn. Mitt. PTT 52 (1974) Nr. 8, S. 290...298.

[2] *Zobrist H.* Kurz- und mittelfristige Prognose für Telefonanschlüsse — Pronostics à court et à moyen terme concernant les raccordements téléphoniques. Bern, Techn. Mitt. PTT 54 (1976) Nr. 9, S. 339...346.