Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 23 (1949)

Artikel: Die linearen vollkommenen Räume der Funktionentheorie.

Autor: Toeplitz, Otto

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-19761

Die linearen vollkommenen Räume der Funktionentheorie

Von Otto Toeplitz †, Jerusalem[1])

Einleitung

Faßt man die Koeffizienten einer ganzen Funktion $x(w) = \sum_{p=1}^{\infty} x_p w^{p-1}$ zu einem Vektor $\mathfrak{x} = \{x_1, x_2, \ldots\}$ zusammen, so bildet die Menge dieser Vektoren einen vollkommenen Raum π_∞ im Sinne von K. T.[2]), der dazu duale Raum ist ϱ_0, der Raum der Potenzreihen mit einem von Null verschiedenen Konvergenzkreis. Ebenso ist der Raum π_r der Potenzreihen mit einem Konvergenzradius $\geqq r$ dual zum Raum $\varrho_{\frac{1}{r}}$ der Potenzreihen vom Radius $> \frac{1}{r}$.

Die Untersuchung beginnt mit der Bestimmung der beschränkten Mengen in diesen Räumen (§ 1) und der Konvergenz (§ 2). In allen diesen Räumen fallen die schwache und die starke Konvergenz zusammen. Beschränktheit und Konvergenz in π_r sind Begriffe aus der allgemeinen Theorie der vollkommenen Räume, sie erweisen sich jedoch in § 3 identisch mit der gleichmäßigen Beschränktheit bzw. der gleichmäßigen Konvergenz im Inneren von $|w| < r$, den aus der Funktionentheorie bekannten Begriffen. Der *Vitali*sche Satz der Funktionentheorie erscheint so als Spezialfall eines Satzes, der in allen vollkommenen Räumen gilt, in denen jede beschränkte Menge eine schwach konvergente Teilfolge enthält.

In § 4 werden die linearen Transformationen der Räume π_r und ϱ_r

---

[1]) Aus dem Nachlaß des am 15. Februar 1940 in Jerusalem verstorbenen Verfassers, herausgegeben von Gottfried Köthe in Mainz. Die vorliegende Studie über die funktionentheoretischen Räume ϱ_r und π_r stammt aus dem Jahre 1937. Der Herausgeber hat sie aus mehreren Niederschriften und Notizen zusammengestellt, trägt also für den Text im einzelnen die Verantwortung.

[2]) Auf folgende Arbeiten wird gelegentlich verwiesen: K. T., *G. Köthe* und *O. Toeplitz*, Journ. f. reine angew. Math. 171 (1934), S. 193—226, K, *G. Köthe*, Math. Annalen **114** (1937), S. 91—125.

in sich bestimmt, sie lassen sich sowohl durch unendliche Matrizen, wie durch komplexe Integrale der Gestalt

$$y(w) = \frac{1}{2\pi i} \oint B\left(w, \frac{1}{t}\right) x(t) \frac{dt}{t}$$

darstellen, $B(w, z)$ eine in einem geeigneten Bereich um 0 analytische Funktion zweier Variablen.

§ 5 beginnt mit dem Studium zweier einfacher Typen von solchen linearen Transformationen, die ihrer funktionentheoretischen Bedeutung halber von Interesse sind.

Der Verfasser erhoffte sich von der Fortführung dieser Untersuchungen einen neuen Zugang zur Wachstumstheorie der ganzen Funktionen, überhaupt eine gegenseitige Befruchtung der Funktionentheorie und der Theorie der linearen Räume in Fragestellung und Methode.

Eine Verallgemeinerung einiger hier gegebener Sätze auf allgemeinere lineare Räume gab kürzlich der Herausgeber[3]), Verwandtschaft besteht ferner mit den Untersuchungen von *L. Fantappiè* über analytische Funktionale[4]).

§ 1. Die Grundlagen

Es soll bedeuten:

π_∞ den Raum der ganzen transzendenten Funktionen $x(w) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n w^{n-1}$,

π_r den Raum der Potenzreihen $x(w)$, deren Konvergenzradius $\geqq r > 0$,

ϱ_r den Raum der Potenzreihen $u(z) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n z^{n-1}$, deren Konvergenzradius $> r > 0$,

ϱ_0 den Raum der Potenzreihen $u(z)$, deren Konvergenzradius > 0 ist.

Als Koordinatenräume mit den Stellen

$$\mathfrak{x} = \{x_1, x_2 \ldots\} \qquad \text{bzw.} \qquad \mathfrak{u} = \{u_1, u_2, \ldots\}$$

sind diese Räume also charakterisiert

$$\pi_\infty \text{ durch } \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|x_n|} = 0, \qquad \pi_r \text{ durch } \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|x_n|} \leqq \frac{1}{r},$$

---

[3]) Die Stufenräume, eine einfache Klasse linearer vollkommener Räume, Math. Z. 51 (1948), S. 317—345.

[4]) Vgl. etwa Jahresbericht DMV 43 (1934), S. 1—25.

ϱ_r durch $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|x_n|} < \frac{1}{r}$, $\qquad \varrho_0$ durch $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} < \infty$.

Wir setzen $|\mathfrak{x}| = \sup\limits_n \sqrt[n]{|x_n|}$ und $|\mathfrak{u}| = \sup\limits_n \sqrt[n]{|u_n|}$.

Satz 1. *π_r und $\varrho_{\frac{1}{r}}$ $(r \leqq \infty)$ sind zueinander dual, also vollkommen.*

1. Ist $\mathfrak{x}$ eine Stelle aus π_r $(r \leqq \infty)$, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein n_ε, so daß $\sqrt[n]{|x_n|} \leqq \frac{1}{r} + \varepsilon$ ist für $n \geqq n_\varepsilon$; ist $\mathfrak{u}$ eine Stelle von ϱ_s $(s \geqq 0)$, so gibt es ein $\eta > 0$ und dazu ein n_η, so daß $\sqrt[n]{|u_n|} \leqq \frac{1}{s+\eta}$ ist für $n \geqq n_\eta$. Ist n_0 die größere der beiden Zahlen n_ε, n_η, so ist für $n \geqq n_0$

$$|u_n x_n| \leqq \left(\frac{\frac{1}{r} + \varepsilon}{s + \eta}\right)^n .$$

Ist nun $\frac{1}{r} \leqq s$, so folgt

$$|u_n x_n| \leqq \left(\frac{s+\varepsilon}{s+\eta}\right)^n \qquad \text{für} \qquad n \geqq n_0(\varepsilon, \eta) .$$

Es sei $\eta > 0$ festgelegt. Wählt man dann $\varepsilon < \eta$ und bestimmt danach n_ε n_η, n_0, so ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n x_n|$ konvergent, d. h.

1. wenn $\mathfrak{x}$ in π_r und wenn $s \geqq \frac{1}{r}$, so ist jede Stelle von ϱ_s im dualen Raum π_r^* gelegen, d. h. es ist $\varrho_{\frac{1}{r}} \leqq \pi_r^*$, $\varrho_0 \leqq \pi_\infty^*$;
2. wenn $\mathfrak{u}$ in ϱ_s und wenn $r \geqq \frac{1}{s}$, so ist jede Stelle von π_r in ϱ_s^* gelegen, d. h. es ist $\pi_{\frac{1}{s}} \leqq \varrho_s^*$, $\pi_\infty \leqq \varrho_0^*$.

2. Gäbe es ein $\mathfrak{u}$ in π_r^* $(r \leqq \infty)$, das *nicht* in $\varrho_{\frac{1}{r}}$ liegt, so gäbe es ein $\varepsilon > 0$ und eine Folge $n_1, n_2, \ldots$, so daß

$$\sqrt[n_k]{|u_{n_k}|} \geqq r - \frac{1}{k} \qquad \text{für} \quad r < \infty \qquad \text{bzw.} \qquad \sqrt[n_k]{|u_{n_k}|} \geqq k \qquad \text{für} \quad r = \infty$$

ist. Sei dann $x_{n_k} = \frac{1}{|u_{n_k}|}$, aber $x_n = 0$ für $n \neq n_k$, so ist

$$\sqrt[n_k]{|x_{n_k}|} \leqq \frac{1}{r - \frac{1}{k}} \qquad \text{bzw.} \qquad \sqrt[n_k]{|x_{n_k}|} \leqq \frac{1}{k}, \qquad \text{also} \qquad \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|x_n|} \leqq \frac{1}{r},$$

d. h. $\mathfrak{x}$ in π_r und trotzdem wäre $\sum_{n-1}^{\infty} |u_n x_n|$ divergent, da es unendlich viele Summanden 1 enthält, das widerspricht der Annahme, daß $\mathfrak{u}$ in π_r^*. Also $\pi_r^* = \varrho_{\frac{1}{r}}$.

