

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 23 (1949)

**Artikel:** Die Äquivalente des Minkowski-Hajósschen Satzes in der Theorie der topologischen Gruppen.  
**Autor:** Fáy, István  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-19764>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 14.03.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Die Äquivalente des Minkowski-Hajósschen Satzes in der Theorie der topologischen Gruppen

Von ISTVÁN FÁRY, Szeged (Ungarn)

In dieser kleinen Note<sup>1)</sup> zeigen wir, daß durch eine Umformulierung des *Minkowski-Hajósschen Satzes*<sup>2)</sup> (Satz 2) ein Struktursatz bezüglich der kommutativen, kompakten topologischen Gruppen entsteht (Satz 1) (siehe auch die Bemerkung nach Satz 1).

1. Es handelt sich im folgenden nur um *kommutative Gruppen*, die Gruppenoperation schreiben wir additiv. Bei den einparameterigen Untergruppen der topologischen Gruppe  $G$  werden wir immer einen kanonischen Parameter verwenden (so daß also  $\alpha(x) + \alpha(y) = \alpha(x + y)$  gilt). Ist  $\alpha(x)$  ein veränderliches Element einer einparameterigen Untergruppe von  $G$ , so nennen wir die Menge

$$[\alpha]: \alpha(x), \quad \xi \leq x < \eta \quad (-\infty < \xi \leq 0 < \eta < +\infty) \quad (1)$$

der Elemente kurz ein Gruppenintervall und bezeichnen es (wie auch schon in (1)) mit  $[\alpha]$ ; dabei sind  $\xi, \eta$  immer so zu wählen, daß  $\alpha(x) \neq \alpha(y)$  ( $\xi \leq x \neq y < \eta$ ) gilt. Das Gruppenintervall  $[\alpha]$  ist offenbar dann und nur dann eine Gruppe, wenn  $\alpha(\xi) = \alpha(\eta)$  ist (und dann ist sie eine eindimensionale Torusgruppe).

---

<sup>1)</sup> Diese Note ist beim Studium von zwei Arbeiten von Rédei entstanden, die mir noch vor Publikation zugänglich waren. Die erste davon ist die voranstehende Arbeit „Kurzer Beweis des gruppentheoretischen Satzes von Hajós“, zu dem sich diese Note unmittelbar anschließt (da es sich in ihr ebenfalls um ein gruppentheoretisches Problem handelt), die zweite erscheint demnächst in den *Acta Scientiarum Mathematicarum* unter dem Titel „Vereinfachter Beweis des Satzes von Minkowski-Hajós“. Beide Arbeiten werden kurz als Rédei I bzw. Rédei II zitiert.

<sup>2)</sup> *G. Hajós*: Über einfache und mehrfache Bedeckung des  $n$ -dimensionalen Raumes mit einem Würfelgitter. *Math. Zeitschrift* 47 (1941), S. 427—467; 2. Fassung (S. 431).

· Der fragliche Struktursatz lautet so :

**Satz 1.** *Wenn die topologische Gruppe  $G$  eine direkte Summe von  $n$  Gruppenintervallen ist :*

$$G = [\alpha_1] + \cdots + [\alpha_n] , \quad (2)$$

*d. h. ein beliebiges Element  $\beta$  von  $G$  genau einmal in der Form*

$$\beta = \alpha_1(x_1) + \cdots + \alpha_n(x_n) \quad (\xi \leq x_i < \eta; \quad \xi \leq 0 < \eta) \quad (3)$$

*entsteht, so gibt es unter den  $[\alpha_i]$  ( $i = 1, \dots, n$ ) eine Gruppe.*

*Bemerkung.* Es folgt aus den Voraussetzungen des Satzes, daß  $G$  zusammenhängend und kompakt ist, weiter eine Umgebung der Identität besitzt, die mit dem Inneren der  $n$ -dimensionalen Kugel homeomorph ist. Hieraus folgt, nach einem bekannten Pontrjaginschen Fundamentalsatz<sup>3)</sup>, daß  $G$  die direkte Summe von  $n$  eindimensionalen Torusgruppen ist, d. h. eine Darstellung (2) gestattet, wo sämtliche direkte Summanden Gruppen sind. Satz 1 gilt also gewissermaßen als eine „Umkehrung“ des Pontrjaginschen Satzes<sup>4)</sup>.

2. Der Minkowski-Hajóssche Satz bezieht sich auf die einfache Bedeckung des  $n$ -dimensionalen Euklidischen Raumes  $R_n$  mit einem Würfelgitter. Es genügt dabei nur solche *Würfelgitter*  $\mathfrak{G}(W)$  zu betrachten, die aus den („achsenparallelen“) Würfeln

$$W(\alpha) : \alpha + x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n \quad (\xi \leq x_i \leq \eta; \quad i = 1, \dots, n) \quad (4)$$

bestehen, wobei nämlich die  $e_i$  die Einheitsvektoren bezeichnen und  $\alpha$  die Elemente eines Punktgitters  $\mathfrak{G}$  durchläuft;  $\mathfrak{G}(W)$  nennen wir *einfach raumbedeckend*, wenn seine Würfel  $W(\alpha)$  den Raum bedecken, und paarweise ohne gemeinsame innere Punkte sind<sup>5)</sup>.