3. Gäbe es ein $\mathfrak{x}$ in $\varrho_{\frac{1}{r}}^*$ $(r \leqq \infty)$, das nicht in π_r liegt, so gäbe es ein $\varepsilon > 0$ und eine Folge $n_1, n_2, \ldots$, so daß $\sqrt[n_i]{|x_{n_i}|} \geqq \frac{1}{r} + \varepsilon$.
Sei dann

$$u_{n_i} = \frac{1}{|x_{n_i}|}, \quad u_n = 0 \quad \text{für} \quad n \neq n_i ,$$

so wäre $\sqrt[n]{|u_n|} \leqq \dfrac{1}{\frac{1}{r} + \varepsilon}$ für jedes n, also $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|u_n|} < r$, d. h. $\mathfrak{u}$ in $\varrho_{\frac{1}{r}}$ gelegen; aber $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n x_n|$ divergiert. Also ist $\varrho_{\frac{1}{r}}^* = \pi_r$, $\varrho_0^* = \pi_\infty$.

Satz 2_ϱ. *Eine Menge U von Stellen $\mathfrak{u}$ aus ϱ_0 ist dann und nur dann beschränkt, wenn $|\mathfrak{u}|$ für alle $\mathfrak{u}$ aus U beschränkt ist.*

Eine Menge U von Stellen $\mathfrak{u}$ aus ϱ_r $(r > 0)$ ist dann und nur dann beschränkt, wenn sie

1. *koordinatenweise beschränkt ist und wenn es*
2. *ein $\delta > 0$ und dazu ein $n_0(\delta)$ gibt, so daß $\sqrt[n]{|u_n|} \leqq \frac{1}{r + \delta}$ für alle $\mathfrak{u}$ aus U und $n \geqq n_0(\delta)$ gilt.*

1. Ist in ϱ_0 der Betrag $|\mathfrak{u}|$ für alle $\mathfrak{u}$ aus U beschränkt, $\leqq M$, so ist $|u_n| \leqq M^n$ für alle n und daher

$$|\mathfrak{u}\mathfrak{x}| \leqq \sum_{n=1}^{\infty} |u_n x_n| \leqq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| M^n ,$$

d. h. für jedes $\mathfrak{x}$ aus π_∞ unter einer vom einzelnen $\mathfrak{u}$ aus U unabhängigen Grenze gelegen.

2. Ist in ϱ_r die zweite Bedingung erfüllt, so gibt es ein $\delta > 0$ und dazu ein $n_0(\delta)$, so daß $|u_n| \leqq \dfrac{1}{(r + \delta)^n}$ für $n \geqq n_0(\delta)$ und *alle* $\mathfrak{u}$ aus U gilt. Ist also $\mathfrak{x}$ irgendeine Stelle aus $\varrho_r^* = \pi_{\frac{1}{r}}$, mithin für $\varepsilon > 0$ $\sqrt[n]{|x_n|} \leqq r + \varepsilon$, wenn $n > n_1(\varepsilon)$, so folgt $|u_n x_n| \leqq \left(\dfrac{r + \varepsilon}{r + \delta}\right)^n$ für $n \geqq n_2$, wo n_2 die größere der beiden Zahlen n_0, n_1 ist. Wählt man das frei vorgegebene $\varepsilon < \delta$, so ist $\dfrac{r + \varepsilon}{r + \delta} < 1$ und $\sum_{n=n_2}^{\infty} |u_n x_n|$ kon-

vergent und $\leqq M(\delta, \varepsilon, n_1(\varepsilon))$, also unter einer vom einzelnen $\mathfrak{u}$ aus U unabhängigen Schranke. Wegen der ersten Bedingung ist aber auch $\sum_{n=1}^{n_2=1} |u_n x_n|$ unter einer vom einzelnen $\mathfrak{u}$ unabhängigen Schranke gelegen, also auch $|\mathfrak{u}\mathfrak{x}|$, d. h. U ist beschränkt.

3. Ist in ϱ_r $(r \geqq 0)$ die Menge U beschränkt, so ist die 1. Bedingung erfüllt und es handelt sich nur um den Beweis der 2. Bedingung. Ist $\mathfrak{u}$ irgendeine Stelle aus ϱ_r, so gilt

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|u_n|} < \frac{1}{r},$$

d. h. es gibt ein $\delta > 0$ und ein $n_0(\delta)$, so daß $\sqrt[n]{|u_n|} < \frac{1}{r+\delta}$ für $n \geqq n_0(\delta, \mathfrak{u})$. Gäbe es nun nicht *ein* δ für alle $\mathfrak{u} \in U$ und dazu *ein* $n_0(\delta)$, so gäbe es eine Folge $\mathfrak{u}^{(1)}, \mathfrak{u}^{(2)}, \ldots$ in U und dazu eine Folge $n_1 < n_2 < \cdots$, so daß

$$\sqrt[n_1]{|u_{n_1}^{(1)}|} \geqq \frac{1}{r+1}, \quad \sqrt[n_2]{|u_{n_2}^{(2)}|} \geqq \frac{1}{r+\frac{1}{2}}, \ldots, \quad \sqrt[n_\alpha]{|u_{n_\alpha}^{(\alpha)}|} \geqq \frac{1}{r+\frac{1}{\alpha}}, \ldots$$

Sei dann

$$x_{n_\alpha} = \frac{n_\alpha}{|u_{n_\alpha}^{(\alpha)}|}, \qquad x_n = 0 \quad \text{für} \quad n \neq n_\alpha,$$

so ist

$$\sqrt[n_\alpha]{|x_{n_\alpha}|} = \frac{\sqrt[n_\alpha]{n_\alpha}}{\sqrt[n_\alpha]{|u_{n_\alpha}^{(\alpha)}|}} \leqq \sqrt[n_\alpha]{n_\alpha}\left(r + \frac{1}{\alpha}\right),$$

also $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|x_n|} \leqq r$, d. h. $\mathfrak{x}$ in $\pi_{\frac{1}{r}}$ gelegen. Andererseits ist, wenn $\tilde{\mathfrak{u}} = \{|u_1|, |u_2|, \ldots\}$ gesetzt wird, $\tilde{\mathfrak{u}}^{(\alpha)}\mathfrak{x} \geqq |u_{n_\alpha}^{(\alpha)}| x_{n_\alpha} = n_\alpha \to \infty$, also $\tilde{\mathfrak{u}}^{(\alpha)}\mathfrak{x} \to \infty$, d. h. die normale Hülle $\tilde{U}$ von U unbeschränkt, nach K. T. § 5, Satz 2 also U selbst unbeschränkt gegen die Voraussetzung.

Satz 2_π. *Eine Menge X in π_r $(r \leqq \infty)$ ist dann und nur dann beschränkt, wenn sie*

1. *koordinatenweise beschränkt ist und wenn es*
2. *zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0(\varepsilon)$ gibt, so daß $\sqrt[n]{|x_n|} \leqq \frac{1}{r} + \varepsilon$ ist für $n \geqq n_0(\varepsilon)$ und alle $\mathfrak{x}$ aus X.*

1. Ist $\mathfrak{u}$ irgendeine Stelle aus $\pi_r^* = \varrho_{\frac{1}{r}}$, so ist $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|u_n|} < r$, also für ein passendes $\delta > 0$ gibt es ein $n_1(\delta)$, so daß

$$\sqrt[n]{|u_n|} \leqq \frac{1}{\frac{1}{r} + \delta}$$

gilt, wenn $n \geqq n_1(\delta)$. Ist nun die 2. Bedingung erfüllt, so gibt es zu *jedem* $\varepsilon > 0$ ein $n_0(\varepsilon)$, so daß

$$\sqrt[n]{|x_n|} \leqq \frac{1}{r} + \varepsilon \qquad \text{für} \qquad n \geqq n_0(\varepsilon)$$

und *alle* $\mathfrak{x}$ aus X, also

$$|u_n x_n| \leqq \left[\frac{1}{\frac{1}{r} + \delta}\left(\frac{1}{r} + \varepsilon\right)\right]^n.$$

Wählt man speziell $\varepsilon < \delta$, so wird $\sum\limits_{n=n_2}^{\infty} |u_n x_n|$, wo n_2 die größere der beiden Zahlen n_0, n_1 bedeutet, konvergieren und unter einer vom einzelnen $\mathfrak{x}$ unabhängigen Schranke liegen. Ebenso $\sum\limits_{n=1}^{n_2-1} |u_n x_n|$ wegen der 1. Bedingung. Also ist X beschränkt.

2. Ist umgekehrt X beschränkt, so ist zuerst die 1. Bedingung erfüllt. Wäre die 2. Bedingung *nicht* erfüllt, so wäre für ein ε das $n_0(\varepsilon)$, das es zu jedem $\mathfrak{x}$ aus π_r gibt und für das

$$\sqrt[n]{|x_n|} \leqq \frac{1}{r} + \varepsilon \qquad \text{für} \qquad n \geqq n_0(\varepsilon)$$

gilt, nicht für alle $\mathfrak{x}$ aus X gleichmäßig dasselbe, sondern es gäbe eine Folge $\mathfrak{x}^{(n_\alpha)}$, $n_1 < n_2 < \ldots$ aus X, so daß

$$\sqrt[n_1]{|x_{n_1}^{(1)}|} \geqq \frac{1}{r} + \varepsilon, \qquad \sqrt[n_2]{|x_{n_2}^{(2)}|} \geqq \frac{1}{r} + \varepsilon, \ldots$$

Dann wäre

$$|x_{n_\alpha}^{(\alpha)}| \geqq \left(\frac{1}{r} + \varepsilon\right)^{n_\alpha}.$$

Sei dann

$$u_{n_\alpha} = \frac{n_\alpha}{|x_{n_\alpha}^{(\alpha)}|}, \qquad u_n = 0 \qquad \text{für} \qquad n \neq n_\alpha,$$

so wäre

$$\sqrt[n_\alpha]{|u_{n_\alpha}|} \leqq \sqrt[n_\alpha]{n_\alpha}\,\frac{1}{\frac{1}{r} + \varepsilon},$$

also $$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|u_n|} \leqq \frac{1}{\frac{1}{r}+\varepsilon},$$

d. h. $\mathfrak{u}$ in $\varrho_{\frac{1}{r}} = \pi_r^*$. Andererseits wäre $|u_{n_\alpha} x_{n_\alpha}^{(\alpha)}| \geqq n_\alpha \to \infty$, also $|\mathfrak{u}\,\tilde{\mathfrak{x}}^{(\alpha)}| \to \infty$, d. h. die normale Hülle $\tilde{X}$ unbeschränkt, mithin wegen K. T. § 5, Satz 2, auch X unbeschränkt gegen die Voraussetzung.

Satz 3. *In* π_r $(r \leqq \infty)$ *gibt es zu jeder beschränkten Menge* X *eine majorisierende Stelle* $\mathfrak{y}$ *mit lauter reellen, nichtnegativen Koordinaten, so daß für jedes* $\mathfrak{x}$ *aus* X *gilt* $|x_n| \leqq y_n$. *Dasselbe gilt für* ϱ_r $(r \geqq 0)$.

1. Zuerst ist X als beschränkte Menge koordinatenweise beschränkt. Sei $m_k = \sup |x_k|$ für alle $\mathfrak{x}$ aus X. Gemäß Satz 2_π ist für *alle* $\mathfrak{x}$ aus X und $k \geqq n_0(\varepsilon)$ gleichmäßig $\sqrt[k]{|x_k|} \leqq \frac{1}{r} + \varepsilon$, daher gilt auch für das supremum $\sqrt[k]{m_k} \leqq \frac{1}{r} + \varepsilon$. Diese Tatsache drückt man einfach aus durch $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{m_k} \leqq \frac{1}{r}$ und sie besagt, daß die Stelle $\mathfrak{m} = \{m_1, m_2, \ldots\}$ eine Stelle aus π_r ist. Sie hat offenbar die gewünschte Majoranteneigenschaft.

2. Für ϱ_r schließt man analog aus Satz 2_ϱ. Hier erhält man *ein* δ, für das $\sqrt[k]{m_k} \leqq \frac{1}{r+\delta}$ wird bei $k \geqq n_0(\delta)$ und dies besagt, daß die Stelle $\mathfrak{m}$ in ϱ_r liegt.

§ 2. Grenzstellen und Häufungsstellen in π_r und ϱ_r

Aus § 1, Satz 3, können wir jetzt leicht folgern, daß sowohl in den π_r wie auch in den ϱ_r (schwache) Konvergenz und starke Konvergenz identisch sind (zu ihrer Definition vergleiche K. T. § 3 und § 5).

Satz 1. *In* π_r $(r \leqq \infty)$ *ist jede konvergente Folge stark konvergent.*

Da die π_r nach § 1, Satz 1, vollkommen, nach K. T. § 3 also vollständig sind, genügt es, die Behauptung für Folgen $\mathfrak{x}^{(p)}$ zu beweisen, die gegen $\mathfrak{o}$ konvergieren.

Die Menge X aller $\mathfrak{x}^{(p)}$ ist beschränkt, $\mathfrak{y}$ sei eine nach § 1, Satz 3, existierende majorisierende Stelle. Ist nun eine beliebige beschränkte Menge U aus $\varrho_{\frac{1}{r}}$ gegeben, $\mathfrak{w}$ eine majorisierende Stelle von U, so ist $|\mathfrak{w}\,\mathfrak{y}| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n y_n < \infty$. Es läßt sich also zu jedem vorgegebenen $\varepsilon > 0$ ein $n_0(\varepsilon)$

so bestimmen, daß $\sum\limits_{n_0}^{\infty} v_n y_n < \frac{\varepsilon}{2}$ ist. Wegen der koordinatenweisen Konvergenz von $\mathfrak{x}^{(p)}$ gegen $\mathfrak{o}$ läßt sich ferner ein $p_0(\varepsilon)$ so bestimmen, daß auch $\sum\limits_{n=1}^{n_0-1} v_n |x_n^{(p)}| < \frac{\varepsilon}{2}$ für jedes $p \geqq p_0(\varepsilon)$. Daraus ergibt sich für $p \geqq p_0$

$$\sup_{\mathfrak{u} \in U} |\mathfrak{u}\,\mathfrak{x}^{(p)}| \leqq \sum_{n=1}^{\infty} v_n |x_n^{(p)}| \leqq \sum_{n=1}^{n_0-1} v_n |x_n^{(p)}| + \sum_{n=n_0}^{\infty} v_n y_n < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon ,$$

also die starke Konvergenz von $\mathfrak{x}^{(p)}$ gegen $\mathfrak{o}$.

Vertauschung von π_r und $\varrho_{\frac{1}{r}}$ in dieser Überlegung führt zu

Satz 2. *In* ϱ_r $(r \geqq 0)$ *ist jede konvergente Folge stark konvergent.*

Aus K 1, § 1, Satz 3, ergibt sich sofort die

Folgerung. *In allen* π_r *und* ϱ_r *gilt der Grenzstellensatz, d. h. jede beschränkte unendliche Teilmenge enthält eine konvergente Teilfolge.*

Nach K. T. § 5, Satz 6, ist ferner eine Folge aus π_r oder ϱ_r dann und nur dann konvergent, wenn sie beschränkt ist und koordinatenweise konvergiert.

Satz 3. *Die Folge* $\mathfrak{x}^{(n)}$ *aus* π_∞ *konvergiert dann und nur dann gegen* $\mathfrak{x}$, *wenn* $\lim\limits_{n\to\infty} |\mathfrak{x} - \mathfrak{x}^{(n)}| = 0$ *ist.*

1. Ist $\mathfrak{x}^{(n)}$ konvergent — es kann $\lim\limits_{n\to\infty} \mathfrak{x}^{(n)} = \mathfrak{o}$ angenommen werden — so ist es zunächst eine beschränkte Folge. Nach § 1, Satz 2_π, kann man daher, falls $\varepsilon > 0$ vorgegeben ist, $n_0(\varepsilon)$ so bestimmen, daß $\sqrt[n]{|x_n^{(p)}|} \leqq \varepsilon$ ist für alle p und $n \geqq n_0(\varepsilon)$. Sodann folgt aus der Konvergenz von $\mathfrak{x}^{(p)}$ die koordinatenweise Konvergenz; man kann also p_0 so wählen, daß

$$\sqrt[1]{|x_1^{(p)}|}\,,\quad \sqrt[2]{|x_2^{(p)}|}\,,\ldots,\quad \sqrt[n_0-1]{|x_{n_0-1}^{(p)}|} \leqq \varepsilon \qquad \text{für} \qquad p \geqq p_0(\varepsilon) .$$

Alsdann ist $\sup\limits_n \sqrt[n]{|x_{(n)}^{p}|} = |\mathfrak{x}^{(p)}| \leqq \varepsilon$ für $p \geqq p_0(\varepsilon)$.

2. Ist $\lim\limits_{p\to\infty} |\mathfrak{x}^{(p)}| = 0$, so ist $\mathfrak{x}^{(p)}$ koordinatenweise beschränkt. Ferner gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein p_0, so daß $\sqrt[n]{|x_n^{(p)}|} \leqq \varepsilon$ für alle n und $p \geqq p_0$. Aber für $p = 1,\ldots,p_0 - 1$ ist $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n^{(p)}|} = 0$ für

jedes einzelne p, da $\mathfrak{x}^{(p)}$ in π_∞ liegt; also gibt es ein $n_0(\varepsilon)$, so daß $\sqrt[n]{|x_n^{(p)}|} \leqq \varepsilon$ für $n \geqq n_0(\varepsilon)$ und *alle* p. Also ist $\mathfrak{x}^{(p)}$ nach § 1, Satz 2_π, beschränkt. Da $\mathfrak{x}^{(p)}$ überdies koordinatenweise konvergiert, ist sie nach der Bemerkung vor Satz 3 konvergent.

In allen anderen π_r und ϱ_r ist die Bedingung von Satz 3 offenbar hinreichend, aber nicht notwendig.