Dann lautet der wichtige Satz von Minkowski-Hajós so :

**Satz 2.** *Jedes einfach raumbedeckende Würfelgitter  $\mathfrak{G}(W)$  des  $n$ -dimensionalen Raumes enthält zwei Würfel mit gemeinsamen ( $n-1$ -dimensionalen) Seiten.*

<sup>3)</sup> L. Pontrjagin, Topological Groups (Princeton 1939), Chapter V, Satz 42 (S. 169).

<sup>4)</sup> Siehe Rédei I, Einleitung.

<sup>5)</sup> Siehe Hajós<sup>2)</sup>, §§ 1, 2, 3 und Rédei II.

Eine erhebliche Vereinfachung wird in unseren Betrachtungen durch die Heranziehung der halboffenen Würfel erreicht. Den zu  $W(\mathfrak{a})$  gehörige *halboffenen Würfel* nennen wir die Punktmenge

$$W'(\mathfrak{a}): \mathfrak{a} + x_1 \mathfrak{e}_1 + \cdots + x_n \mathfrak{e}_n, \quad \xi \leq x_i < \eta \quad (i = 1, \dots, n); \quad (4')$$

$\mathfrak{G}(W')$  entsteht wieder so, daß  $\mathfrak{a}$  die Punkte des Punktgitters  $\mathfrak{G}$  durchläuft. Es gilt der Satz: Wenn  $\mathfrak{G}(W)$  den Raum einfach bedeckt, dann ist  $\mathfrak{G}(W')$  schlicht raumbedeckend in dem Sinne, daß jedes  $\mathfrak{x} \in R_n$  zu genau einem halboffenen Würfel von  $\mathfrak{G}(W')$  gehört<sup>6)</sup>. Dieser Satz berechtigt uns, anstatt  $\mathfrak{G}(W)$  immer nur  $\mathfrak{G}(W')$  zu betrachten.

*Beweis der Äquivalenz der Sätze 1 und 2.* a) Auf Grund von Satz 2 beweisen wir Satz 1. Nehmen wir an, daß die topologische Gruppe  $G$  die Darstellung (2) gestattet. Zum Punkte

$$\mathfrak{x} = y_1 \mathfrak{e}_1 + \cdots + y_n \mathfrak{e}_n \quad (-\infty < y_i < +\infty)$$

des  $R_n$  ordnen wir das Gruppenelement

$$\beta = \alpha_1(y_1) + \cdots + \alpha_n(y_n)$$

zu. Diese Zuordnung ist für jedes  $\mathfrak{x} \in R_n$  definiert (hat aber natürlich keine eindeutige Umkehrung<sup>7)</sup>). Nun werden wir mit Hilfe der halboffenen Würfel  $W'(\mathfrak{o})$  in (4) ein  $\mathfrak{G}(W')$  definieren. Und zwar nehmen wir zu jedem  $\mathfrak{x}$  das zugeordnete  $\beta$ , und bestimmen den Punkt  $\mathfrak{x}^*$  von  $W'(\mathfrak{o})$ , dessen Koordinaten gleich den Argumenten  $x_1, \dots, x_n$  in (3) sind. Wir verschieben dann  $W'(\mathfrak{o})$  um alle (verschiedenen) Vektoren  $\mathfrak{x} - \mathfrak{x}^*$ . Aus der Eindeutigkeit der Konstruktion ist klar, daß die so entstandenen halboffenen Würfel den Raum schlicht überdecken. Sie bilden auch ein  $\mathfrak{G}(W')$ . Dazu genügt es zu zeigen, daß diejenigen Punkte  $\mathfrak{x}$  ein Punktgitter  $\mathfrak{G}$  bilden, für die  $\mathfrak{x}^* = (0, \dots, 0)$  ausfällt. Es seien

$$\mathfrak{x}_i = y_{i1} \mathfrak{e}_1 + \cdots + y_{in} \mathfrak{e}_n \quad (i = 1, 2)$$

<sup>6)</sup> In diesem Zusammenhang war der Satz schon durch *Perron* benutzt; einen vollständigen Beweis siehe bei *Rédei II*.