Zur (schwachen) Konvergenz im vollkommenen Raum λ gehört die Topologie, die durch die Umgebungen $U_{\mathfrak{u}^{(1)},\ldots,\mathfrak{u}^{(n)};\varepsilon}(\mathfrak{x}^{(0)})$ aller $\mathfrak{x}$ mit

$$|\mathfrak{u}^{(1)}(\mathfrak{x}-\mathfrak{x}^{(0)})| < \varepsilon, \ldots |\mathfrak{u}^{(n)}(\mathfrak{x}-\mathfrak{x}^{(0)})| < \varepsilon\,,\ \mathfrak{u}^{(i)} \in \lambda^*$$

gegeben wird. Entsprechend wird die starke Topologie durch die Umgebungen $U_{V;\varepsilon}(\mathfrak{x}^{(0)})$ aller $\mathfrak{x}$ mit $\sup\limits_{\mathfrak{u} \in V} |\mathfrak{u}(\mathfrak{x}-\mathfrak{x}^{(0)})| < \varepsilon$, V eine beschränkte Menge aus λ^* gegeben (vgl. K. T. Anm. 11 und 15 und K. 1, § 5).

Zu diesen beiden Topologien gehören Häufungsstellenbegriffe, die wir als (schwache) Häufungsstelle und starke Häufungsstelle auseinanderhalten.

Satz 4. *In allen π_r und ϱ_r gibt es Mengen, die $\mathfrak{o}$ zur Häufungsstelle haben, aber nicht zur Grenzstelle und nicht zur starken Häufungsstelle.*

1. X sei die Menge aller Stellen aus π_r mit $[\mathfrak{u}\,\mathfrak{x}] = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n x_n| \geqq 1$, wo $\mathfrak{u}$ irgendeine gegebene Stelle aus π_r^* ist. Dann schließt man wie in K 1, § 5, daß $\mathfrak{o}$ (schwache) Häufungsstelle von X ist. Da die normale Hülle der Stelle $\mathfrak{u}$ (vgl. K. T. § 5, Satz 2) in $\varrho_{\frac{1}{r}}$ eine beschränkte Menge ist, bilden alle $\mathfrak{x}$ aus π_r mit $[\mathfrak{u}\,\mathfrak{x}] < \varepsilon$ eine starke Umgebung von $\mathfrak{o}$. Sie enthält für $\varepsilon < 1$ keine Stelle aus X, also ist $\mathfrak{o}$ nicht starke Häufungsstelle von X. $\mathfrak{o}$ ist aber auch nicht Grenzstelle, denn nach Satz 1 wäre sie dann starke Grenzstelle.

Dieselbe Überlegung gilt auch für die Menge U aller $\mathfrak{u}$ aus ϱ_r mit $[\mathfrak{u}\,\mathfrak{x}] \geqq 1$, $\mathfrak{x}$ irgendeine Stelle aus $\varrho_r^* = \pi_{\frac{1}{r}}$.

Satz 5_a. *In π_r $(r \leqq \infty)$ ist jede starke Häufungsstelle Grenzstelle, also auch jede Grenzstelle von Grenzstellen.*

Sei X eine Menge aus π_r, die $\mathfrak{o}$ zur starken Grenzstelle hat, und sei $U(\delta)$ die Menge aller Stellen aus $\pi_r^* = \varrho_{\frac{1}{r}}$ mit

$$|\mathfrak{u}| \leqq \frac{1}{\frac{1}{r}+\delta}\,, \qquad \delta > 0\,,$$

so ist $U(\delta)$ gemäß § 1, Satz 2_ϱ, beschränkt. Für jedes $\mathfrak{x}$ aus X, für das $\sup\limits_{\mathfrak{u}\in U(\delta)} |\mathfrak{u}\mathfrak{x}| < 1$ ist, gilt $|\mathfrak{x}| \leqq \frac{1}{r} + \delta$. Denn wäre $|\mathfrak{x}| > \frac{1}{r} + \delta$, so gäbe es ein α, so daß $\sqrt[\alpha]{|x_\alpha|} > \frac{1}{r} + \delta$ wäre; wäre dann $\mathfrak{u}$ diejenige Stelle aus $U(\delta)$, bei der

$$\sqrt[n]{|u_n|} = \frac{1}{\frac{1}{r} + \delta}$$

und die arcus der u_n denen der x_n entgegengesetzt sind, so wäre

$$\mathfrak{u}\mathfrak{x} \geqq u_\alpha x_\alpha > \frac{\left(\frac{1}{r} + \delta\right)^\alpha}{\left(\frac{1}{r} + \delta\right)^\alpha} = 1$$

im Widerspruch zu $\sup\limits_{\mathfrak{u}\in U(\delta)} |\mathfrak{u}\mathfrak{x}| < 1$.

Sei jetzt U_n die Menge aller $\mathfrak{u}$ aus $\varrho_{\frac{1}{r}}$, die aus $U\left(\frac{1}{n}\right)$ und den endlich vielen Einheitstellen $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_n$ besteht. Dann kann man, da U_n beschränkt ist, nach Voraussetzung in X ein $\mathfrak{x}^{(n)}$ finden, für das $\sup\limits_{\mathfrak{u}\in U_n} |\mathfrak{u}\mathfrak{x}^{(n)}| < \frac{1}{n}$ ist. Es ist dann a fortiori $\sup\limits_{\mathfrak{u}\in U\left(\frac{1}{n}\right)} |\mathfrak{u}\mathfrak{x}^{(n)}| < 1$ also, wie bewiesen, $|\mathfrak{x}^{(n)}| \leqq \frac{1}{r} + \frac{1}{n}$, und außerdem ist $|x_i^{(n)}| < \frac{1}{n}$ für $i = 1, \ldots, n$, die Folge $\mathfrak{x}^{(n)}$ also koordinatenweise konvergent. Nach § 1, Satz 2_π, ist sie auch beschränkt, also konvergent gegen $\mathfrak{o}$, also ist $\mathfrak{o}$ Grenzstelle von X.

Satz $5_\mathfrak{b}$. *In ϱ_r $(r \geqq 0)$ gibt es Grenzstellen von Grenzstellen, die nicht selbst Grenzstellen sind, und daher Häufungsstellen, die zugleich starke Häufungsstellen sind, aber nicht Grenzstellen.*

Sei nämlich

$$\mathfrak{u}^{(p,q)} = \frac{1}{(r+\delta)^p}\,\mathfrak{e}_p + \frac{1}{\left(r + \frac{1}{p}\right)^{p+q}}\,\mathfrak{e}_{p+q}$$

und sei U die Menge aller dieser $\mathfrak{u}^{(p,q)}$, so gilt:

1.
$$\lim_{p\to\infty} \left(\frac{1}{r+\delta}\right)^p \mathfrak{e}_p = \mathfrak{o}\,,$$

denn für

$$\mathfrak{u}^{(p)} = \left(\frac{1}{r+\delta}\right)^p \mathfrak{e}_p$$

ist
$$\sqrt[p]{|u_p^{(p)}|} = \frac{1}{r+\delta}\,, \qquad \sqrt[n]{|u_n^{(p)}|} = 0$$
sonst, also ist die Folge nach § 1, Satz 2_ϱ beschränkt und koordinatenweise gegen $\mathfrak{o}$ konvergent.

2. Ist eine Teilfolge $\mathfrak{u}^{(p_1,q_1)}, \mathfrak{u}^{(p_2,q_2)} \ldots$ von U konvergent, so müssen die p_i beschränkt sein. Wäre nämlich $p_i \to \infty$, so wäre bei der Stelle $\mathfrak{u}^{(p_i,q_i)}$
$$\sqrt[p_i+q_i]{|u_{p_i+q_i}^{(p_i,q_i)}|} = \frac{1}{r+\frac{1}{p_i}} \to \frac{1}{r}\,.$$
Es gäbe also kein solches δ, wie es § 1, Satz 2_ϱ fordert.

3. Jede konvergente Teilfolge von U zerfällt also in höchstens endlich viele Unterfolgen mit festem p. Für jede derselben gilt aber gemäß Satz 2_ϱ $\lim\limits_{q\to\infty} \mathfrak{u}^{(p,q)} = \mathfrak{u}^{(p)}$.

4. Daher kann $\mathfrak{o}$ nicht Grenzstelle von U sein, sondern nur die Stellen $\mathfrak{u}^{(p)} = \frac{1}{(r+\delta)^p}\,\mathfrak{e}_p$. Diese ihrerseits haben nach 1. $\mathfrak{o}$ zur Grenzstelle. $\mathfrak{o}$ ist also Grenzstelle von Grenzstellen, aber nicht selbst Grenzstelle.

§ 3. Der Vitalische Satz

Das skalare Produkt $\mathfrak{u}\,\mathfrak{x}$ gestattet eine einfache funktionentheoretische Deutung.

Satz 1. *Ist* $\mathfrak{x}$ *eine Stelle aus* π_r, $\mathfrak{u}$ *aus* $\pi_r^* = \varrho_{\frac{1}{r}}$ $(r \leqq \infty)$, *so ist*
$$\mathfrak{u}\,\mathfrak{x} = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{r-\varepsilon} x(t)\, u\left(\frac{1}{t}\right) \frac{dt}{t} \tag{1}$$
(ist $r = \infty$, *so werde* $r-\varepsilon$ *gleich* $R > 0$ *gesetzt), wo*
$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n t^{n-1}\,, \qquad u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n t^{n-1}\,.$$
Ebenso ist für $\mathfrak{u}$ *aus* ϱ_r, $\mathfrak{x}$ *aus* $\varrho_r^* = \pi_{\frac{1}{r}}$ $(r \geqq 0)$
$$\mathfrak{u}\,\mathfrak{x} = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{r+\varepsilon} u(t)\, x\left(\frac{1}{t}\right) \frac{dt}{t}\,. \tag{1'}$$
Die Integrale sind über die Kreise vom Radius $r-\varepsilon$ *bzw.* $r+\varepsilon$ *um* 0 *zu erstrecken, die so zu bestimmen sind, daß auf ihnen die Reihen für* $u\left(\frac{1}{t}\right)$ *bzw.* $u(t)$ *noch absolut konvergieren.*

Ist $\mathfrak{u}$ aus $\varrho_{\frac{1}{r}}$, so hat $u(t)$ einen Konvergenzradius $\frac{1}{r-\delta}$, $\delta > 0$, also ist

$$u\left(\frac{1}{t}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \frac{1}{t^{n-1}}$$

außerhalb des Kreises vom Radius $r - \delta$ konvergent. $x(t) = \sum_{m=1}^{\infty} x_m t^{m-1}$ konvergiert im Kreis vom Radius r. Ist $\varepsilon < \delta$, so erhält man also auf dem Kreis vom Radius $r - \varepsilon$ die Laurententwicklung von $x(t)\, u\left(\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t}$ durch gliedweises Ausmultiplizieren, der Koeffizient von $\frac{1}{t}$ ist dann gerade $\mathfrak{u}\mathfrak{x}$. Ebenso beweist man (1′). Man kann es auch durch Übergang zur neuen Variablen $\frac{1}{t}$ aus (1) für $\frac{1}{r}$ statt r erhalten.

Damit ergibt sich leicht auch für die in den §§ 1 und 2 betrachteten Begriffe der Beschränktheit und Konvergenz, die aus der allgemeinen Theorie der linearen Räume stammen, ihre funktionentheoretische Deutung:

Satz 2_π. *Ist $\mathfrak{x}^{(p)}$ eine konvergente Folge aus π_r $(r \leqq \infty)$, so ist die Funktionenfolge $x^{(p)}(w)$ gleichmäßig konvergent in jedem Kreis $|w| \leqq s < r$ und umgekehrt.*

1. Ist $\lim \mathfrak{x}^{(p)} = \mathfrak{x}$, so ist $\lim\limits_{p\to\infty} \mathfrak{u}\mathfrak{x}^{(p)} = \mathfrak{u}\mathfrak{x}$ für jedes $\mathfrak{u}$ aus $\varrho_{\frac{1}{r}}$, speziell für $\mathfrak{u} = \mathfrak{w}_0 = \{1, w_0, w_0^2, \ldots\}$ mit $|w_0| < r$. Daher ist $\lim\limits_{p\to\infty} x^{(p)}(w) = x(w)$ für jedes $|w| < r$ und diese Konvergenz ist gleichmäßig für $|w| \leqq s < r$, da alle die zugehörigen $\mathfrak{w}$ eine beschränkte Menge in $\varrho_{\frac{1}{r}}$ bilden, also nach § 2, Satz 1 $\sup\limits_{|w| \leqq s} |x^{(p)}(w) - x(w)|$ den Limes 0 hat.

2. Ist umgekehrt $x^{(p)}(w)$ gleichmäßig gegen $x(w)$ konvergent für jedes $s < r$, $|w| \leqq s$, und ist $\mathfrak{u}$ aus $\varrho_{\frac{1}{r}}$, so wird nach (1)

$$|\mathfrak{u}(\mathfrak{x}^{(p)} - \mathfrak{x})| \leqq \frac{1}{2\pi} \oint\limits_{r-\varepsilon} |x^{(p)}(t) - x(t)| \left| u\left(\frac{1}{t}\right)\right| \frac{dt}{|t|}$$
$$\leqq K \operatorname{Max} |x^{(p)}(t) - x(t)| .$$

Wählt man $s = r - \varepsilon$, so erhält man wegen der gleichmäßigen Konvergenz von $x^{(p)}(t)$ gegen $x(t)$ auf dem Kreise vom Radius $r - \varepsilon$ für $p \geqq p_0(\varepsilon)$

$$|\mathfrak{u}(\mathfrak{x}^{(p)} - \mathfrak{x})| < \varepsilon ,$$

also $\lim\limits_{p\to\infty} \mathfrak{u}\mathfrak{x}^{(p)} = \mathfrak{u}\mathfrak{x}$ für alle $\mathfrak{u}$ aus $\varrho_{\frac{1}{r}}$.

Satz 2_ϱ. *Ist* $\mathfrak{u}^{(p)}$ *eine konvergente Folge in* ϱ_r $(r \geqq 0)$, *so gibt es einen Kreis* $|z| \leqq s$, $s > r$, *in dem die Funktionenfolge* $u^{(p)}(z)$ *gleichmäßig konvergiert und umgekehrt.*

1. Ist $\mathfrak{u}^{(p)}$ konvergent, so konvergiert es koordinatenweise gegen ein $\mathfrak{u}$ aus ϱ_r und es gibt nach § 1, Satz 2_ϱ, ein $\delta > 0$ und dazu ein $n_0(\delta)$, so daß

$$\sqrt[n]{|u_n^{(p)}|} \leqq \frac{1}{r+\delta}$$

und

$$\sqrt[n]{|u_n|} \leqq \frac{1}{r+\delta}$$

für $n \geqq n_0(\delta)$ und alle p ist. Also wird für $|z| \leqq s$, $r < s < r+\delta$

$$\Big|\sum_{n=m+1}^{\infty} u_n^{(p)} z^{n-1}\Big| \leqq \sum_{n=m+1}^{\infty} \left(\frac{s}{r+\delta}\right) < \frac{\varepsilon}{3}\,, \qquad \Big|\sum_{n=m+1}^{\infty} u_n z^{n-1}\Big| < \frac{\varepsilon}{3}\,,$$

wenn nur m genügend groß ist.

Aus der koordinatenweisen Konvergenz von $\mathfrak{u}^{(p)}$ gegen $\mathfrak{u}$ folgt schließlich $\Big|\sum_{n=1}^{m} (u_n^{(p)} - u_n) z^{n-1}\Big| < \frac{\varepsilon}{3}$ für genügend großes $p \geqq p_0(\varepsilon)$, insgesamt also $|u^{(p)}(z) - u(z)| < \varepsilon$ für alle $|z| \leqq s$.

2. Die Umkehrung beweist man wie oben mit Hilfe von (1′) statt (1).

Satz 3_π. *Ist* X *eine beschränkte Menge in* π_r $(r \leqq \infty)$, *so ist die Menge der zu den* $\mathfrak{x}$ *aus* X *gehörigen Funktionen* $x(w)$ *gleichmäßig beschränkt in jedem Kreise* $|w| \leqq s < r$, *und umgekehrt.*

Satz 3_ϱ. *Ist* U *eine beschränkte Menge in* ϱ_r $(r \geqq 0)$, *so ist die Menge der zu den* $\mathfrak{x}$ *aus* X *gehörigen Funktionen* $u(z)$ *gleichmäßig beschränkt in einem Kreise* $|z| \leqq s$, $s > r$, *und umgekehrt.*

Die Beweise verlaufen analog.