<sup>7)</sup> Wir werden eben zeigen, daß die additive Gruppe der Vektoren von  $R_n$  die universelle Überlagerungsgruppe von  $G$  ist. (Den Begriff und die Eigenschaften der Überlagerungsgruppe werden wir aber nicht benötigen.)

zwei solche Punkte. Dann gilt

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k(y_{ik}) = \sum_{k=1}^n \alpha_k(0) \quad (i = 1, 2),$$

woraus

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k(y_{1k} \pm y_{2k}) = \sum_{k=1}^n \alpha_k(y_{1k}) \pm \sum_{k=1}^n \alpha_k(y_{2k}) = \sum_{k=1}^n \alpha_k(0),$$

folgt, und so gehört auch  $x_1 \pm x_2$  in der Tat dem Anfangspunkt  $(0, \dots, 0)$  zu.

Ergänzt man die halboffenen Würfel von diesen  $\mathfrak{G}(W')$  (mit Hinzunahme der vollen Begrenzung) zu Würfeln, so entsteht offenbar ein Würfelgitter  $\mathfrak{G}(W)$ . Wegen Satz 2 folgt hieraus, daß es in  $\mathfrak{G}(W)$  einen Würfel gibt, der mit  $W(\mathfrak{o})$  eine gemeinsame  $n - 1$ -dimensionale Seite hat. Nach (4) bedeutet dies, daß  $\mathfrak{G}$  einen Vektor  $(\xi - \eta) e_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) enthält. Dann gilt  $\alpha_i(\xi) = \alpha_i(\eta)$ , und dies besagt, daß  $[\alpha_i]$  eine Gruppe ist.

b) *Aus Satz 1 folgt Satz 2.* Betrachten wir ein den Raum schlicht überdeckendes  $\mathfrak{G}(W')$ , wobei wir gleich annehmen dürfen, daß die Ecke von  $W'(\mathfrak{o})$  in  $(0, \dots, 0)$  liegt (d. h. in (4)  $\xi = 0$  ist). Die Gittervektoren bilden einen Normalteiler in der additiven Gruppe der Vektoren von  $R_n$ ; bezeichne  $G$  die entsprechende Faktorgruppe. Der Umstand, daß  $\mathfrak{G}(W')$  den Raum schlicht überdeckt, bedeutet eben, daß jede Klasse von  $G$  genau einen Repräsentanten in  $W'(\mathfrak{o})$  hat. Andererseits ist  $G$  eine topologische Gruppe, in der die von  $(0, \dots, 0)$  auslaufenden Kanten von  $W'(\mathfrak{o})$  je ein Gruppenintervall bilden, deren direkte Summe gleich  $G$  ist. Aus Satz 1 folgt, daß eins dieser Gruppenintervalle eine Gruppe ist, und dies bedeutet, daß der Endpunkt des betreffenden Kantenvektors  $\eta e_i$  (mit dem Anfangspunkt  $(0, \dots, 0)$  zusammen) in die Hauptklasse  $\mathfrak{G}$  gehört. Gehe man von  $\mathfrak{G}(W')$ , wie oben, zu  $\mathfrak{G}(W)$  über. Da  $W(\mathfrak{o})$  nach der Verschiebung um  $\eta e_i$  eine ganze  $n - 1$ -dimensionale Seite mit  $W(\mathfrak{o})$  gemeinsam hat, so ist hierdurch Satz 2 bewiesen.

Wir bemerken, daß man auf Grund der Äquivalenz der Sätze 1, 2 alle direkten Zerlegungen (2) leicht auch gruppentheoretisch konstruieren kann.

3. Zum Schluß bemerken wir noch, daß im Beweis von Satz 2 die Hauptrolle einem Struktursatz aus der Theorie der endlichen kommutativen Gruppen zukommt, der folgendermaßen formuliert werden kann<sup>8)</sup>.

---

<sup>8)</sup> Siehe Hajós<sup>2)</sup> und Rédei I.

*Gilt für eine endliche kommutative Gruppe  $G$  die Darstellung*

$$G = [\alpha_1]_{e_1} + \cdots + [\alpha_n]_{e_n}$$

*wo die direkten Summanden Komplexe von der Form*

$$[\alpha_i]_{e_i} = (0, \alpha_i, \dots, (e_i - 1) \alpha_i) \\ (\nu \alpha_i \neq \mu \alpha_i \quad (\nu \neq \mu), \quad 0 \leq \nu, \mu < e_i; \quad i = 1, \dots, n)$$

*sind, so ist mindestens ein Komplex  $[\alpha_i]_{e_i}$  eine Gruppe.*

Man sieht also, daß die von uns angegebene äquivalente Form (Satz 1) des Satzes 2 von Minkowski-Hajós einerseits und der eben angeführte gruppentheoretische Satz von Hajós andererseits eine ähnliche Erscheinung ausdrücken, und zwar für die (kompakten) kommutativen topologischen Gruppen bzw. für die endlichen kommutativen Gruppen. Man fühlt sich gezwungen zu meinen, daß beide Sätze Bruchstücke einer allgemeineren Gesetzmäßigkeit sind.

(Eingegangen den 16. Oktober 1948.)