Satz 4. (*Der Vitalische Satz.*) λ *sei ein vollkommener Raum, in dem der Grenzstellensatz gilt,* $\mathfrak{u}^{(n)}$ *sei eine Folge von Stellen aus* λ^* *von der Art, daß aus* $\mathfrak{u}^{(n)}\mathfrak{x} = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *folgt* $\mathfrak{x} = \mathfrak{o}$. *Ist nun* $\mathfrak{x}^{(p)}$ *eine beschränkte Folge von Stellen aus* λ, *für die* $\lim\limits_{p\to\infty} \mathfrak{u}^{(n)}\mathfrak{x}^{(p)}$ *für alle n existiert, so ist die Folge* $\mathfrak{x}^{(p)}$ *konvergent.*

Die Behauptung besagt, daß für jedes $\mathfrak{u}$ aus λ^* der $\lim\limits_{p\to\infty} \mathfrak{u}\mathfrak{x}^{(p)}$ existiert. Gesetzt für irgendein $\mathfrak{u}$ aus λ^* wäre dies nicht der Fall. Dann hätten die Werte $\mathfrak{u}\,\mathfrak{x}^{(p)}$, die beschränkt sind, mindestens zwei Häufungsstellen a, b. Aus einer Teilfolge $\mathfrak{x}^{(q)}$ der $\mathfrak{x}^{(p)}$, für die $\lim\limits_{q\to\infty} \mathfrak{u}\,\mathfrak{x}^{(q)} = a$ ist, kann man, da sie beschränkt ist, eine konvergente Teilfolge herausgreifen, gemäß dem Grenzstellensatz; sei $\mathfrak{y}$ der Limes dieser konvergenten Teilfolge; ebenso kann man eine Teilfolge $\mathfrak{x}^{(r)}$ der $\mathfrak{x}^{(p)}$ finden, für die $\lim\limits_{r\to\infty} \mathfrak{u}\,\mathfrak{x}^{(r)} = b$ ist; sei $\mathfrak{z}$ ihr Limes. Dann wäre $\mathfrak{u}\,(\mathfrak{y}-\mathfrak{z}) = a - b \neq 0$, aber $\mathfrak{u}^{(n)}\,(\mathfrak{y}-\mathfrak{z}) = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, also nach Voraussetzung $\mathfrak{y} = \mathfrak{z}$, was ein Widerspruch ist.

Der Satz erscheint hier als Verallgemeinerung des Satzes, daß in einem vollkommenen Raum, in dem der Grenzstellensatz gilt, eine beschränkte und koordinatenweise konvergente Folge konvergiert: an die Stelle der $\mathfrak{e}_p$ sind hier die $\mathfrak{u}^{(n)}$ getreten.

Wendet man ihn andererseits auf π_r an, so erhält man vermöge der Sätze 2_π und 3_π den „*Vitalischen Satz*" der Funktionentheorie in dem Wortlaut:

Ist die Funktionenfolge $f_p(z)$ in $|z| < R$ gleichmäßig beschränkt und konvergiert sie an unendlich vielen Stellen z_i, deren Limes z_0 im Innern von $|z| \leqq R$ liegt, so ist die Folge in jedem Kreis $|z| \leqq r < R$ gleichmäßig konvergent.

§ 4. Lineare Transformationen

Wird jedem $\mathfrak{x}$ aus π_r $(r \leqq \infty)$ eine komplexe Zahl $u(\mathfrak{x})$ zugeordnet, so daß für beliebige α, β stets

$$u(\alpha\,\mathfrak{x} + \beta\,\mathfrak{y}) = \alpha\, u(\mathfrak{x}) + \beta\, u(\mathfrak{y})$$

gilt, und ist die so erklärte Linearfunktion überdies stetig, d. h.

$$\lim_{n\to\infty} u(\mathfrak{x}^{(n)}) = u(\lim_{n\to\infty} \mathfrak{x}^{(n)}) ,$$

so ist damit ein lineares Funktional auf π_r erklärt. Nach K. T., § 3, Satz 6 wird jedes lineare Funktional durch eine Stelle $\mathfrak{u}$ aus $\pi_r^* = \varrho_{\frac{1}{r}}$ erzeugt, $u(\mathfrak{x}) = \mathfrak{u}\,\mathfrak{x}$. Nach § 3, Satz 1 kann $u(\mathfrak{x})$ auch als Integral in der Form (1) geschrieben werden. Entsprechendes gilt für stetige Linearfunktionen auf den ϱ_r $(r \geqq 0)$.

Nach K. T., § 8, wird entsprechend jede stetige lineare Abbildung $\mathfrak{v} = A(\mathfrak{u})$ von ϱ_r in $\varrho_{r'}$ durch eine Matrix $\mathfrak{A}$ vermittelt, $\mathfrak{v} = \mathfrak{A}\,\mathfrak{u}$. Ihre Transponierte $\mathfrak{A}'$ bildet $\pi_{\frac{1}{r'}}$ in $\pi_{\frac{1}{r}}$ ab. $\mathfrak{A}$ bildet nach K. T. § 8, Satz 3 jede beschränkte Menge aus ϱ_r in eine beschränkte Menge aus

$\varrho_{r'}$ ab. Ist also $U(s)$ die Menge aller $\mathfrak{u}$ mit $|u_q| \leqq \frac{1}{s^{q-1}}$, $s > r$, so gibt es nach § 1, Satz 2_ϱ eine Zahl $N(s) > r'$, so daß von einem gewissen p_0 ab

$$\sum_{q=1}^{\infty} |a_{pq}| \frac{1}{s^{q-1}} \leqq \frac{1}{N(s)^{p-1}}$$

gilt, also ist die Potenzreihe

$$A(y, u) = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} a_{pq} y^{p-1} u^{q-1}$$

absolut konvergent in jedem Bereich

$$\mathfrak{B}(s) : |u| \leqq \frac{1}{s} < \frac{1}{r}, \qquad |y| < N(s), \qquad N(s) > r'.$$

Ist umgekehrt $\mathfrak{A}$ eine Matrix, zu der eine solche Potenzreihe gehört, und ist $\mathfrak{u}$ in ϱ_r,

$$\frac{1}{s} = \overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|u_n|},$$

so ist $|u_q| \leqq C \frac{1}{s^{q-1}}$, also $\sum_{q=1}^{\infty} |a_{pq} u_q|$ für jedes p konvergent, das Produkt $\mathfrak{v} = \mathfrak{A}\mathfrak{u}$ kann also gebildet werden. Nach Voraussetzung ist ferner

$$v(z) = \sum_{p=1}^{\infty} v_p z^{p-1} = \sum_{p=1}^{\infty} \Big(\sum_{q=1}^{\infty} a_{pq} u_q \Big) z^{p-1}$$

für alle $|z| < N(s)$ konvergent, $\mathfrak{v}$ also eine Stelle aus $\varrho_{r'}$. $\mathfrak{A}$ stellt also nach K. T. § 8, Satz 2 eine stetige lineare Abbildung von ϱ_r in $\varrho_{r'}$ dar.

Durch Umordnen ergibt sich

$$v(z) = \sum_{q=1}^{\infty} \Big(\sum_{p=1}^{\infty} a_{pq} z^{p-1} \Big) u_q = \sum_{q=1}^{\infty} x_q u_q .$$

Die x_q sind die Koeffizienten der Funktion

$$x(w) = \sum_{q=1}^{\infty} x_q w^{q-1} = \sum_{q=1}^{\infty} \Big(\sum_{p=1}^{\infty} a_{pq} z^{p-1} w^{q-1} \Big) = A(z, w)$$

aus $\pi_{\frac{1}{r}}$, wir erhalten also durch Anwendung von § 3, Satz 1

$$v(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{r+\varepsilon} A\left(z, \frac{1}{t}\right) u(t) \frac{dt}{t},$$

wobei das ε noch von $u(t)$ und z abhängig ist.

Satz 1_ϱ. *Jede lineare stetige Abbildung* $\mathfrak{v} = A(\mathfrak{u})$ *von* ϱ_r $(r \geqq 0)$ *in* $\varrho_{r'}$ $(r' \geqq 0)$ *wird durch eine analytische Funktion zweier Variablen* $A(y, u)$ *erzeugt, die eine Potenzreihenentwicklung*

$$A(y, u) = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} a_{pq} y^{p-1} u^{q-1}$$

besitzt, die für jedes $s > r$ *in einem Bereich* $\mathfrak{B}(s) : |u| \leqq \frac{1}{s}$, $|y| < N(s)$, $N(s) > r'$, *absolut konvergiert. Es ist mit* $\mathfrak{A} = (a_{pq})$

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{A}\mathfrak{u} \qquad oder \qquad v(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{r+\varepsilon} A\left(z, \frac{1}{t}\right) u(t) \frac{dt}{t}. \tag{2 ϱ}$$

Umgekehrt wird durch eine diese Bedingung erfüllende Matrix bzw. Funktion stets eine stetige lineare Abbildung von ϱ_r *in* $\varrho_{r'}$ *erzeugt.*

Ist $\mathfrak{y} = \mathfrak{B}\mathfrak{x}$ eine lineare Abbildung von π_r in $\pi_{r'}$, so führt $\mathfrak{B}' \varrho_{\frac{1}{r'}}$ in $\varrho_{\frac{1}{r}}$ über und umgekehrt. Also gilt für die entsprechende analytische Funktion

$$B(v, x) = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} b_{pq} v^{p-1} x^{q-1},$$

daß sie für jedes $s < r'$ in einem Bereich

$$\mathfrak{C}(s) : |v| \leqq s, \quad |x| < \frac{1}{N(s)}, \quad N(s) < r,$$

absolut konvergiert. § 3, Satz 1 ergibt den noch fehlenden Teil von

Satz 1_π. *Jede lineare stetige Abbildung* $\mathfrak{y} = B(\mathfrak{x})$ *von* π_r $(r \leqq \infty)$ *in* $\pi_{r'}$ $(r' \leqq \infty)$ *wird durch eine analytische Funktion zweier Variablen* $B(v, x)$ *erzeugt, die eine Potenzreihenentwicklung*

$$B(v, x) = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} b_{pq} v^{p-1} x^{q-1}$$

besitzt, die für jedes $s < r'$ *in einem Bereich* $\mathfrak{C}(s) : |v| \leqq s$, $|x| < \frac{1}{N(s)}$, $N(s) < r$, *absolut konvergiert. Es ist*

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{B}\mathfrak{x} \qquad oder \qquad y(w) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{r-\varepsilon} B\left(w, \frac{1}{t}\right) x(t) \frac{dt}{t}. \tag{2_π}$$

Wie oben gilt die Umkehrung.

Folgerung. *Mit* $\mathfrak{A} = (a_{pq})$ *ist stets auch* $\tilde{\mathfrak{A}} = (|a_{pq}|)$ *eine stetige lineare Abbildung von* ϱ_r *in* $\varrho_{r'}$ *bzw.* π_r *in* $\pi_{r'}$.

Die Abbildungen von π_∞ bzw. in ϱ_0 lassen sich auch matrizenmäßig einfach charakterisieren.

Satz 2. *Jede lineare stetige Abbildung von* ϱ_r $(r \geqq 0)$ *in* ϱ_0 *wird durch eine Matrix* $\mathfrak{A}$ *erzeugt, für die*

$$M_{\mathfrak{A}}(s) = \sup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_{n1}|\, s + |a_{n2}|\, s^2 + |a_{n3}|\, s^3 + \cdots} \tag{3}$$

für jedes $0 < s < \frac{1}{r}$ *endlich ist und umgekehrt.*

Jede lineare stetige Abbildung von π_∞ *in* π_r $(r \leqq \infty)$ *wird durch eine Matrix* $\mathfrak{B}$ *erzeugt, für die*

$$M_{\mathfrak{B}}(s) = \sup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|b_{1n}|\, s + |b_{2n}|\, s^2 + |b_{3n}|\, s^3 + \cdots} \tag{3'}$$

für jedes $0 < s < r$ *endlich ist und umgekehrt.*

Es genügt, die erste Hälfte zu beweisen, die zweite ergibt sich daraus durch Übergang zur transponierten Matrix.

1. Die Notwendigkeit der Bedingung (3) folgt daraus, daß jede beschränkte Menge in ϱ_r, speziell also auch die Menge der $\mathfrak{u}$ mit $|u_q| \leqq s^q$, $s < \frac{1}{r}$, in eine beschränkte Menge in ϱ_0 übergeht.

2. Ist $\mathfrak{u}$ eine Stelle aus ϱ_r, so gibt es ein $C > 0$ und ein $s < \frac{1}{r}$, so daß $|u_p| \leqq C s^p$ ist. Da $\sum_{p=1}^{\infty} |a_{np}|\, s^p < \infty$ ist, existiert $\mathfrak{A}\mathfrak{u}$. Es ist ferner

$$|a_{n1} u_1| + |a_{n2} u_2| + \cdots \leqq C[|a_{n1}|\, s + |a_{n2}|\, s^2 + \cdots] \leqq C[M_{\mathfrak{A}}(s)]^n ,$$

also liegt $\mathfrak{A}\mathfrak{u}$ in ϱ_0. Zieht man K. T. § 8, Satz 2 heran, so folgt, daß (3) hinreichend ist.

§ 5. Die Mengen W_a

Hat $a(w) = \sum_{p=1}^{\infty} a_p w^{p-1}$ den Konvergenzradius r, so entsteht durch Multiplikation jeder Funktion $x(w)$ aus π_r mit $a(w)$ wieder eine Funktion $a(w)\, x(w)$ aus π_r. Diese lineare Transformation von π_r in sich wird durch die Matrix

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & . \\ a_2 & a_1 & 0 & . \\ a_3 & a_2 & a_1 & . \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \qquad \text{bzw. die Funktion} \quad A(v, x) = a(v) \frac{1}{1 - v x} \tag{4}$$

erzeugt.

Hat $a(w)$ in $|w| < r$ die α_1-fache Nullstelle w_1, die α_2-fache Nullstelle w_2 usf., so bilden wir die Stellen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{w}_i &= \{1, w_i, w_i^2, w_i^3, \dots\} \\ \mathfrak{w}_i' &= \{0, 1, 2 w_i, 3 w_i^2, \dots\} \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \mathfrak{w}_i^{(p)} &= \left\{0, \dots 0, p! \binom{p}{p}, p! \binom{p+1}{p} w_i, p! \binom{p+2}{p} w_i^2, \dots\right\}, \quad p = \alpha_i - 1 . \end{aligned}$$

Die Menge aller dieser Stellen aus $\varrho_{\frac{1}{r}}$ werde mit W_a bezeichnet. Jede Stelle aus W_a ist Lösung der Gleichung $\mathfrak{A}' \mathfrak{u} = \mathfrak{o}$.

Wir bestimmen in π_r den Orthogonalraum zu W_a. Ist eine Stelle $\mathfrak{x}$ aus π_r zu allen Stellen $\mathfrak{w}_i, \mathfrak{w}_i', \dots$ orthogonal, so ist

$$x_1 + x_2 w_i + x_3 w_i^2 + \cdots = 0 , \qquad x_2 + 2 x_3 w_i + 3 x_3 w_i^2 + \cdots = 0, \dots, \qquad i = 1, 2 \dots ,$$

d. h. $x(w) = \sum_{p=1}^{\infty} x_p w^{p-1}$ ist eine Funktion, die alle Nullstellen von $a(w)$ in mindestens derselben Vielfachheit enthält, also durch $a(w)$ teilbar, also eine Stelle aus $\mu = \mathfrak{A}(\pi_r)$. Der Orthogonalraum zu W_a ist daher $\mu = \mathfrak{A}(\pi_r)$. Andererseits ist der Lösungsraum $\tilde{\eta}$ von $\mathfrak{A}' \mathfrak{u} = \mathfrak{o}$ gleich dem Orthogonalraum $\bar{\mu}$ (vgl. etwa die Einleitung von K), also gleich der orthogonalabgeschlossenen Hülle $\overline{\overline{W}}_a$ von W_a. Nach dem Orthogonalraumsatz (vgl. K 1, § 6, Satz 2) ist also $\tilde{\eta}$ gleich der vollabgeschlossenen linearen Hülle von W_a, d. h. $\tilde{\eta}$ besteht aus den endlichen linearen Verbindungen der $\mathfrak{w}_i, \mathfrak{w}_i', \dots$ und deren Häufungsstellen.

Satz 1. *Ist $a(w)$ in π_r, $\mathfrak{A}$ die zugehörige Matrix, so ist der Bildraum $\mathfrak{A}(\pi_r)$ der Raum derjenigen Stellen aus π_r, deren zugehörige Funktionen durch $a(w)$ teilbar sind. Der Raum $\tilde{\eta}$ der Lösungen von $\mathfrak{A}' \mathfrak{u} = \mathfrak{o}$ in $\varrho_{\frac{1}{r}}$ ist die vollabgeschlossene lineare Hülle der Menge W_a.*

Bisher sind wir von $a(z)$ ausgegangen und haben seine Nullstellen w_i und die zugehörige Menge W_a behandelt. Wir wollen jetzt umgekehrt von einer solchen Menge W ausgehen.

Sei R_r $(r \leqq \infty)$ die Menge sämtlicher Stellen $\mathfrak{w} = \{1, w, w^2, \ldots\}$, $\mathfrak{w}' = \{0, 1, 2w, \ldots\}, \ldots$, die sich ergeben, wenn w alle komplexen Zahlen $|w| < r$ durchläuft (auch $w = 0$). Mit $R_r^{(l)}$ bezeichnen wir die aus den finiten linearen Verbindungen der Stellen aus R_r bestehende lineare Hülle von R_r.

Wir überlegen, welche Funktionen aus $\varrho_{\frac{1}{r}}$ zu den Stellen der Menge $R_r^{(l)}$ gehören. Zu $\mathfrak{w}$ gehört die Funktion $\dfrac{1}{1 - wz}$, zu $\mathfrak{w}'$ ihre Ableitung $\dfrac{1}{(1 - wz)^2}$ usf., zu $\mathfrak{w}^{(v-1)}$ die Funktion $\dfrac{1}{(1 - wz)^v}$ bis auf konstante Faktoren. Zu jeder linearen Verbindung davon gehört eine rationale Funktion, die für $|z| \leqq \dfrac{1}{r}$ regulär ist. Umgekehrt lehrt der Satz von der Partialbruchzerlegung, daß jede rationale Funktion, die für $|z| \leqq \dfrac{1}{r}$ regulär ist, auf diese Weise darstellbar ist, also:

Zu $R_r^{(l)}$ gehört die Menge aller rationalen Funktionen, die für $|z| \leqq \dfrac{1}{r}$ regulär sind.

Die Nullstellen w_i einer Funktion $a(z)$ aus π_r häufen sich nicht in $|w| < r$. Sei allgemein $w_1, w_2, \ldots$ eine Folge komplexer Zahlen, die sich nicht in $|w| < r$ häufen, und sei zu jeder eine Vielfachheit α_i gegeben, so sei W die Menge der Stellen $\mathfrak{w}_i, \mathfrak{w}_i', \ldots \mathfrak{w}_i^{(\alpha_i - 1)}$, $i = 1, 2, \ldots$, $W^{(l)}$ ihre lineare Hülle. Dann gilt

Satz 2. *$W^{(l)}$ ist vollabgeschlossen.*

Folgerung. *In Verschärfung von Satz 1 gilt: $\tilde{\eta} = W_a^{(l)}$.*

Sei $a(z) = \sum\limits_p a_p z^{p-1}$ gemäß Weierstraß eine Funktion aus π_r, die die w_i in der vorgegebenen Vielfachheit α_i zu Nullstellen hat und sonst keine Nullstellen. Wir haben dann zu zeigen, daß der Raum $\tilde{\eta}$ der Lösungen von $\mathfrak{A}'\mathfrak{u} = \mathfrak{o}$ gleich $W_a^{(l)}$ ist. Ist $\mathfrak{u}$ eine Lösung, so ist

$$
\begin{aligned}
u_1 a_1 + u_2 a_2 + u_3 a_3 + \cdots &= 0 \\
u_2 a_1 + u_3 a_2 + \cdots &= 0 \\
u_3 a_1 + \cdots &= 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &
\end{aligned}
$$

Dann bilde man

$$\varphi(z) = u_1 + u_2 \frac{1}{z} + u_3 \frac{1}{z^2} + \cdots \tag{5}$$

Diese Reihe konvergiert für $\left|\frac{1}{z}\right| < \frac{1}{r-\varepsilon}$, also $|z| > r - \varepsilon$. Das Produkt $a(z)\varphi(z)$ kann daher für $r - \varepsilon < |z| \leqq r$ als Doppelreihe, die absolut konvergiert, umgeordnet werden, es wird

$$a(z)\varphi(z) = z(a_2 u_1 + a_3 u_2 + \cdots) + z^2(a_3 u_1 + a_4 u_2 + \cdots) + \cdots,$$

die übrigen Glieder fallen gemäß Voraussetzung weg. Die Reihe rechts, eine Potenzreihe, konvergiert für $r - \varepsilon < |z| \leqq r$ also für $|z| \leqq r$, stellt also eine Funktion $b(z)$ aus π_r dar. Daher ist $\varphi(z) = \frac{b(z)}{a(z)}$ eine in $|z| \leqq r$ bis auf die Nullstellen von $a(z)$ reguläre Funktion. Außerdem ist sie, wie aus (5) hervorgeht, für $|z| > r - \varepsilon$ in ∞ regulär. Sie ist daher eine rationale Funktion. Also ist auch $\varphi\left(\frac{1}{z}\right) = u_1 + u_2 z + u_3 z^2 + \cdots$ rational und für $|z| \leqq \frac{1}{r}$ regulär, also ist $\mathfrak{u}$ eine lineare Verbindung solcher $\mathfrak{w}, \mathfrak{w}', \ldots$, die zu den Nullstellen von $\varphi\left(\frac{1}{z}\right)$, die Pole von $a(z)$ sind, gehören, d. h. $\mathfrak{u}$ liegt in $W^{(l)}$.[5])

Die zur Abbildung (4) transponierte Abbildung $\mathfrak{A}'$ führt die Stelle $\mathfrak{w}$ aus $\varrho_{\frac{1}{r}}$ in die Stelle $a(w)\mathfrak{w}$ über. Bezeichnen wir die Menge aller Vielfachen der Stellen aus R_r mit cR_r, so ist also $\mathfrak{A}'$ eine Abbildung von cR_r in sich. Wir wollen alle diese Abbildungen $\mathfrak{B}$ bestimmen.

Da wir sie nur unter den Abbildungen von $\varrho_{\frac{1}{r}}$ in sich suchen, muß zuerst jede Zeile von $\mathfrak{B}$ in π_r liegen. Sei $\sum_{q=1}^{\infty} b_{pq} w^{q-1} = b_p(w)$, so sind also alle $b_p(w)$ in π_r. Soll $\mathfrak{B}$ jede Stelle $\mathfrak{w}$ aus R_r in eine Stelle $c\mathfrak{v} = \{c, cv, cv^2, \ldots\}$ mit $|v| < r$ überführen, so muß $b_p(w) = cv^{p-1}$ sein:

$$b_1(w) = c, \qquad b_2(w) = cv, \qquad b_3(w) = cv^2, \ldots$$

und daher identisch in w:

$$b_2^2(w) = b_1(w)\,b_3(w), \qquad b_2^3(w) = b_1^2(w)\,b_4(w), \qquad b_2^4(w) = b_1^3(w)\,b_5(w), \ldots$$

---

[5]) Da nach § 4, Satz 5 der in Anm. 3 zitierten Arbeit bereits jeder nur in bezug auf die Limesbildung abgeschlossene lineare Teilraum von $\varrho_{\frac{1}{r}}$ orthogonal abgeschlossen ist, genügt es zum Beweis von Satz 2, die Abgeschlossenheit von $W^{(l)}$ zu zeigen, was wesentlich einfacher und ohne Heranziehung funktionentheoretischer Hilfsmittel möglich ist (vgl. § 7 der angegebenen Arbeit). Die Folgerung von Satz 2 haben bereits *F. Schürer* (Berichte d. Sächs. Gesellsch. d. Wiss. Leipzig **70** (1918), S. 185—240) und *O. Perron* (Math. Ann. **84** (1921), S. 1—15, Satz 1) bewiesen durch Zurückführung auf einen Satz über lineare Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten.

Ist w_i irgendeine a-fache Nullstelle von $b_1(w)$, so muß sie also auch Nullstelle von $b_2(w)$ sein, und wenn sie eine b-fache Nullstelle von $b_2(w)$ ist, muß

$$a \leqq 2b, \quad 2a \leqq 3b, \quad 3a \leqq 4b, \ldots$$

sein, d. h. der Reihe nach

$$a \leqq 2b, \quad a \leqq \frac{3}{2}b, \quad a \leqq \frac{4}{3}b, \ldots$$

Da a, b ganze Zahlen sind, folgt $a \leqq b$. $b_1(w)$ muß also in π_r ein Teiler von $b_2(w)$ sein, $b_2(w) = b_1(w)\,c(w)$, wo auch $c(w)$ eine Funktion aus π_r ist, und es ist $b_p(w) = b_1(w)\,[c(w)]^{p-1}$. Setzen wir also bequemer $b_1(w) = a(w)$, so haben wir

$$b_1(w) = a(w), \qquad b_2(w) = a(w)\,c(w), \qquad b_3(w) = a(w)\,[c(w)]^2, \ldots$$

Dabei muß $|c(w)| < r$ sein für $|w| < r$.

Die zugehörige Funktion ist $B(z, w) =$

$$\Sigma\,\Sigma\, b_{pq} z^{p-1} w^{q-1} = a(w) + z\,a(w)\,c(w) + z^2 a(w)\,[c(w)]^2 + \cdots$$

Die zugehörige Matrix $\mathfrak{B}$ hat offenbar die Form

$$\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & . \\ c_1 & c_2 & c_3 & . \\ c_1^{(2)} & c_2^{(2)} & c_3^{(2)} & . \\ . & . & . & . \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & . \\ 0 & a_1 & a_2 & . \\ 0 & 0 & a_1 & . \\ . & . & . & . \end{pmatrix} = \mathfrak{C}'\,\mathfrak{A}'. \tag{6}$$

$\mathfrak{A}'$ ist Transponierte zu (4), $\mathfrak{C}$ ist eine Matrix, in deren Spalten die Koeffizienten der Potenzen von $c(w)$ stehen. $\mathfrak{y} = \mathfrak{C}\mathfrak{x}$ bedeutet in π_r den Übergang von $x(w)$ zur Funktion $x\big(c(w)\big)$, die wegen $|c(w)| < r$ für $|w| < r$ in π_r liegt. $\mathfrak{A}\,\mathfrak{C}$ bedeutet also die lineare Abbildung $x(w) \to a(w)\,x\big(c(w)\big)$ von π_r in sich, also führt auch jede Matrix $\mathfrak{B} = \mathfrak{C}'\,\mathfrak{A}'\,\varrho_{\frac{1}{r}}$ in sich über, speziell $c\,R_r$ in sich.

Satz 3. *Die Transformationen von* $\varrho_{\frac{1}{r}}$ *in sich, die* $c\,R_r$ *in sich überführen, haben die Gestalt* (6), *wo* $a(w) = \Sigma\, a_p w^{p-1}$ *und* $c(w) = \Sigma\, c_p w^{p-1}$ *in* π_r *liegen, außerdem* $|c(w)| < r$ *für* $|w| < r$ *ist.*

(Eingegangen den 3. Oktober 1948)